

文章编号: 0583-1431(2006)01-0129-10

文献标识码: A

算术级数中的奇数 Goldbach 问题 (II)

崔 振

上海交通大学数学系 上海 200240

E-mail: cuizhen@sjtu.edu.cn

摘 要 本文考察了几乎所有模的算术级数中的奇数 Goldbach 问题. 证明了对几乎所有的模 $r \leq N^{1/6-\varepsilon}$, 充分大的正奇数 N 可表为三个素数之和, 其中每个素数取在模 r 的满足必要同余条件的任意剩余系中.

关键词 奇数 Goldbach 问题; 素数; 算术级数

MR(2000) 主题分类 11P32, 11P55

中图分类 O156

The Ternary Goldbach Problem in Arithmetic Progression (II)

Zhen CUI

Department of Mathematics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, P. R. China

E-mail: cuizhen@sjtu.edu.cn

Abstract In this article, we prove that the ternary Goldbach problem in arithmetic progression can be solved for almost all large positive moduli, where the moduli can be as large as $N^{1/6-\varepsilon}$.

Keywords ternary Goldbach problem; prime; arithmetic progression

MR(2000) Subject Classification 11P32, 11P55

Chinese Library Classification O156

1 引言及定理

对充分大的正奇数 N 及正整数 r , 定义 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 及

$$\mathbf{B}(N, r) = \{\mathbf{b} \in N^3 : 1 \leq b_j \leq r, (b_j, r) = 1 \text{ 和 } b_1 + b_2 + b_3 \equiv N \pmod{r}\}, \quad (1.1)$$

则

$$\#\mathbf{B}(N, r) = r^2 \prod_{\substack{p|r \\ p \nmid N}} \frac{(p-1)(p-2)}{p^2} \prod_{\substack{p|r \\ p \nmid N}} \frac{p^2 - 3p + 3}{p^2}. \quad (1.2)$$

我们考察方程

$$\begin{cases} N &= p_1 + p_2 + p_3, \\ p_j &\equiv b_j \pmod{r}, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.3)$$

的可解性. 甚至在 Vinogradov^[1, 2] 解决奇数 Goldbach 问题之前, Rademacher^[3] 就在 GRH 假设下证明了: 对任意的固定正整数 r , 令 $J(N; r, \mathbf{b})$ 表示方程 (1.3) 的解数, 则对奇数 N 及所有的

收稿日期: 2004-03-18; 接受日期: 2004-12-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471090)

$\mathbf{b} \in \mathbf{B}(N, r)$, 有

$$J(N; r, \mathbf{b}) = \sigma(N; r) \frac{N^2}{2 \log^3 N} (1 + o(1)), \quad (1.4)$$

其中奇异级数 $\sigma(N; r)$ 满足

$$\sigma(N; r) = \frac{C(r)}{r^2} \prod_{p|r} \frac{p^3}{(p-1)^3 + 1} \prod_{\substack{p|N \\ p \nmid r}} \frac{(p-1)((p-1)^2 - 1)}{(p-1)^3 + 1} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \gg 1, \quad (1.5)$$

其中 $p > 2$,

$$C(r) = \begin{cases} 2, & r \text{ 为奇数,} \\ 8, & r \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

在 Vinogradov 的工作 [2] 之后, Zulauf [4] 和 Ayoub [5] 分别用不同的方法独立的得到了无条件结果. 对他们的方法稍作改进可以证明 (1.4) 式对所有 $r \leq \log^A N$ 成立, 其中 A 可取为任意正常数. 一个自然的问题是: 方程 (1.3) 对更大的 r (例如, r 大到 N 的某个正方幂) 仍然可解吗? 1993 年, Wolke [6] 首先打破了 $\log^A N$ 的界限, 得到了如下的 Bombieri-Vinogradov 型均值公式

$$\sum_{q \leq Q} \max_{y \leq x} \max_{\substack{(a,q)=1 \\ |\lambda| \leq \theta}} \max_{n \leq y} \left| \sum_{n \leq y} \Lambda(n) e\left(n\left(\frac{a}{q} + \lambda\right)\right) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{n \leq y} e(n\lambda) \right| \ll x \log^{-A} x \quad (1.6)$$

