第65卷第4期 数学学报中文版 Vol.65, No.4
2022年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2022

DOI: 10.12386/A20210083 **文献标识码: A**

规范权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的本性范数

周立芳

湖州师范学院数学系 湖州 313000
E-mail: lfzhou@zjhu.edu.cn

卢　金

安徽大学互联网学院 合肥 230039
E-mail: lujin@ahu.edu.cn

摘　要　设 $1 < p < \infty$, μ 为 p-Carleson 测度, 本文证明了规范权 Bergman 空间 A^p_ω 上非紧 Toeplitz 算子 T_μ 的本性范数等于其到紧 Toeplitz 算子集合的距离. 更进一步, 本文给出了此距离可以用无限个紧 Toeplitz 算子刻画.

关键词　Bergman 空间; Toeplitz 算子; 本性范数
MR(2010) 主题分类　47B38, 47G10
中图分类　O174.5

Essential Norm of Toeplitz Operators on Bergman Spaces with Regular Weights

Li Fang ZHOU

Department of Mathematics, Huzhou University, Huzhou 313000*, P. R. China*
E-mail: *lfzhou@zjhu.edu.cn*

Jin LU

School of Internet, Anhui University, He'fei 230039*, P. R. China*
E-mail: *lujin@ahu.edu.cn*

Abstract　In this paper, for $1 < p < \infty$, we characterize that the essential norm of a noncompact Toeplitz operator T_μ with μ being a positive p-Carleson measure equals its distance to the set of compact Toeplitz operators on the Bergman space with regular weight A^p_ω. Moreover, the distance is realized by infinitely many compact Toeplitz operators.

Keywords　Bergman spaces; Toeplitz operators; essential norm
MR(2010) Subject Classification　47B38, 47G10
Chinese Library Classification　O174.5

收稿日期: 2019-09-29; 接受日期: 2021-05-13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11801172, 11971165); 浙江省自然科学基金资助项目 (LY20A010007)
通讯作者: 卢金

1 引言

设 ω 为径向权, 若 $\widehat{\omega}(z)=\int_{|z|}^1\omega(s)ds$ 满足 doubling 条件: $\widehat{\omega}(r)\le C\widehat{\omega}(\frac{1+r}{2})$, 则称这个径向权 ω 属于 $\widehat{\mathscr{D}}$ 类. 进一步, 如果 $\omega(r)$ 的大小跟在区间 $(r,1)$ 上积分平均等价, 即

$$\omega(r)\asymp\frac{\int_r^1\omega(s)ds}{1-r},\quad 0\le r<1,$$

那么称径向权 $\omega\in\widehat{\mathscr{D}}$ 是规范的, 记为 $\omega\in\mathscr{R}$.

设 $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ 为单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 上的解析函数空间. 对于 $0<p<\infty$ 和 $\mathbb{D}$ 上非负可积函数 ω, 定义 L^p_ω 为所有 Lebesgue 可积函数的全体:

$$\|f\|^p_{L^p_\omega}:=\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p\omega(z)dA(z)<+\infty,$$

这里 $dA(z)=\frac{dxdy}{\pi}$ 是 $\mathbb{D}$ 上正规化的 Lebesgue 面积测度. 当 f 是 $\mathbb{D}$ 上解析函数时, 记为规范权 Bergman 空间 A^p_ω, 它是 L^p_ω 的闭子空间, f 在 A^p_ω 上的范数记为 $\|f\|_p$. 通常情况下, A^p_α 表示径向权 $(1-|z|^2)^\alpha$ 加权 Bergman 空间 [10, 11]. 对于每个径向权 ω, A^2_ω 上的范数收敛即在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛, Hilbert 空间 A^2_ω 是 L^2_ω 的闭子空间, 且有从 L^2_ω 到 A^2_ω 的正交 Bergman 投影 P_ω:

$$P_\omega(f)(z)=\int_{\mathbb{D}}f(\zeta)\overline{B^\omega_z(\zeta)}\omega(\zeta)dA(\zeta),\tag{1.1}$$

这里 B^ω_z 是 A^2_ω 的再生核.

