第65卷第4期 数学学报中文版 Vol.65, No.4
2022年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2022

DOI: 10.12386/A20210085 **文献标识码: A**

Bloch 函数到 BMOA 空间的距离

胡光明

金陵科技学院理学院 南京 211169
E-mail: hgm326219@jit.edu.cn

刘军明

广东工业大学应用数学学院 广州 510520
E-mail: jmliu@gdut.edu.cn

漆 毅

北京航空航天大学数学科学学院 北京 100191
E-mail: qiyi@buaa.edu.cn

唐树安

贵州师范大学数学科学学院 贵阳 550001
E-mail: tsa@gznu.edu.cn

摘 要 本文利用高阶导数形式给出了 Bloch 函数到 BMOA 空间的距离刻画. 这些结论推广了由 Peter Jones 和赵如汉等人所得到的一阶导数形式的距离公式. 作为应用, 我们给出了关于小 Teichmüller 空间的一些等价刻画.

关键词 BMOA 空间; 小 Bloch 空间; 小 Teichmüller 空间

MR(2010) 主题分类 30H30, 30C62

中图分类 O177.2

Distances From Bloch Functions to BMOA Space

Guang Ming HU

College of Science, Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, *P. R. China*
E-mail: *hgm326219@jit.edu.cn*

Jun Ming LIU

School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology,
Guangzhou 510520, *P. R. China*
E-mail: *jmliu@gdut.edu.cn*

收稿日期: 2020-10-26; 接受日期: 2021-05-13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11801094, 11871085, 11601100);
贵州省自然科学基金 ([2017]7337); 金陵科技学院博士启动基金 (jit-b-202011)
通讯作者: 刘军明

Yi QI

School of Mathematics and Systems Science, Beihang University,
Beijing 100191, *P. R. China*
E-mail: *qiyi@buaa.edu.cn*

Shu An TANG

School of Mathematics Sciences, Guizhou Normal University,
Guiyang 550001, *P. R. China.*
E-mail: *tsa@gznu.edu.cn*

Abstract We provide the characterizations of distances from Bloch functions to BMOA by the high order derivatives. These results generalize the distance formula from Bloch functions to BMOA by Peter Jones and Ruhan Zhao. As applications, we give some equivalent characterizations of the small Teichmüller space.

Keywords BMOA space; small Bloch space; small Teichmüller space
MR(2010) Subject Classification 30H30, 30C62
Chinese Library Classification O177.2

1 引言

令 $\mathbb{D}$ 复平面上的开单位圆盘以及 $\partial\mathbb{D}$ 为单位圆周. 记 $H(\mathbb{D})$ 为 $\mathbb{D}$ 上所有解析函数的全体. 回顾 Bloch 空间 $\mathscr{B}$ 为所有 $f \in H(\mathbb{D})$ 且满足下面范数有界的函数全体

$$\|f\|_{\mathscr{B}} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

假定 n 为正整数. 根据文献 [22] 或 [23] 知, 范数 $\|\cdot\|_{\mathscr{B}}$ 等价于下面形式的范数

$$\|f\| = |f(0)| + |f'(0)| + \cdots + |f^{(n-1)}(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^n|f^{(n)}(z)|.$$

小 Bloch 空间 $\mathscr{B}_0$ 为 $\mathscr{B}$ 的子空间, 它是满足下列条件的函数的全体

$$\lim_{|z|\to 1^-} |f'(z)|(1-|z|^2) = 0, \quad f \in H(\mathbb{D}).$$

给定子弧 $I \subset \partial\mathbb{D}$, I 的弧长定义为

$$|I| = \frac{1}{2\pi}\int_I |d\zeta|,$$

以及 $\mathbb{D}$ 上的 Carleson 方块定义为

$$S(I) = \{r\zeta \in \mathbb{D} : 1-|I| \le r < 1, \zeta \in I\}.$$

记

$$f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f(\zeta)\frac{|d\zeta|}{2\pi}$$

为 f 在 I 上的平均. BMOA 空间是一个包含所有函数 $f \in H^2(\mathbb{D})$ 且满足如下条件的函数集合, 其中

$$\|f\|_{\mathrm{BMOA}} = \left(\sup_{I\subset\partial\mathbb{D}} \frac{1}{|I|}\int_I |f(\zeta)-f_I|^2\frac{|d\zeta|}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