对

$$Q = x^{1/4} \log^{-B} x, \quad \theta = Q^{-4} \log^{-B} x \quad (1.7)$$

成立, 其中 $B > 0$ 是一仅依赖于 A 的常数, 进而利用园法证明了 (1.4) 式对几乎所有素数模 $r = p \leq N^{1/11}$ 成立. 后来, 展涛和刘建亚 [7, 8] 扩大了 (1.7) 式中 Q 和 θ 的取值范围, 证明了均值估计 (1.6) 对

$$Q = x^{1/3} \log^{-B} x, \quad \theta = Q^{-3} \log^{-B} x \quad (1.8)$$

成立, 其中 $B > 0$ 是一仅依赖于 A 的常数. 需要指出的是, (1.8) 式中 Q 和 θ 的取值范围已经同 GRH 下一样好了. 利用这一改进, 刘建亚 [9] 证明了 Rademacher 的公式 (1.4) 对几乎所有素数模 $r = p \leq N^{3/20} \log^{-B} N$ 成立. 最近, 作者 [10] 用不同的办法证明了公式 (1.4) 对几乎所有素数模 $r = p \leq N^{1/6-\varepsilon}$ 成立. 对正整数模的情况, 刘建亚和展涛 [7] 证明了 (1.4) 式对几乎所有模 $r \leq N^{1/8-\varepsilon}$ 成立. 另一方面, 几位作者 (例如, 刘建亚和展涛的文 [11]) 分别用不同方法证明了存在可计算常数 $\delta > 0$, 使得方程 (1.3) 对任意 $r \leq N^\delta$ 及任意 $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(N, r)$ 可解. 最近, 张振锋和王天泽 [12] 证明了 $\delta \leq 1/42$ 是可容许的. 后来, 张振锋又在他的博士论文中将这一结果改进为 $\delta \leq 1/34$. 关于算数级数中的奇数 Goldbach 问题的详细研究历史及结果, 可参见文 [13].

本文同文 [7, 9] 中一样, 关心的是在平均意义下 r 可以取得多大. 我们证明了 (1.4) 式对几乎所有的正整数模 $r \ll N^{1/6-\varepsilon}$ 及所有 $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(N, r)$ 成立, 其中 $\varepsilon > 0$ 是任意常数. 有如下定理:

定理 1 令 N 为一充分大的正整数, $\varepsilon > 0$ 为任意小的正常数, $R \leq N^{1/6-\varepsilon}$. 令 $A > 0$ 为任意常数. $\mathbf{B}(N, r)$ 的定义同 (1.1), 则对所有正整数 $r \leq R$, 最多除去 $O(R \log^{-A} N)$ 个例外, 素变数方程 (1.3) 对所有 $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(N, r)$ 可解, 且其解数由 (1.4) 式给出.

定理 1 是定理 2 的直接推论.

定理 2 记号同定理 1, 则

$$\sum_{R/2 < r \leq R} r \max_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}(N, r)} \left| \sum_{\substack{N=p_1+p_2+p_3 \\ p_j \equiv b_j \pmod{r}}} (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3) - \frac{\sigma(N; r)N^2}{2} \right| \ll N^2 \log^{-A} N. \quad (1.9)$$

定理 1 的证明 以 $E(R)$ 表示满足 $R/2 < r \leq R$, 且使

$$\max_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}(N, r)} \left| \sum_{\substack{N=p_1+p_2+p_3 \\ p_j \equiv b_j \pmod{r}}} (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3) - \frac{\sigma(N; r)N^2}{2} \right| > \frac{r}{\varphi^3(r)} \cdot \frac{N^2}{\log N}$$

的正整数 r 的集合, 则由定理 2, 有 $\sum_{r \in E(R)} \frac{r^2}{\varphi^3(r)} \leq \log^{-A} N$. 进而有

$$\#E(R) = \sum_{r \in E(R)} 1 \leq R \sum_{r \in E(R)} \frac{r^2}{\varphi^3(r)} \ll R \log^{-A} N.$$

由于

$$\frac{r}{\varphi^3(r)} \ll \sigma(N; r) \ll \frac{r}{\varphi^3(r)}, \quad (1.10)$$

(1.4) 对所有 $r \notin E(R)$ 和任意 $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(N, r)$ 成立. 证毕.

我们将用圆法证明定理 2. 在余区间上, 需要在大模的算术级数中的素变数三角和的估计中取得一定的节省, 这使得主区间取得非常“大”, 从而更难处理. 在文 [10] 中, 得到了算术级数中的素变数三角和的一个新的估计. 这一估计虽然不能使单个主区间“小”下来, 但有效地降低了主区间的数量, 并使得主区间中对应算术级数中的奇数 Goldbach 问题的关键变量 $rq/(r, q)$ 变小 (参考 Perelli [14] 和文 [9]), 从而得到了指数 $1/6$. 不同于此前的作者, 我们应用了刘建亚和展涛 [15] 建立起来的新方法来处理增大了的主区间 (后来这一方法又被刘建亚和廖明哲 [16] 改进, 最近, 刘建亚和展涛又进一步发展出了更有效的叠代方法). 此方法不仅总是得到较 Bombieri-Vinogradov 型均值定理更好的结果, 还能处理更复杂的主区间 (可参考我们的主区间与文 [7] 中的主区间). 最后, 我们指出这里模 r 的取值范围已经同素数模的情况同样好了.