因 ω 是径向权且在 $[0,1)$ 上可积, 当 $0<p<\infty$ 时, 在 A^p_ω- 范数下, 多项式在 A^p_ω 中是稠密的 [3, 8], 且 $\{z^m/\|z^m\|_2\}_{m=0}^\infty$ 是 A^2_ω 的正交基, 则

$$B^\omega_z(\xi)=\sum_{m=0}^\infty\frac{(\xi\overline{z})^m}{\|z^m\|_2^2}.$$

因此, 对于 $\mathbb{D}$ 中固定点 z, $B^\omega_z(\cdot)$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上解析且有界. 那么根据 (1.1) 式, 积分算子 P_ω 可以拓展到 L^p_ω, $1\le p<\infty$. 对于 $\mathbb{D}$ 上的正 Borel 测度 μ, 由 μ 诱导的 Toeplitz 算子

$$T_\mu(f)(z)=\int_{\mathbb{D}}f(\zeta)\overline{B^\omega_z(\zeta)}d\mu(\zeta).$$

如果恒等算子 $\mathrm{Id}:A^p_\omega\to L^p_\mu$ 是有界的, 那么称 μ 是 A^p_ω 上的 p-Carleson 测度, 即存在常数 C, 使得对所有的 $f\in A^p_\omega$, 有

$$\left(\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^pd\mu(z)\right)^{\frac{1}{p}}\le C\|f\|_p.$$

记 X 是具有范数 $\|\cdot\|$ 的 Banach 空间, $\mathscr{L}(X)$ 是 X 上所有有界算子构成的集合, $\mathscr{K}(X)$ 是 X 上所有紧算子构成的集合, $\mathscr{K}(X)$ 是 $\mathscr{L}(X)$ 的子集. 给定 $T\in\mathscr{L}(X)$, 算子 T 的本性范数定义为:

$$\|T\|_e=\inf\{\|T-K\|:K\in\mathscr{K}(X)\},$$

任意 $f\in X$, 如果 $\mathscr{L}(X)$ 里的一列有界算子 $\{T_n\}$, 当 $n\to\infty$ 时 $\|(T_n-T)f\|\to 0$, 那么称 $\{T_n\}$ 强算子拓扑收敛到 T, 记作 $T_n\to T$ (SOT) (见文 [1, 6]). 下面介绍基本不等式的相关概念 [1].

定义 1.1 如果对每一个 $T\in\mathscr{L}(X)$ 和每一列 $\{B_n\}\subset\mathscr{L}(X)$ 满足 $B_n\to 0$ (SOT) 和 $B_n^*\to 0$ (SOT), 都有以下成立: 任意 $\varepsilon>0$ 存在一个 n, 使得

$$\|T+B_n\|\le\varepsilon+\max(\|T\|,\|T\|_e+\|B_n\|),$$

则称 Banach 空间 X 满足基本不等式.

1979 年, Axler 等人 [1] 给出了一种生成某种形式紧算子的方法, 同时给出 l^p 满足基本不等式, 但是当 $p\neq 2$ 时 L^p 不满足基本不等式. 2013 年, 文 [4] 刻画了单位圆盘加权 Bergman 空间 A^2_α 上非紧 Toeplitz 算子 $T_f(f\in L^\infty)$ 本性范数等于其到某无限个紧 Toeplitz 算子构成集合的距离. 本文利用基本不等式, 给出了规范权 Bergman 空间 A^p_ω 上非紧 Toeplitz 算子 T_μ 本性范数等于其到紧 Toeplitz 算子集合的距离, 其中 $1<p<\infty$, μ 为 p-Carleson 测度. 更进一步, 此距离可以用无限个紧 Toeplitz 算子刻画.

本文中, 符号 C 表示与所讨论的变量无关的正常数, 且每次出现数值未必相同. 给定的两个量 A 和 B, 如果存在正常数 C, 满足 $A\leq CB$, 则记为 $A\lesssim B$, 如果 $A\lesssim B\lesssim A$, 则称 A 和 B 等价. 若非特殊说明, 文中第 2, 3 节只讨论 A^p_ω 指标 $1<p<\infty$ 的情况.

2 A^p_ω 满足基本不等式

设 $\beta(z,\xi)=\frac{1}{2}\log(\frac{1+|\varphi_z(\xi)|}{1-|\varphi_z(\xi)|})$ 是 $\mathbb{D}$ 上的 Bergman 度量, 其中 $\varphi_z(\xi)=\frac{\xi-z}{1-\bar{z}\xi}$. 对任意 $z\in\mathbb{D}$ 和实数 $r>0$, $D(z,r)=\{w\in\mathbb{D}:\beta(z,w)<r\}$ 表示以 z 为中心 r 为半径的 Bergman 圆盘.