空间 VMOA 为 BMOA 的子空间且满足

$$\lim_{|I|\to 0}\frac{1}{|I|}\int_I |f(\zeta)-f_I|^2\frac{|d\zeta|}{2\pi}=0.$$

BMOA 空间也有如下等价定义 [9]. 令

$$g(z,a)=\log\frac{1}{|\varphi_a(z)|},\quad z\in\mathbb{D}$$

为 $\mathbb{D}$ 上的格林函数, 其中 $\varphi_a(z)=\frac{a-z}{1-\overline{a}z}$ 为 $\mathbb{D}$ 上的 Möbius 变换. BMOA 空间是所有函数 $f\in H(\mathbb{D})$ 且满足如下等价范数条件的全体

$$\|f\|_{\mathrm{BMOA}}=|f(0)|+\left(\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z)\right)^{1/2}<\infty$$

或

$$\|f\|_{\mathrm{BMOA}}=|f(0)|+\left(\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2 g(z,a)dA(z)\right)^{1/2}<\infty,$$

其中 $dA(z)$ 是 $\mathbb{D}$ 上的标准化的 Lebesgue 面积测度. 空间 VMOA 是 BMOA 空间的子空间, 是满足如下条件的解析函数全体

$$\lim_{|a|\to 1^-}\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z)=0$$

或

$$\lim_{|a|\to 1^-}\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2 g(z,a)dA(z)=0.$$

对于 $\mathbb{D}$ 上的正 Borel 测度 μ, 如果满足

$$\|\mu\|=\sup_{I\subset\partial\mathbb{D}}\frac{\mu(S(I))}{|I|}<\infty,$$

则称 μ 是 Carleson 测度. 进一步地, 如果满足

$$\lim_{|I|\to 0}\frac{\mu(S(I))}{|I|}=0,$$

则称 μ 是消失 Carleson 测度 (也称为紧的 Carleson 测度).

设 X 为 $\mathscr{B}$ 的子空间, 函数 $f\in\mathscr{B}$ 到空间 X 的距离定义为

$$\mathrm{dist}_{\mathscr{B}}(f,X)=\inf_{g\in X}\|f-g\|_{\mathscr{B}}.$$

对于 $f\in\mathscr{B}$, $\varepsilon>0$ 以及 n 为正整数. 类似文献 [3], 我们定义水平集为 $\Omega_{n,\varepsilon}(f)=\{z\in\mathbb{D}:(1-|z|^2)^n|f^{(n)}(z)|\geq\varepsilon\}$.

下面定理 A 来自 Peter Jones [10] 和 Ruhan Zhao [21].

定理 A 令 $f\in\mathscr{B}$, 则下面四个量等价:

(1) $\mathrm{dist}_{\mathscr{B}}(f,\mathrm{BMOA})$;

(2) $\inf\{\varepsilon:\chi_{\Omega_{1,\varepsilon}(f)}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$是 Carleson 测度$\}$, 其中 χ 是特征函数;

(3) $\inf\{\varepsilon:\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\Omega_{1,\varepsilon}(f)}|f'(z)|^2(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z)<\infty\}$;

(4) $\inf\{\varepsilon:\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\Omega_{1,\varepsilon}(f)}|f'(z)|^2 g(z,a)dA(z)<\infty\}$.

本文的目的是用高阶导数形式的水平集来刻画定理 A .

定理 1.1 假定 $f \in \mathscr{B}$, 则下面四个量等价:

(1) $\mathrm{dist}_{\mathscr{B}}(f, \mathrm{BMOA})$;

(2) $\inf\{\varepsilon : \chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$是 Carleson 测度$\}$;

(3) $\inf\{\varepsilon : \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} |f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z) < \infty\}$;

(4) $\inf\{\varepsilon : \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} |f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}g(z,a)dA(z) < \infty\}$.

推论 1.2 假定 $f \in \mathscr{B}$, 则下面四个量等价:

(1) f 属于 BMOA 空间在 $\mathscr{B}$ 中的闭包;

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, $\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$ 是 Carleson 测度;

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$, $\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} |f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z) < \infty$;

(4) 对任意 $\varepsilon > 0$, $\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} |f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}g(z,a)dA(z) < \infty$.