2 记号与方法概述

本文记号都是标准的. 特别的, r 总表示正整数. 记 $L = \log N$. ε 表示充分小的正数, 在不同的地方可能取值不同. 一些不需要定出数值的常数统一用 c 表示, 如有必要, 以下标区分. $r \sim R$ 表示 $\frac{1}{2}R < r \leq R$. 令 $B = A + 100$. 对正整数 r 和 q , 令 $h = (r, q)$, 则 r, q 及 h 有 (惟一) 分解式

$$\begin{aligned} r &= p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} r_0, & (p_j, r_0) &= 1, \\ q &= p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s} q_0, & (p_j, q_0) &= 1, \\ h &= p_1^{\gamma_1} \cdots p_s^{\gamma_s}, \end{aligned}$$

其中 $\gamma_j = \min(\alpha_j, \beta_j)$, $j = 1, \dots, s$. 依据 $\alpha_j = \gamma_j$ 与否令 $\delta_j = \alpha_j$ 或 0 . 定义 $h_1 = p_1^{\delta_1} \cdots p_s^{\delta_s}$, $h_2 = h/h_1$, 则有 $h_1 h_2 = h$, $(h_1, h_2) = 1$, $(\frac{r}{h_1}, \frac{q}{h_2}) = 1$. 令

$$P = R^2 L^{2B}, \quad Q = NR^{-2} L^{-3B}, \quad (2.1)$$

则由 Dirichlet 有理逼近定理知对任意 $\alpha \in [1/Q, 1 + 1/Q]$, 有

$$\alpha = a/q + \lambda, \quad q \leq Q, \quad 1 \leq a \leq q, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq 1/qQ. \quad (2.2)$$

以 $\mathfrak{M}(a, q)$ 记 (2.2) 式中 α 之集, 我们如下定义主区间 \mathfrak{M} 和余区间 \mathfrak{m} ,

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\substack{q \leq P, \\ h > q^{1/2} L^{-B}}} \bigcup_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q \mathfrak{M}(a, q), \quad \mathfrak{m} = [1/Q, 1 + 1/Q] \setminus \mathfrak{M}.$$

记 $e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$ 并令 $M = NL^{-12}$. 定义算术级数中的三角和

$$S(\alpha; r, b) = \sum_{\substack{M < p \leq N \\ p \equiv b \pmod{r}}} (\log p) e(p\alpha), \quad (2.3)$$

则定理 2 等价于对任意 $A > 0$,

$$\sum_{r \sim R} r \max_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}(N, r)} \left| \int_{1/Q}^{1+1/Q} S(\alpha; r, b_1) S(\alpha; r, b_2) S(\alpha; r, b_3) e(-N\alpha) - \sigma(N; r) \frac{N^2}{2} \right| \ll N^2 L^{-A},$$

故只需证

$$\sum_{r \sim R} r \max_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}(N, r)} \left| \int_{\mathfrak{M}} S(\alpha; r, b_1) S(\alpha; r, b_2) S(\alpha; r, b_3) e(-N\alpha) - \sigma(N; r) \frac{N^2}{2} \right| \ll N^2 L^{-A} \quad (2.4)$$

和

$$\sum_{r \sim R} r \max_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}(N, r)} \left| \int_{\mathfrak{m}} S(\alpha; r, b_1) S(\alpha; r, b_2) S(\alpha; r, b_3) e(-N\alpha) \right| \ll N^2 L^{-A}. \quad (2.5)$$

为了控制余区间中 $S(\alpha; r, b)$ 的估计, 我们需要如下引理.

引理 2.1^[10] 令 $S(\alpha; r, b)$ 如(2.3) 式定义, 则对满足 $r\alpha = a_1/q_1 + \lambda_1$, $|\lambda_1| \leq \frac{1}{q_1^2}$, $(a_1, q_1) = 1$ 和 $r^2\alpha = a_2/q_2 + \lambda_2$, $|\lambda_2| \leq \frac{1}{q_2^2}$, $(a_2, q_2) = 1$ 的 α , 我们有

$$S(\alpha; r, b) \ll \left(q_1 + \frac{N}{rq_1} + \frac{N}{rq_2^{\frac{1}{2}}} + \frac{N^{\frac{5}{6}}}{r^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} \right) L^3. \quad (2.6)$$

特别的, 对 $\alpha \in \mathfrak{m}$ 和 $r \sim R$, 一致地有

$$S(\alpha; r, b) \ll \frac{N}{rL^{A+1}}. \quad (2.7)$$

(2.7) 式的证明 $q > P$ 的情况易由 (2.6) 式和分部求和公式得到. 而对 $q \leq P$, 注意到 $R \leq N^{1/6-\varepsilon}$, 总有 $q \geq q_1 \geq q/h$ 及 $q \geq q_2 \geq q/(q, r^2) \geq q/h^2$. 再注意到在余区间 \mathfrak{m} 中, $h < q^{1/2}L^{-B}$, 也由 (2.6) 式可得所需估计. 证毕.