函数空间上乘法算子 M 定义为 $M_gf=gf$, 其中 g 是一个 Lebesgue 可测函数. 若 $E\subset\mathbb{D}$ 是一个可测集, 记 χ_E 为集合 E 的特征函数. 对于 $S>0$, 我们把 $\chi_{D(0,S)}$ 和 M_{χ_S} 分别简写为 χ_S 和 M_S. 同时记 $N_S=\mathrm{Id}-M_S$, 这里 Id 为恒等算子.

引理 2.1 设 $\omega\in\mathscr{R}$, $1<p<\infty$. 一个子集 $E\subset A^p_\omega$ 是相对紧的当且仅当对于所有 $\varepsilon>0$ 存在某个实数 $S>0$, 使得

$$\sup_{f\in E}\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,S)}|f(z)|^p\omega(z)dA(z)<\varepsilon. \tag{2.1}$$

证明 若 E 是相对紧的. 通过文 [5, 定理 3.8] 知 E 是完全有界的. 这就说明, 对所有 $\varepsilon>0$, 存在有限个函数 $f_1,f_2,\dots,f_n\in E$ 满足

$$\min_{j=1,2,\dots,n}\int_{\mathbb{D}}|f(z)-f_j(z)|^p\omega(z)dA(z)<\frac{\varepsilon}{2},\quad\forall f\in E.$$

对于此时的 ε 存在某个 $S>0$,

$$\max_{j=1,2,\dots,n}\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,S)}|f_j(z)|^p\omega(z)dA(z)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,S)}|f(z)|^p\omega(z)dA(z)\\&\quad<2^p\bigg(\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,S)}|f(z)-f_j(z)|^p\omega(z)dA(z)+\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,S)}|f_j(z)|^p\omega(z)dA(z)\bigg)\\&\quad<2^p\varepsilon.\end{aligned}$$

这样就证明了 (2.1).

反之, 若 E 满足 (2.1). 由文 [5, 定理 3.8] 知, 如果能证明 E 是序列紧的, 就表明 E 是相对紧的. 取定 $\varepsilon=1$, 那么存在 S_1 满足

$$\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,S_1)}|f(z)|^p\omega(z)dA(z)<1.$$

记 $M_p^p(f,r):=\int_{|\xi|=1}|f(r\xi)|^p d\xi$. 因 $M_p^p(f,r)$ 是关于变量 r 单调增加的, 那么对于所有 $f\in E$,有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p\omega(z)dA(z)&=\int_{D(0,S_1)}|f(z)|^p\omega(z)dA(z)+\int_{\mathbb{D}\backslash D(0,S_1)}|f(z)|^p\omega(z)dA(z)\\&\leq CM_p^p(f,S_1)+\int_{\mathbb{D}\backslash D(0,S_1)}|f(z)|^p\omega(z)dA(z)\\&\leq C\int_{D(0,S_1+1)\backslash D(0,S_1)}|f(z)|^p\omega(z)dA(z)+\int_{\mathbb{D}\backslash D(0,S_1)}|f(z)|^p\omega(z)dA(z)\\&\leq C\int_{\mathbb{D}\backslash D(0,S_1)}|f(z)|^p\omega(z)dA(z)\leq C,\end{aligned}$$

这里常数 C 只与 S_1 和 ω 相关. 那么 E 在 A_ω^p 中有界.

令 $\{g_k\}\subset E$, $\{g_k\}$ 是正规族, 存在某个子列 $\{g_{k_j}\}$ 和解析函数 g 满足

$$\lim_{j\to\infty}g_{k_j}(z)=g(z),\quad z\in\mathbb{D}.$$

上式在 $\mathbb{D}$ 的任意紧子集上一致成立, 因此由 Fatou 引理和 (2.1) 可知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在实数 $S>0$ 满足

$$\int_{\mathbb{D}\backslash D(0,S)}|g(z)|^p\omega(z)dA(z)\leq\varepsilon.$$

当 j 足够大时,

$$\begin{aligned}\|g_{k_j}-g\|_p^p&=\int_{D(0,S)}|g_{k_j}(z)-g(z)|^p\omega(z)dA(z)+\int_{\mathbb{D}\backslash D(0,S)}|g_{k_j}(z)-g(z)|^p\omega(z)dA(z)\\&\leq\int_{D(0,S)}|g_{k_j}(z)-g(z)|^p\omega(z)dA(z)\\&\quad+2^p\Big(\int_{\mathbb{D}\backslash D(0,S)}|g(z)|^p\omega(z)dA(z)+\int_{\mathbb{D}\backslash D(0,S)}|g_{k_j}(z)|^p\omega(z)dA(z)\Big)\\&\leq(2^{p+1}+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明集合 E 是序列紧的, 引理证明完毕.