关于 Bloch 函数到 VMOA 空间的距离, 我们得到如下结论.

定理 1.3 假定 $f \in \mathscr{B}$, 则下面四个量等价:

(1) $\mathrm{dist}_{\mathscr{B}}(f, \mathscr{B}_0)$;

(2) $\mathrm{dist}_{\mathscr{B}}(f, \mathrm{VMOA})$;

(3) $\inf\{\varepsilon : \chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$是消失的 Carleson 测度$\}$;

(4) $\inf\{\varepsilon : \lim_{|a|\to 1} \int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} |f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z) = 0\}$;

(5) $\inf\{\varepsilon : \lim_{|a|\to 1} \int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} |f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}g(z,a)dA(z) = 0\}$.

推论 1.4 假定 $f \in \mathscr{B}$, 则下面四个量等价:

(1) $f \in \mathscr{B}_0$;

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, $\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$ 是消失的 Carleson 测度;

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$, $\lim_{|a|\to\infty} \int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} |f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z) = 0$;

(4) 对任意 $\varepsilon > 0$, $\lim_{|a|\to\infty} \int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} |f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}g(z,a)dA(z) = 0$.

简单起见, 我们需要如下一些记号. 若存在常数 C 使得 $A \le CB$, 则记成 $A \lesssim B$. 类似地, 若是存在常数 C 使得 $A \ge CB$, 则记成 $A \gtrsim B$. 如果两个量 A 与 B 既满足 $A \gtrsim B$ 且 $A \lesssim B$, 则记为 $A \approx B$.

2 主要定理的证明

定理 1.1 的证明 令 d_1, d_2, d_3, d_4 为定理 1.1 中 (1), (2), (3), (4) 对应的四个量. 我们需要证明 $d_1 \approx d_2 \approx d_3 \approx d_4$.

首先证明 $d_1 \approx d_2$. 关于情况 $d_2 \le d_1$, 这里用反证法证明. 若 $d_1 < d_2$, 则存在两个常数 $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$ 以及一个函数 $f_{\varepsilon_1} \in$BMOA, 使得 $\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$ 不是 Carleson 测度且 $\|f - f_{\varepsilon_1}\|_{\mathscr{B}} \le \varepsilon_1$. 对于任意 $z \in \mathbb{D}$, 有

$$(1-|z|^2)^n|f_{\varepsilon_1}^{(n)}(z)| \ge (1-|z|^2)^n|f^{(n)}(z)| - \|f - f_{\varepsilon_1}\|_{\mathscr{B}} \ge (1-|z|^2)^n|f^{(n)}(z)| - \varepsilon_1.$$

这就得到 $\Omega_{n,\varepsilon}(f) \subset \Omega_{n,\varepsilon-\varepsilon_1}(f_{\varepsilon_1})$. 因而有

$$\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{dA(z)}{1-|z|^2} \le \frac{|f_{\varepsilon_1}^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-1}}{(\varepsilon-\varepsilon_1)^2}dA(z).$$

若 $f_{\varepsilon_1}\in$ BMOA, 则 $|f_{\varepsilon_1}^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-1}dA(z)$ 是 Carleson 测度 (参考文 [2, 定理 5]). 从而得出 $\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$ 是 Carleson 测度. 这就矛盾. 所以 $d_2\le d_1$.

下面证明 $d_1\lesssim d_2$. 对于 $f\in\mathscr{B}$, 令

$$h(z)=f(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k.$$

根据文 [23, 命题 4.27] 可知

$$h(z)=\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^n f^{(n)}(w)dA(w)}{\overline{w}(1-z\overline{w})^2}.$$

所以 $h(z)=h_1(z)+h_2(z)$, 其中

$$h_1(z)=\frac{1}{n!}\int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{(1-|w|^2)^n f^{(n)}(w)dA(w)}{\overline{w}^n(1-z\overline{w})^2}$$

以及

$$h_2(z)=\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{D}\setminus\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{(1-|w|^2)^n f^{(n)}(w)dA(w)}{\overline{w}^n(1-z\overline{w})^2}.$$