(2.5) 的证明 由 (2.7) 式易知对 $r \sim R$, 一致地有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{m}} S(\alpha; r, b_1) S(\alpha; r, b_2) S(\alpha; r, b_3) e(-N\alpha) d\alpha \\ & \ll \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha; r, b_1)| \left(\int_0^1 |S(\alpha; r, b_2)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |S(\alpha; r, b_3)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{N^2}{r^2} L^{-A-1}, \end{aligned}$$

从而 (2.5) 式右端 $\ll N^2 L^{-A}$, 证毕.

注 1 引理 2.1 就是在第一节末尾提到的算术级数中三角和估计, 其作用是尽可能的缩小主区间中的关键变量的取值. 文 [10] 是通过 Vaughan 分拆来证明引理 2.1 的. 现在知道多种方法都可以得到各种相类似的结果, 例如本文中采用的展涛和刘建亚处理主区间的方法就可以给出一个局部的结果, 并可推广到高次和其他类型的情况. 这一类型的新结果与已有的全局结果结合往往能给很多问题带来改进. Kumchev^[17]的方法能给出目前适用范围最广的结果, 我们将另文讨论.

3 广义高斯和与主区间上的准备工作

对 Dirichlet 特征 $\eta \bmod q/h_2$.

定义

$$G(\eta, q, b, r, a) = \sum_{\substack{c=1 \\ (c, q)=1 \\ c \equiv b \pmod{r}}}^q \bar{\eta}(c) e\left(\frac{ac}{q}\right) \quad (3.1)$$

及

$$G(q, b, r, a) = G(\chi^0, q, b, r, a), \quad (3.2)$$

易见 $G(\chi, q, b, r, a)$ 是经典高斯和 $G(\chi, a)$ 在算术级数中的推广. 对特征 $\chi \bmod rq/h$, 有惟一分解 $\chi = \xi\eta$, 其中 $\xi \bmod r/h_1$ 及 $\eta \bmod q/h_2$, 我们有

引理 3.1 设 $\eta \bmod q/h_2$ 由原特征 $\eta^* \bmod q^*$ 导出, 则有 $|G(\eta, q, b, r, a)| \leq q^{*1/2}$.

证明 这是文 [7] 中的引理 3.

定义

$$V(\lambda) = \sum_{M < m \leq N} e(m\lambda), \quad W(\chi, \lambda) = \sum_{M < p \leq N} (\log p) \chi(p) e(p\lambda) - \delta_\chi V(\lambda), \quad (3.3)$$

其中 $\delta_\chi = 1$ 或 0 依 χ 是否是主特征. 由文 [7] 易见, 对 $\alpha \in \mathfrak{M}(a, q)$,

$$\begin{aligned} S(\alpha; r, b) &= \sum_{\substack{c=1 \\ (c, q)=1}}^q e\left(\frac{ac}{q}\right) \sum_{\substack{M < p \leq N \\ p \equiv b \pmod{r} \\ p \equiv c \pmod{q}}} (\log p) e(p\lambda) \\ &= \frac{1}{\varphi(r/h_1)\varphi(q/h_2)} \sum_{\xi \bmod r/h_1} \bar{\xi}(b) \sum_{\eta \bmod q/h_2} G(\eta, q, b, r, a) \sum_{M < p \leq N} \xi\eta(p) (\log p) e(p\lambda) \\ &= \frac{G(q, b, r, a)}{\varphi(r/h_1)\varphi(qh_2)} V(\lambda) + \frac{1}{\varphi(r/h_1)\varphi(qh_2)} \sum_{\xi \bmod r/h_1} \bar{\xi}(b) \sum_{\eta \bmod q/h_2} G(\eta, q, b, r, a) W(\xi\eta, \lambda) \\ &=: S_1(r, a, q, \lambda) + S_2(r, a, q, \lambda). \end{aligned} \quad (3.4)$$

定义

$$J = \max_{s_1 \leq R} \frac{1}{s_1^{1/2-\varepsilon}} \sum_{s \leq R^2 L^{3B}} \frac{1}{s^{1/2-\varepsilon}} \sum_{\chi \bmod s}^* \max_{|\lambda| \leq s_1/sQ} |W(\chi, \lambda)|.$$

此处和下文中的求和号 \sum^* 表示对原特征求和. 我们以文 [7] 中的引理 13 结束本节.

引理 3.2 对正整数 r, q , 令 h, h_1, h_2 如上定义, 则

$$\sum_{\substack{r \leq N_1 \\ r^* | r/h_1}} \sum_{\substack{q \leq N_2 \\ q^* | q/h_2}} \frac{1}{\varphi(r/h_1)\varphi(q/h_2)} \ll \frac{d(r^*)}{r^* q^*} \log^3 N_1 \log^2 N_2. \quad (3.5)$$