引理 2.2 设 $\omega\in\mathscr{R}$. 若 t 是固定正数, 那么

$$\sup_{\zeta\in D(0,t)}|B_z^\omega(\zeta)\omega(\zeta)|\lesssim C.$$

证明 因为

$$B_z^\omega(\zeta)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\zeta\bar{z})^n}{\|z^n\|_2^2},\quad\forall\, z,\zeta\in\mathbb{D}.$$

由文 [7, 引理 6] 知

$$\sup_{\zeta\in D(0,t)}|B_z^\omega(\zeta)\omega(\zeta)|\leq\sup_{\zeta\in D(0,t)}\omega(\zeta)\sum_{n=0}^\infty\frac{|\zeta|^n}{\|z^n\|_2^2}\lesssim\sup_{\zeta\in D(0,t)}\frac{\omega(\zeta)}{\omega(\zeta)(1-|\zeta|)^2}\leq C.$$

证毕.

引理 2.3 设 $\omega\in\mathscr{R}$, 且 P_t 算子定义为:

$$P_tf(z)=\int_{D(0,t)}f(\zeta)\overline{B_z^\omega(\zeta)}\omega(\zeta)dA(\zeta),\quad z\in\mathbb{D},$$

这里 $t>0$ 是任意正数. 若 $1\le p<\infty$, 那么 P_t 是 $L^p_\omega(D(0,t))$ 到 A^p_ω 的紧算子, 其中 $L^p_\omega(D(0,t))$ 是 Lebesgue 空间.

证明 该引理只需要证明 $\{P_tf:\|f\|_{L^p_\omega(D(0,t))}<1\}$ 是相对紧的即可. 由引理 2.1, 表明

$$\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,S)}\left|P_tf(z)\right|^p\omega(z)dA(z)\to 0.$$

事实上, 由引理 2.2, 对任意 $f\in L^p_\omega(D(0,t))$ 满足 $\|f\|_{L^p_\omega(D(0,t))}\le 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|P_tf(z)\right| &\le \int_{D(0,t)}\left|B^\omega_z(\zeta)f(\zeta)\omega(\zeta)\right|dA(\zeta)\\ &\le \|f\|_{L^1(D(0,t))}\sup_{\zeta\in D(0,t)}\left|B^\omega_z(\zeta)\omega(\zeta)\right|\\ &\le C\sup_{\zeta\in D(0,t)}\left|B^\omega_z(\zeta)\omega(\zeta)\right|\le C,\end{aligned}$$

这里常数 C 只与 ω,p,t 相关. 因此, 当 $S\to+\infty$ 时,

$$\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,S)}\left|P_tf(z)\right|^p\omega(z)dA(z)\lesssim C\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,S)}w(z)dA(z)\to 0.$$

证毕.

引理 2.4 设 $\{B_n\}\subset\mathscr{L}(A^p_\omega)$. 若 $B_n\to 0$ (SOT), $B_n^*\to 0$ (SOT), 那么, 对固定的 $S>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\|f\|_p\le 1}\|M_SB_nf\|_p=0.$$

证明 记 q 是 p 的共轭指标, 即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 由文 [9, 推论 7], 即知 $(A^p_\omega)^*\simeq A^q_\omega$. 因为 $B_n\to 0$ (SOT), $B_n^*\to 0$ (SOT), 那么由 Banach–Steinhaus 定理可知, 存在常数 c_0 满足:

$$\|B_n\|_{A^p_\omega\to A^p_\omega}<c_0,\quad \|B_n^*\|_{A^q_\omega\to A^q_\omega}<c_0,\quad n=1,2,\dots. \tag{2.2}$$

又

$$\|M_SB_nf\|_p=\sup_{g\in L^q_\omega,\,\|g\|_q=1}\left|\langle M_SB_nf,g\rangle\right|. \tag{2.3}$$

因为

$$\begin{aligned}|\langle M_SB_nf,g\rangle|&=|\langle B_nf,M_Sg\rangle|=|\langle B_nf,PM_Sg\rangle|=|\langle f,B_n^*PM_Sg\rangle|\\ &\le\|f\|_p\|B_n^*PM_Sg\|_q=\|f\|_p\|B_n^*P_SM_Sg\|_q,\end{aligned}$$

且

$$\|M_Sg\|_{L^q_\omega(D(0,S))}\le C\|M_Sg\|_q\le C\|g\|_q,$$

结合 (2.3) 得到

$$\|M_SB_nf\|_p\le C\|f\|_p\sup_{g\in L^q_\omega,\|g\|_q\le 1}\|B_n^*P_S(M_Sg)\|_q\le C\|f\|_p\sup_{\|g\|_{L^q_\omega(D(0,S))}\le 1}\|B_n^*P_Sg\|_q. \tag{2.4}$$

由引理 2.3, $\{P_Sg:\|g\|_{L^q_\omega(D(0,S))}<1\}$ 是相对紧的.