以上式子进行 n 次求导得

$$h_1^{(n)}(z)=(n+1)\int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{(1-|w|^2)^n f^{(n)}(w)dA(w)}{(1-z\overline{w})^{n+2}},$$

以及

$$h_2^{(n)}(z)=(n+1)\int_{\mathbb{D}\setminus\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{(1-|w|^2)^n f^{(n)}(w)dA(w)}{(1-z\overline{w})^{n+2}}.$$

假定

$$h_3(z)=h_1(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h_1^{(k)}(0)}{k!}z^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k.$$

若 $\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$ 是 Carleson 测度, 则可推出 $h_1\in\mathscr{B}$. 事实上, 由于

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)^n|h_1^{(n)}(z)|&\le(n+1)\int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{(1-|w|^2)^n|f^{(n)}(w)|(1-|z|^2)^n}{|1-z\overline{w}|^{n+2}}dA(w)\\&\lesssim\|f\|_{\mathscr{B}}\int_{\mathbb{D}}\frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{w}|^2}\cdot\frac{\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}}{1-|w|^2}dA(w).\end{aligned}$$

从而 $h_1\in\mathscr{B}$.

下面需要证明 $h_3\in$ BMOA. 由 Fubini 定理可知

$$\begin{aligned}I&=\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}|h_3^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z)\\&=\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}|h_1^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z)\\&\lesssim\|h_1\|_{\mathscr{B}}\int_{\mathbb{D}}|h_1^{(n)}(z)|(1-|z|^2)^{n-2}(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z)\\&\lesssim\|h_1\|_{\mathscr{B}}\int_{\mathbb{D}}\int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}\frac{(1-|w|^2)^n|f^{(n)}(w)|}{|1-z\overline{w}|^{n+2}}dA(w)\cdot(1-|z|^2)^{n-2}(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z)\\&=\|h_1\|_{\mathscr{B}}\int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}(1-|w|^2)^n|f^{(n)}(w)|\cdot\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-z\overline{w}|^4|1-\overline{a}z|^2}dA(z)dA(w).\end{aligned}$$

利用文 [21, 引理 1], 可得

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-z\overline{w}|^4|1-\overline{a}z|^2} dA(z) \lesssim \frac{(1-|a|^2)}{(1-|w|^2)|1-\overline{a}w|^2}.$$

从而知

$$I \lesssim \|h_1\|_{\mathscr{B}} \|f\|_{\mathscr{B}} \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}w|^2} \cdot \chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} \frac{1}{1-|w|^2} dA(w) < \infty.$$

因此 $h_3 \in \mathrm{BMOA}$.

对于 $\varepsilon > 0$ 以及 $\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} \frac{dA(z)}{1-|z|^2}$ 是 Carleson 测度, 现只需证明

$$\|f - h_3\|_{\mathscr{B}} \lesssim \varepsilon.$$

注意到

$$(f - h_3)(z) = h(z) - h_1(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_1^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

以及

$$(f - h_3)^{(n)}(z) = h_2^{(n)}(z),$$

则

$$\begin{aligned}
\|f - h_3\|_{\mathscr{B}} &\approx \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^n |h_2^{(n)}(z)| \\
&\lesssim \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^n \int_{\mathbb{D}\setminus\Omega_{n,\varepsilon}(f)} \frac{(1-|w|^2)^n |f^{(n)}(w)|}{|1-z\overline{w}|^{n+2}} dA(w) \\
&\lesssim \varepsilon \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^n \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{w}|^{n+2}} dA(w) \\
&\lesssim \varepsilon.
\end{aligned}$$

所以 $d_1 \lesssim d_2$. 从而得到 $d_1 \approx d_2$.

下面证明 $d_2 \approx d_3$. 注意到 $\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} \frac{dA(z)}{1-|z|^2}$ 是 Carleson 测度, 则

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} \frac{|\varphi_a'(z)|}{1-|z|^2} dA(z) < \infty.$$

这就等价于

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} \frac{1-|\varphi_a(z)|^2}{(1-|z|^2)^2} dA(z) < \infty.$$

因为 $z \in \Omega_{n,\varepsilon}(f)$, 所以

$$\varepsilon \le |f^{(n)}(z)|(1-|z|^2)^n \le \|f\|_{\mathscr{B}}.$$

从而 $d_2 \approx d_3$.