4 主区间的简化

利用Cauchy不等式易见 b_1, b_2 和 b_3 的差别在本节中不产生影响, 所以将其统一简记为 b , 有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{M}} (S_1(r, a, q, \lambda) + S_2(r, a, q, \lambda))^3 e(-N\alpha) d\alpha \\ &= \sum_{\substack{q \leq P \\ h > q^{1/2} L^{-B}}} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q \int_{\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ}}^{\frac{a}{q} + \frac{1}{qQ}} S_1^3(r, a, q, \lambda) e(-N(a/q + \lambda)) d\lambda \\ & \quad + O \left(\sum_{\substack{q \leq P \\ h > q^{1/2} L^{-B}}} \max_{a, \lambda} |S_2(r, a, q, \lambda)| \int_{\mathfrak{M}} (|S(\alpha; r, b)|^2 + |S_1(r, a, q, \lambda)|^2) d\alpha \right) \\ &= \int_{\mathfrak{M}} S_1^3(r, a, q, \lambda) e(-N\alpha) d\alpha + O \left(\frac{N}{r} \sum_{\substack{q \leq P \\ h > q^{1/2} L^{-B}}} \max_{a, \lambda} |S_2(r, a, q, \lambda)| \right) \\ &=: I_1 + O \left(\frac{N}{r} \sum_{\substack{q \leq P \\ h > q^{1/2} L^{-B}}} \max_{a, \lambda} |S_2(r, a, q, \lambda)| \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

在第 6 节证明主项由 I_1 产生. 将证明上式最后一行的 O - 余项是可容许的. 对 r 求和, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{r \sim R} \sum_{\substack{q \leq P \\ h > q^{1/2} L^{-B}}} \max_{a, \lambda} |S_2(r, a, q, \lambda)| \\ &= \sum_{r \sim R} \sum_{\substack{q \leq P \\ h > q^{1/2} L^{-B}}} \max_{a, \lambda} \left| \frac{1}{\varphi(r/h_1) \varphi(q/h_2)} \sum_{\xi \bmod r/h_1} \bar{\xi}(b) \sum_{\eta \bmod q/h_2} G(\eta, q, b, r, a) W(\xi \eta, \lambda) \right|. \end{aligned}$$

在上式中按原特征求和, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{r \sim R} \sum_{\substack{q \leq P \\ h > q^{1/2} L^{-B}}} \max_{a, \lambda} |S_2(r, a, q, \lambda)| \\ & \ll \sum_{\substack{s_1 \leq R \\ (s_1, s_2)=1}} \sum_{\substack{s_2 \leq R^2 L^{3B}/s_1 \\ (s_1, s_2)=1}} \sum_{\substack{r \leq R \\ s_1 | r/h_1}} \sum_{\substack{q \leq P \\ s_2 | q/h_2}} \frac{s_2}{\varphi(r/h_1) \varphi(q/h_2)} \max_{|\lambda| \leq 1/qQ} \sum_{\xi \bmod s_1}^* \sum_{\eta \bmod s_2}^* |W(\xi \eta, \lambda)| \\ & \ll L^5 \sum_{\substack{s_1 \leq R \\ (s_1, s_2)=1}} \sum_{\substack{s_2 \leq R^2 L^{3B}/s_1 \\ (s_1, s_2)=1}} \frac{1}{s_1 s_2^{1/2-\varepsilon}} \sum_{\xi \bmod s_1}^* \sum_{\eta \bmod s_2}^* \max_{|\lambda| \leq 1/s_2 Q} |W(\xi \eta, \lambda)| \ll L^5 J. \end{aligned}$$

此处用到了引理 3.2 和熟知估计 $d(n) \ll n^\varepsilon$.

5 J 的估计

对 $M < u \leq N$, 令 M_1, \dots, M_{10} 为满足下式的正整数

$$2^{-10} M \leq M_1 \cdots M_{10} < u, \quad 2M_6, \dots, 2M_{10} \leq u^{1/5}, \quad (5.1)$$

记 $\mathbf{M} = (M_1, M_2, \dots, M_{10})$. 对 $j = 1, \dots, 10$, 分别令

$$a_j(m) = \begin{cases} \log m, & \text{当 } j = 1, \\ 1, & \text{当 } j = 2, 3, 4, 5, \\ \mu(m), & \text{当 } j = 6, 7, 8, 9, 10. \end{cases}$$

定义复函数 f 及 F :

$$f_j(s) = f_j(s, \chi) = \sum_{m \sim M_j} \frac{a_j(m) \chi(m)}{m^s}, \quad F(s) = F(s, \chi) = f_1(s) \cdots f_{10}(s),$$

则刘建亚和廖明哲 [16] 证明了:

引理 5.1 令 $F(s, \chi)$ 如上定义, 则对任意的 $S \geq 1$ 及 $0 < T_3 \leq N$, 有

$$\sum_{s \sim S} \sum_{\chi \bmod s}^* \int_{T_3}^{2T_3} \left| F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt \ll (S^2 T_3 + S T_3^{1/2} N^{3/10} + N^{1/2}) L^c. \quad (5.2)$$

引理 5.2 对 $T \geq 2$, 以 $N^*(\alpha, q, T)$ 表示原特征 $\chi \bmod q$ 对应的 L - 函数 $L(s, \chi)$ 在区域 $\text{Re } s \geq \alpha, |\text{Im } s| \leq T$ 中的零点个数, 则有

$$N^*(\alpha, q, T) \ll (qT)^{12(1-\alpha)/5} \log^c(qT).$$

引理 5.3 存在绝对正常数 $c_1 > 0$, 使得 $\prod_{\chi \bmod q} L(s, \chi)$ 在区域

$$\text{Re } s \geq 1 - c_1 / \max\{\log q, \log^{4/5} T\}, \quad |\text{Im } s| \leq T$$

中除可能的 Siegel 零点外再无其它零点.