于是, 任意 $\varepsilon>0$, 存在一个有限函数构成的集合 $\{h_1,\dots,h_N\}\subset A^q_\omega$, 且满足 $\{h_1,\dots,h_N\}$ 是 A^q_ω 范数下 $\{P_Sg:\|g\|_{L^q_\omega(D(0,S))}<1\}$ 的 $\varepsilon/2c_0$- 网, 当 g 取变量在 $L^q_\omega(D(0,S))$ 的单位球里时, 存在 j_0, $1\le j_0\le N$, 满足

$$\|P_Sg-h_{j_0}\|_q<\frac{\varepsilon}{2c_0}.$$

另一方面, 再次利用假设 $B_n^* \to 0$ (SOT), 这表明当 n 足够大时,

$$\|B_n^* h_j\|_q < \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, \dots, N.$$

因此, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}\|B_n^* P_S g\|_q &\le \|B_n^*(P_S g - h_{j_0})\|_q + \|B_n^* h_{j_0}\|_q \le \|B_n^*\|_{A_\omega^q \to A_\omega^q} \|P_S g - h_{j_0}\|_q + \|B_n^* h_{j_0}\|_q \\ &\le \|B_n^*\|_{A_\omega^q \to A_\omega^q} \cdot \frac{\varepsilon}{2c_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

结合上式和 (2.4) 得到结论. 引理证毕.

引理 2.5 设 $T \in \mathscr{L}(A_\omega^p)$, 那么

$$\limsup_{S \to \infty} \|N_S T\|_{A_\omega^p \to L_\omega^p} \le \|T\|_e.$$

证明 设 K 是 A_ω^p 上的紧算子. 由引理 2.1 可知当 $S \to \infty$ 时, 有

$$\|N_S K\|_{A_\omega^p \to A_\omega^p} = \sup_{\|f\|_p = 1} \|N_S K f\|_p^p = \sup_{\|f\|_p = 1} \int_{\mathbb{D} \setminus D(0,S)} |Kf(z)|^p \, \omega(z) dA(z) \to 0.$$

由 $T \in \mathscr{L}(A_\omega^p)$, 我们得到

$$\|T - K\|_{A_\omega^p \to A_\omega^p} \ge \|N_S(T - K)\|_{A_\omega^p \to L_\omega^p} \ge \|N_S T\|_{A_\omega^p \to L_\omega^p} - \|N_S K\|_{A_\omega^p \to L_\omega^p}.$$

这表明

$$|N_S T\|_{A_\omega^p \to L_\omega^p} \le \|N_S K\|_{A_\omega^p \to L_\omega^p} + \|T - K\|_{A_\omega^p \to A_\omega^p}. \tag{2.5}$$

那么, 由不等式 (2.5) 和 K 的任意性得到结论. 引理证毕.

引理 2.6 设 $T \in \mathscr{L}(A_\omega^p)$, 且 $\{f_n\}$ 在 A_ω^p 上弱收敛到 0. 那么

$$\lim_{n \to \infty} \|M_S T f_n\|_p = 0$$

对任意 $S > 0$ 成立.

证明 因为 $\{f_n\}$ 弱收敛到 0 且 T 在 A_ω^p 上有界, 显然 Tf_n 弱收敛到当 0. $1 < p < \infty$, 一般地, Tf_n 在 A_ω^p 上弱收敛到 0, 当且仅当 $\|Tf_n\|_p$ 有界且任意紧子集 $E \subset \mathbb{D}$ 上 $Tf_n(z)$ 一致收敛到 0. 这就证明了引理.

接下来给出本节主要定理及其推论, 它是获得本文主要结果的关键步骤. 该定理的证明采用了文 [1, 定理 2] 的类似思想.

定理 2.7 当 $1 < p < \infty$ 时, A_ω^p 满足基本不等式.