下面证明 $d_3 \approx d_4$. 由于 $1 - |\varphi_a(z)|^2 \lesssim \log \frac{1}{|\varphi_a(z)|} = g(z,a)$, 则 $d_3 \lesssim d_4$.

要证 $d_4 \lesssim d_3$, 把下面积分

$$M = \int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)} |f^{(n)}(z)|^2 (1-|z|^2)^{2n-2} g(z,a) dA(z)$$

分成两部分, 其中

$$M_1=\int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)\cap D_{1/4}}|f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}g(z,a)dA(z)$$

以及

$$M_2=\int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)\setminus D_{1/4}}|f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}g(z,a)dA(z),$$

这里 $D_{1/4}=\{z\in\mathbb{D}:|z|<\frac{1}{4}\}$.

根据下面不等式:

$$g(z,a)=\log\frac{1}{|\varphi_a(z)|}\geq\log 4\geq 1,\quad |\varphi_a(z)|\leq\frac{1}{4}$$

以及

$$g(z,a)=\log\frac{1}{|\varphi_a(z)|}\leq 4(1-|\varphi_a(z)|^2),\quad |\varphi_a(z)|\geq\frac{1}{4},$$

我们得出

$$M_2\leq 4\int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}|f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z),$$

以及

$$\begin{aligned}M_1&\leq\int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}|f^{(n)}(z)|^2(1-|z|^2)^{2n-2}g^2(z,a)dA(z)\\&\leq\|f\|_{\mathscr{B}}^2\int_{\Omega_{n,\varepsilon}(f)}(1-|z|^2)^{-2}g^2(z,a)dA(z)\\&<\infty.\end{aligned}$$

因此, $d_4\lesssim d_3$. 证毕.

定理 1.3 的证明 由于 VMOA 空间包含所有多项式, 以及多项式在 $\mathscr{B}$ 空间中得闭包是 $\mathscr{B}_0$, 且 VMOA $\subseteq\mathscr{B}_0$. 所以 $\mathscr{B}_0$ 等于 VMOA 空间在 $\mathscr{B}$ 中得闭包, 从而 (1) 和 (2) 中得两个量等价. 类似于定理 1.1 的证明可知 (2), (3), (4) 和 (5) 这几个量等价.

注 2.1 经典的 Bloch 范数意义下的闭包问题是在文献 [1] 中第一次提出, 至今是一个公开问题. 他们期待将有界解析函数空间在 $\mathscr{B}$ 范数下的闭包得到完整的刻画. 与闭包问题等价的是距离问题, 后者是考虑函数到函数空间的距离刻画, 这是从算子理论角度考虑的. 这一问题的研究是基于 Jones 的距离公式. 此后, 许多学者在这一领域做了深入的研究. 例如: Tjani 在文献 [20] 中考虑了从 Bloch 函数到小 Bloch 空间的距离. Zhao 在文献 [21] 中研究了从 Bloch 函数到 Möbius 不变函数空间的距离. 对于 Bloch 函数到其它函数空间的距离, 可以参考文 [5, 13, 15] 和 [16]. 关于更多的函数空间的闭包问题以及相关研究背景, 可以参考文 [3, 7, 8, 12, 14] 和 [18] 等.

3 应用

令 $\mathbb{D}^*$ 为扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中 $\overline{\mathbb{D}}$ 的外部. 用 $M(\mathbb{D}^*)$ 表示 Banach 空间 $L^\infty(\mathbb{D}^*)$ 中的单位球, 其元素是单位圆 $\mathbb{D}^*$ 上的 Beltrami 微分 $\mu(z)$ 且具有有限 L^∞- 范数. 对任意的 $\mu(z)\in M(\mathbb{D}^*)$, 存在唯一的一个拟共形映射 $f^\mu:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$, 其复伸缩商在 $\mathbb{D}^*$ 是 μ, 在 $\mathbb{D}$ 是零且满足正规化条件