引理 5.2 和引理 5.3 是数论中熟知的结果. 关于引理 5.2 的证明可见文 [8]. 而引理 5.3 的证明可在文 [19] 中找到. 利用二分法, 只需估计 J_S ,

$$J_S = \max_{s_1 \leq R} \frac{1}{s_1^{1/2-\varepsilon}} \sum_{s \sim S} \frac{1}{s^{1/2-\varepsilon}} \sum_{\chi \bmod s}^* \max_{|\lambda| \leq s_1/sQ} |W(\chi, \lambda)|,$$

此处 $S \leq R^2 L^{3B}$. 显然

$$J \ll L \max_S J_S. \quad (5.3)$$

引理 5.4 对任意 $A_1 > 0$, 我们有

$$J_S \ll N L^{-A_1}, \quad (5.4)$$

此处隐含常数只与 A_1 有关.

证明 依 S 的大小分两种情况证明 (5.4) 式. 对充分大的正常数 F 及 $S \leq L^F$, 我们采用经典 Dirichlet L - 函数的零点密度和非零区域来证明. 而对 $L^F < S \leq R^2 L^{3B}$, 我们采用围道积分和引理 5.1 来证明 (5.4) 式.

令

$$\hat{W}(\chi, \lambda) = \sum_{M < m \leq N} (\Lambda(m)\chi(m) - \delta_\chi) e(m\lambda), \quad (5.5)$$

则

$$W(\chi, \lambda) - \hat{W}(\chi, \lambda) = - \sum_{j \geq 2} \sum_{M < p^j \leq N} (\log p) \chi(p) e(p^j \lambda) \ll N^{1/2}, \quad (5.6)$$

从而在下文中用 $\hat{W}(\chi, \lambda)$ 代替 $W(\chi, \lambda)$ 产生的余项是可容许的.

(i) $S \leq L^F$, 我们有显式公式 (见文 [20], 109–120 页)

$$\sum_{m \leq u} \Lambda(m)\chi(m) = \delta_\chi u - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{u^\rho}{\rho} + O\left\{\left(\frac{u}{T} + 1\right) \log^2(quT)\right\}, \quad (5.7)$$

其中 $\rho = \beta + i\gamma$ 是 $L(s, \chi)$ 的非显然零点, $2 \leq T \leq u$. 取 $T = N^{1/3}$, 并将 (5.7) 式代入 $\hat{W}(\chi, \lambda)$, 则有

$$\hat{W}(\chi, \lambda) = \int_M^N e(u\lambda) d\left\{ \sum_{m \leq u} (\Lambda(m)\chi(m) - \delta_\chi) \right\} \ll N L^3 \sum_{|\gamma| \leq N^{1/3}} N^{(\beta-1)} + O(N^{2/3} R^2 L^c).$$

记 $\eta(T) = c_1 \log^{-4/5} T$. 由引理 5.3, $\prod_{\chi \bmod q} L(s, \chi)$ 在区域 $\sigma \geq 1 - \eta(T)$, $|t| \leq T$ 内除可能的 Siegel 零点外再无其它零点. 而由 Siegel 定理^[20] 及特征之模 $s \sim S \leq L^F$, Siegel 零点不存在. 再由引理 5.2, 有

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| \leq N^{1/3}} N^{(\beta-1)} &\ll L^c \int_0^{1-\eta(N^{1/3})} (N^{1/3})^{12(1-\alpha)/5} N^{(\alpha-1)/2} d\alpha \ll L^c N^{-\eta(N^{1/3})/10} \\ &\ll \exp(-c_2 L^{1/5}). \end{aligned}$$

进而

$$J_S \ll \sum_{s \sim S} \sum_{\chi \bmod s}^* (N L^c \exp(-c_3 L^{1/5}) + N^{2/3} R^2 L^c) \ll N L^{-A_1},$$

从而对 $S \leq L^F$, (5.4) 式成立.

(ii) $L^F < S \leq R^2 L^{3B}$. 应用 Heath-Brown 恒等式 (见文 [21] 引理 1), 取 $k = 5$, 则有

$$\Lambda(m) = \sum_{j=1}^5 \binom{5}{j} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{m_1 \cdots m_{2j} = m \\ m_{j+1}, \dots, m_{2j} \leq u^{1/5}}} (\log m_1) \mu(m_{j+1}) \cdots \mu(m_{2j}),$$

进而

$$\sum_{M < m \leq u} \Lambda(m) \chi(m) \quad (5.8)$$

可表为 $O(L^{10})$ 个具有如下形式的项的线性组合

$$\sigma(u; \mathbf{M}) = \sum_{\substack{m_1 \sim M_1 \\ M^{1/2} < m_1 \cdots m_{10} \leq u}} \cdots \sum_{m_{10} \sim M_{10}} a_1(m_1) \chi(m_1) \cdots a_{10}(m_{10}) \chi(m_{10}).$$

利用 Perron's 求和公式 (见文 [22] 引理 3.12) 并将积分围道拉到 $\sigma = 1/2$ 处, 则有

$$\begin{aligned} \sigma(u; \mathbf{M}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1+1/L-iN}^{1+1/L+iN} F(s, \chi) \frac{u^s - M^s}{s} ds + O(L^2) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-iN}^{1/2+iN} F(s, \chi) \frac{u^s - M^s}{s} ds + O(L^2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \frac{u^{\frac{1}{2}+it} - M^{\frac{1}{2}+it}}{\frac{1}{2} + it} dt + O(L^2). \end{aligned}$$

由于 $S > L^F$ (此时 $\chi \neq \chi^0$), 有

$$\hat{W}(\chi, \lambda) = \sum_{M < m \leq N} \Lambda(m) \chi(m) e(m\lambda) = \int_M^N e(u\lambda) d\left\{ \sum_{M < m \leq u} \Lambda(m) \chi(m) \right\}, \quad (5.9)$$

进而 $\hat{W}(\chi, \lambda)$ 可表为 $O(L^{10})$ 个具有如下形式之项的线性组合

$$\begin{aligned} \int_M^N e(u\lambda) d\sigma(u; \mathbf{M}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \int_M^N u^{-1/2+it} e(u\lambda) du dt + O(L^2(1+|\lambda|N)) \\ &\ll L^{10} \max_{\mathbf{M}} \left| \int_{-N}^N F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \int_M^N u^{-1/2} e\left(\frac{t}{2\pi} \log u + \lambda u\right) du dt \right| \\ &\quad + R^2 L^{4B}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

易见

$$\frac{d}{du} \left(\frac{t}{2\pi} \log u + \lambda u \right) = \frac{t}{2\pi u} + \lambda, \quad \frac{d^2}{du^2} \left(\frac{t}{2\pi} \log u + \lambda u \right) = -\frac{t}{2\pi u^2},$$

由文 [22] 中引理 4.4 和 4.3, (5.10) 式中内层积分有估计

$$\ll M^{-1/2} \min \left\{ \frac{N}{(|t|+1)^{1/2}}, \frac{N}{\min_{M < u \leq N} |t+2\pi\lambda u|} \right\} \ll \begin{cases} N^{1/2} L^6 / (|t|+1)^{1/2}, & \text{当 } |t| \leq T_0, \\ N^{1/2} L^6 / |t|, & \text{当 } T_0 < |t| \leq T. \end{cases} \quad (5.11)$$

此处 $T_0 = 8\pi s_1 N / SQ$ 保证了当 $|t| > T_0$ 时, $|t+2\pi\lambda u| > |t|/2$. 进而 (5.4) 式化为以下的两个估计: 对 $0 < T_1 \leq T_0$, 有

$$\sum_{s \sim S} \sum_{\chi \bmod s}^* \int_{T_1}^{2T_1} \left| F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt \ll s_1^{1/2} S^{1/2} N^{1/2} (T_1 + 1)^{1/2} L^{-A_1}, \quad (5.12)$$

对 $T_0 < T_2 \leq T$, 有

$$\sum_{s \sim S} \sum_{\chi \bmod s}^* \int_{T_2}^{2T_2} \left| F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt \ll s_1^{1/2} S^{1/2} N^{1/2} T_2 L^{-A_1}. \quad (5.13)$$

在引理 5.1 中分别取 $T_3 = T_1$ 和 $T_3 = T_1$, 就得到了 (5.12) 和 (5.13) 式. 需要注意, 此处限制了 $S \leq N^{1/3-\epsilon}$. 进而 $R \leq N^{1/6-\epsilon}$. 证毕.