$$f^\mu(0)=(f^\mu)'(0)-1=(f^\mu)''(0)=0.$$

对于两个 $M(\mathbb{D}^*)$ 中的 Beltrami 微分 μ_1 和 μ_2, 如果 $f^{\mu_1}|_{\mathbb{D}} = f^{\mu_2}|_{\mathbb{D}}$, 则称它们 Teichmüller 等价且表示为 $\mu_1 \sim \mu_2$. 万有 Teichmüller 空间 T 定义为

$$T = M(\mathbb{D}^*)/\sim = \{[\mu] : \mu \in M(\mathbb{D}^*)\},$$

其中 $[\mu]$ 表示 $\mu \in M(\mathbb{D}^*)$ 所对应的等价类. 在 T 上存在一个自然的完备度量 d_T, 称为 Teichmüller 度量.

对任意的 $[\mu] \in T$, 定义相对应的 Schwarzian 导数 S_μ 为

$$S_\mu(z) = S_{f^\mu|\mathbb{D}}(z) = N'_{f^\mu|\mathbb{D}}(z) - \frac{1}{2}N^2_{f^\mu|\mathbb{D}}(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

这里

$$N_{f^\mu|\mathbb{D}}(z) = (F|\mathbb{D})'(z) = (\log(f^\mu|\mathbb{D})')'(z) = \frac{(f^\mu|\mathbb{D})''(z)}{(f^\mu|\mathbb{D})'(z)}, \quad z \in \mathbb{D}$$

是 $f^\mu|\mathbb{D}$ 的 pre-Schwarz 导数.

令 Q 表示所有解析函数 $f \in H(\mathbb{D})$ 所组成空间, 其元素满足以下双曲范数条件

$$\|f\|_{hy} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|(1-|z|^2)^2 < \infty.$$

Bers 嵌入定理说明映射 $B : [\mu] \mapsto S_\mu$ 是 T 到它在 Q 中的像的同胚, 更多细节请参考文 [11].

如果对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $r > 1$ 使得 $\|\mu|_{|z|<r}\|_\infty < \epsilon$, 则称 Beltrami 微分 $\mu(z) \in M(\mathbb{D}^*)$ 在 $\mathbb{D}^*$ 的边界是消没的. 小 Teichmüller 空间定义为

$$T^0 = \{[\mu] : \mu \in M^0(\mathbb{D}^*)\},$$

其中 $M^0(\mathbb{D}^*)$ 表示所有消没的 Beltrami 微分. 它是万有 Teichmüller 空间 T 的子空间. 众所周知, $F = \log(f^\mu|\mathbb{D})' \in \mathscr{B}_0$ 当且仅当其复伸缩商 μ 属于 $M^0(\mathbb{D}^*)$, 见文 [4].

作为推论 1.4 的应用, 我们给出了小 Teichmüller 空间的等价刻画.

命题 3.1 假设 $f^\mu : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 为一个拟共形映射, 其中它在 $\mathbb{D}^*$ 上的复伸缩为 μ, 在 $\mathbb{D}$ 上的复伸缩为 0, 以及

$$f^\mu(0) = (f^\mu)'(0) - 1 = (f^\mu)''(0) = 0,$$

则下面两个条件等价.

(i) $[\mu] \in T^0$;

(ii) 对于任意 $\varepsilon > 0$, $\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(F|\mathbb{D})}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$ 是一个消失的 Carleson 测度.

证明 设 $[\mu] \in T^0$, 则 $F = \log(f^\mu|\mathbb{D})' \in \mathscr{B}_0$. 由推论 1.4 知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, $\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(F|\mathbb{D})}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$ 是一个消失的 Carleson 测度. 另一方面, 假设 $\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(F|\mathbb{D})}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$ 是一个消失的 Carleson 测度. 则由推论 1.4 知, $F = \log(f^\mu|\mathbb{D})' \in \mathscr{B}_0$. 由于 $F = \log(f^\mu|\mathbb{D})' \in \mathscr{B}_0$, 则 $[\mu] \in T^0$.

高阶 Bers 映射是由文 [6] 引入, 它是根据高阶 Schwarzian 导数定义的 [19]. 一个单叶函数 f 的高阶 Schwarzian 导数 $\sigma_n(f)$ $(n \geq 3)$ 是经典 Schwarzian 导数 S_f 的推广. 定义 $\sigma_3(f) = S_f$ 且

$$\sigma_{n+1}(f)(z) = \sigma'_n(f)(z) - (n-1)N_f(z)\sigma_n(f)(z), \quad n \geq 3.$$

命题 3.2 假设 $f^\mu : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 为一个拟共形映射, 其中它在 $\mathbb{D}^*$ 上的复伸缩为 μ, 在 $\mathbb{D}$ 上的复伸缩为 0, 以及

$$f^\mu(0) = (f^\mu)'(0) - 1 = (f^\mu)''(0) = 0.$$

如果 $[\mu]\in T^0$, 则

(a) 对于任意的 $\varepsilon>0$ 和 $n\geq 3$,

$$\lim_{|a|\to 1}\int_{\Omega_{1,\varepsilon}(F|\mathbb{D})\cup\cdots\cup\Omega_{n,\varepsilon}(F|\mathbb{D})}|\sigma_{n+1}(f^\mu|\mathbb{D})(z)|^2(1-|z|^2)^{2(n-1)}(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z)=0;$$

(b) 对于任意的 $\varepsilon>0$ 和 $n\geq 3$,

$$\lim_{|a|\to 1}\int_{\Omega_{1,\varepsilon}(F|\mathbb{D})\cup\cdots\cup\Omega_{n,,\varepsilon}(F|\mathbb{D})}|\sigma_{n+1}(f^\mu|\mathbb{D})(z)|^2(1-|z|^2)^{2(n-1)}g(z,a)dA(z)=0.$$

证明 因为 $[\mu]\in T^0$, 由命题 3.1 知, 对于任意 $\varepsilon>0$, $\chi_{\Omega_{n,\varepsilon}(F|\mathbb{D})}\frac{dA(z)}{1-|z|^2}$ 是一个消失的 Carleson 测度. 从而

$$\lim_{|a|\to 1}\int_{\Omega_{1,\varepsilon}(F|\mathbb{D})\cup\cdots\cup\Omega_{n,\varepsilon}(F|\mathbb{D})}\frac{1-|\varphi_a(z)|^2}{(1-|z|^2)^2}dA(z)=0.$$

再由

$$\|\sigma_3(f^\mu|\mathbb{D})\|_{hy}=\sup_{z\in\mathbb{D}}|\sigma_3(f^\mu|\mathbb{D})(z)|(1-|z|^2)^2<\infty$$

知

$$\lim_{|a|\to 1}\int_{\Omega_{1,\varepsilon}(F|\mathbb{D})\cup\Omega_{2,\varepsilon}(F|\mathbb{D})}|\sigma_3(f^\mu|\mathbb{D})(z)|^2(1-|z|^2)^4\frac{1-|\varphi_a(z)|^2}{(1-|z|^2)^2}dA(z)=0.$$

对于任意 $n\geq 3$, 假设

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}|\sigma_n(f^\mu|\mathbb{D})(z)|(1-|z|^2)^{n-1}<\infty.$$

因为 $\sigma_{n+1}(f^\mu|\mathbb{D})(z)=\sigma_n'(f^\mu|\mathbb{D})(z)-(n-1)N_{f^\mu|\mathbb{D}}(z)\sigma_n(f^\mu|\mathbb{D})(z)$, $n\geq 3$, 则

$$|\sigma_{n+1}(f^\mu|\mathbb{D})(z)|\leq|\sigma_n'(f^\mu|\mathbb{D})(z)|+|(n-1)N_{f^\mu|\mathbb{D}}(z)\sigma_n(f^\mu|\mathbb{D})(z)|.$$

由于 $f^\mu|\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的单叶解析函数, 由经典的偏差定理可知 $|N_{f^\mu|\mathbb{D}}(z)|(1-|z|^2)\leq 6$ (见文 [17]). 从而可得