6 主项

我们还需要计算 I_1 ,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathfrak{M}} S_1^3 e(-N\alpha) d\alpha \\ &= \sum_{\substack{q=1 \\ h > q^{1/2} L^{-B}}}^P \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \int_{-1/qQ}^{1/qQ} \frac{C(q, b_1, r, a) C(q, b_2, r, a) C(q, b_3, r, a)}{\varphi^3(q)} V^3(\lambda) e\left(-N\left(\frac{a}{q} + \lambda\right)\right) d\lambda \\ &= \sum_{\substack{q=1 \\ h > q^{1/2} L^{-B}}}^P \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \frac{C(q, b_1, r, a) C(q, b_2, r, a) C(q, b_3, r, a)}{\varphi^3(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) \int_{-1/qQ}^{1/qQ} V^3(\lambda) e(-N\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{\substack{q=1 \\ h > q^{1/2} L^{-B}}}^P \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \frac{C(q, b_1, r, a) C(q, b_2, r, a) C(q, b_3, r, a)}{\varphi^3(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) \\ &\quad \times \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V^3(\lambda) e(-N\lambda) d\lambda + O((qQ)^2) \right) \\ &= \sum_{\substack{q=1 \\ h > q^{1/2} L^{-B}}}^P \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \frac{C(q, b_1, r, a) C(q, b_2, r, a) C(q, b_3, r, a)}{\varphi^3(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{2} N^2 + O(N^2 L^{-2B}) \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

取整数 t , 使得 $tq/h \equiv 1 \pmod{h}$. 易证

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varphi^3(r)} \sum_{\substack{q=1 \\ (q/h, h)=1}}^{\infty} \frac{\mu(q/h)}{\varphi^3(q/h)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q e\left(\frac{a(b_1 + b_2 + b_3)t}{h} - \frac{aN}{q}\right) \\ &= \sum_{\substack{q=1 \\ h > q^{1/2} L^{-B}}}^P \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \frac{C(q, b_1, r, a) C(q, b_2, r, a) C(q, b_3, r, a)}{\varphi^3(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\varphi^2(r) L^B}\right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

文 [23] 证明了对奇数 N 及 $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(N, r)$, (7.2) 式左方一致收敛于 $\sigma(N; r)$, 从而我们证明了 (2.4) 式和定理 2.

致谢 作者感谢刘建亚教授多年来的指导和讨论.

参 考 文 献

- [1] Vinogradov I. M., The representation of an odd number as a sum of three primes, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.*, 1937, **16**: 139–142.
- [2] Vinogradov I. M., Some theorems concerning the theory of primes, *Math. Sb. N. S.*, 1937, **2**: 179–195.
- [3] Rademacher H. A., Über eine erweiterung des goldbachens problems, *Math. Z.*, 1926, **25**: 627–660.
- [4] Zulauf A., Beweis einer erweiterung des stazes von Goldbach-Vinogradov, *J. Reine Angew. Math.*, 1952, **190**: 169–198.
- [5] Ayoub R., On Rademacher's extension on the Goldbach-Vinogradov theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1953, **74**: 482–491.
- [6] Wolke D., Some applications to zero-density theorems for L -functions, *Acta Math. Hungar.*, 1993, **61**: 241–258.
- [7] Liu J. Y. and Zhan T., The ternary Goldbach problem in arithmetic progressions, *Acta Arith.*, 1997, **532**(3): 197–227.
- [8] Zhan T. and Liu J. Y., A Bombieri type mean-value theorem concerning exponential sums over primes, *Chinese Sci. Bull.*, 1990, **43**: 363–366.
- [9] Liu J. Y., The Goldbach-Vinogradov theorem with primes in a thin subset, *Chinese Ann. Math.*, 1998, **19**: 479–488.
- [10] Cui Z., The ternary Goldbach problem in arithmetic progressions, to appear.
- [11] Liu J. Y. and Zhan T., The Goldbach problem with primes in arithmetic progressions, in: *Analytic Number Theory (Kyoto, 1996)* (London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, ed. Y. Motohashi), 227–251, Cambridge University Press, 1997.
- [12] Zhang Z. F. and Wang T. Z., The ternary Goldbach problem with primes in arithmetic progressions, *Chinese Ann. Math.*, 2001, **17**: 679–696.
- [13] Liu J. Y. and Zhan T., The Goldbach-Vinogradov theorem, *Zakopane: Number Theory in Progress*, 1997.
- [14] Balog A. and Perelli A., Exponential sums over primes in an arithmetic progression, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1985, **93**: 578–582.
- [15] Liu J. Y. and Zhan T., Sums of five almost equal primes squares, *Sci. in China*, 1998, **41**: 710–722.
- [16] Liu J. Y. and Liu M. C., The exceptional set in the 4 prime squares problem, *Illinois Journal of Mathematics*, 2000, **44**(2): 272–293.
- [17] Kumchev A., On Weyl sums over primes and almost primes, preprint (Available on his website).
- [18] Pan C. D. and Pan C. B., *Fundamentals of analytic number theory*, Beijing: Science Press, 1991 (in Chinese).
- [19] Prachar K., *Primzahlverteilung*, Berlin: Springer, 1957.
- [20] Davenport H., *Multiplicative number theory*, 2nd ed., Berlin: Springer, 1980.
- [21] Heath-Brown D. R., Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan's identity, *Can. J. Math.*, 1982, **34**: 1365–1377.
- [22] Titchmarsh E. C., *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd ed., Oxford: Oxford University Press, 1986.