$$\begin{aligned}|\sigma_{n+1}(f^\mu|\mathbb{D})(z)|(1-|z|^2)^n&\lesssim|\sigma_n'(f^\mu|\mathbb{D})(z)|(1-|z|^2)^n+|N_{f^\mu|\mathbb{D}}(z)\sigma_n(f^\mu|\mathbb{D})(z)|(1-|z|^2)^n\\&\lesssim|\sigma_n'(f^\mu|\mathbb{D})(z)|(1-|z|^2)^n+|\sigma_n(f^\mu|\mathbb{D})(z)|(1-|z|^2)^{n-1}\\&\lesssim\sup_{z\in\mathbb{D}}|\sigma_n(f^\mu|\mathbb{D})|(1-|z|^2)^{n-1}<\infty.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{|a|\to 1}\int_{\Omega_{1,\varepsilon}(F|\mathbb{D})\cup\cdots\cup\Omega_{n,\varepsilon}(F|\mathbb{D})}|\sigma_{n+1}(f^\mu|\mathbb{D})(z)|^2(1-|z|^2)^{2(n-1)}(1-|\varphi_a(z)|^2)dA(z)=0.$$

利用数学归纳法可知 (a) 成立.

类似与定理 1.1 的证明, 可得 $a\Leftrightarrow b$. 从而 (b) 成立. 命题得证.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Anderson J., Clunie J., Pommerenke C., On Bloch functions and normal functions, *J. Reine Angew. Math.*, 1974, **270**: 12–37.

[2] Aulaskari R., Nowak M., Zhao R., The nth derivative characterisation of Möbius invariant Dirichlet space, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1998, **58**: 43–56.

[3] Bao G., Göğüş N., On the closures of Dirichlet type spaces in the Bloch space, *Complex Anal. Oper. Theory*, 2019, **13**: 45–59.

[4] Becker J., Pommerenke C., Uber die quasikonforme Fortsetzung schlicgter Funktionen, *Math. Z.*, 1978, **161**: 69–80.

[5] Bonet J., Lusky W., Taskinen J., Distance formulas on weighted Banach spaces of analytic functions, *Complex Anal. Oper. Theory*, 2019, **13**: 893–900.

[6] Buss G., Higher Bers maps, *Asian. J. Math.*, 2012, **16**: 103–140.

[7] Galanopoulos P., Girela D., The closure of Dirichlet spaces in the Bloch space, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2019, **44**: 91–101.

[8] Galanopoulos P., Monreal N., Pau J., Closure of Hardy spaces in the Bloch space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, **429**: 1214–1221.

[9] Garnett J., Bounded Analytic Functions, Pure and Applied Mathematics, Vol. 96, Academic Press, Inc., New York, London, 1981.

[10] Ghatage P., Zheng D., Analytic functions of bounded mean oscillation and the Bloch space, *Int. Equ. Oper. Theory*, 1993, **17**: 501–515.

[11] Letho O., Univalent Functions and Teichmüller Spaces, Springer, Berlin, 2012.

[12] Liu B., Rattya J., Closure of Bergman and Dirichlet spaces in the Bloch norm, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2020, **45**: 771–783.

[13] Lou Z., Chen W., Distances from Bloch functions to QK-type spaces, *Int. Equ. Oper. Theory*, 2010, **67**: 171–181.

[14] Manhas S., Zhao R., Closures of Hardy and Hardy-Sobolev spaces in the Bloch type space on the unit ball, *Complex Anal. Oper. Theory*, 2018, **12**: 1303–1313.

[15] Pei X., Wulan H., Distance of a Bloch-type function to $QK(p, q)$ space, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2019, **64**: 1568–1581.

[16] Perfekt K., Duality and distance formulas in spaces defined by means of oscillation, *Ark. Mat.*, 2013, **51**: 345–361.

[17] Pommerenke C., Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[18] Qian R., Li S., Composition operators and closures of Dirichlet type spaces D_μ in Bloch type spaces, *Anal. Math.*, 2019, **45**: 121–132.

[19] Schippers E., Distortion theorems for higher order Schwarzian derivatives of univalent functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2000, **128**: 3241–3249.

[20] Tjani M.,Distance of a Bloch function to the little Bloch space, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2006, **74** : 101–119.

[21] Zhao R., Distances from Bloch functions to some Möbius invariant spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2008, **33**: 303–313.

[22] Zhu K., Bloch type spaces of analytic functions, *Rocky Mountain J. Math.*, 1993, **23**: 1143–1177.

[23] Zhu K., Operator Theory in Function Spaces, Second Edition, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 138, Amer. Math. Soc, Providence, 2007.