证明 设 $T \in \mathscr{L}(A_\omega^p)$, $\{B_n\} \subset \mathscr{L}(A_\omega^p)$ 满足

$$B_n \to 0 \text{ (SOT)}, \quad B_n^* \to 0 \text{ (SOT)}.$$

令 $\alpha_n = \max\{\|T\|_{A_\omega^p \to A_\omega^p}, \|T\|_e + \|B_n\|_{A_\omega^p \to A_\omega^p}\}$. 反设如果 A_ω^p 不满足基本不等式, 那么存在非负实数 ε 和一列单位向量 $\{f_n\} \subset A_\omega^p$ 满足

$$\|(T + B_n) f_n\|_p > \varepsilon + \alpha_n. \tag{2.6}$$

因为

$$0 \le \alpha_n \le \|T\|_{A_\omega^p \to A_\omega^p} + \|T\|_e + c_0 < \infty,$$

那么对于固定的 $\delta > 0$ 我们有

$$(\alpha_n + \delta)[(1 + 2\delta)^p + 2\delta^p]^{\frac{1}{p}} + 4\delta < \alpha_n + \varepsilon \tag{2.7}$$

对所有非负整数 $n=1,2,\dots$ 都成立.

由 Banach–Alaoglu 定理 [4] 可知, $A^p_\omega(\varphi)$ 空间闭单位球 $\overline{\mathscr{B}_p}$ 是弱紧的, 这样可以找到一列弱收敛的函数列 $\{f_n\}$. 不失一般性, 我们假设 $\{f_n\}$ 弱收敛到 $f\in\overline{\mathscr{B}_p}$, 且令 $h_n=f_n-f$. 那么 h_n 弱收敛到 0. 于是

$$\begin{aligned}\|(T+B_n)f_n\|_p&=\|(M_S+N_S)(T+B_n)f_n\|_p=\|M_S(T+B_n)f_n+N_S(T+B_n)f_n\|_p\\&\le\|M_STh_n\|_p+\|M_SB_nf_n\|_p+\|N_STf\|_p\\&\quad+\|N_SB_nf\|_p+\|M_STf+N_S(T+B_n)h_n\|_p.\end{aligned}\tag{2.8}$$

首先, 给出下面四条性质:

(1) $\|M_STh_n\|_p<\delta$, 对充分大的 n 成立, 这是根据引理 2.6 和 h_n 弱收敛到 0.

(2) $\|M_SB_nf_n\|_p<\delta$, 对固定的 δ 和 S 成立, 这是根据引理 2.4 和 n 充分大.

(3) $\|N_STf\|_p<\delta$, 对某个充分大的 S 成立.

(4) $\|N_SB_nf\|_p<\delta$, 这是因为 $\|N_SB_nf\|_p<\|B_nf\|_p$ 和 $B_n\to0$ (SOT),

那么

$$\|(T+B_n)f_n\|_p\le\|M_STf+N_S(T+B_n)h_n\|_p+4\delta.\tag{2.9}$$

因为 M_STf 和 $N_S(T+A_n)h_n$ 是 A^p_ω 中不相交的向量, 于是我们有

$$\begin{aligned}\|M_STf+N_S(T+B_n)h_n\|_p^p&=\|M_STf\|_p^p+\|N_S(T+B_n)h_n\|_p^p\\&\le\|T\|^p_{A^p_\omega\to A^p_\omega}\|f\|_p^p+(\|N_ST\|_{A^p_\omega\to L^p_\omega}+\|B_n\|_{A^p_\omega\to A^p_\omega})^p\|h_n\|_p^p\\&\le\alpha_n^p\|f\|_p^p+(\|T\|_e+\delta+\|B_n\|_{A^p_\omega\to A^p_\omega})^p\|h_n\|_p^p\\&\le(\alpha_n+\delta)^p(\|f\|_p^p+\|h_n\|_p^p).\end{aligned}\tag{2.10}$$

依据 h_n 弱收敛到 0, 对于充分大的 n 有 $\|M_Sh_n\|<\delta$. 这就表明

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p+\|h_n\|_p^p&=\|M_Sf\|_p^p+\|M_Sh_n\|_p^p+\|N_Sf\|_p^p+\|N_Sh_n\|_p^p\\&\le\|M_Sf\|_p^p+\|N_Sh_n\|_p^p+2\delta^p\\&=\|M_Sf+N_Sh_n\|_p^p+2\delta^p\\&=\|f-N_Sf+h_n-M_Sh_n\|_p^p+2\delta^p\\&\le(\|f_n\|_p+\|N_Sf\|_p+\|M_Sh_n\|_p)^p+2\delta^p\\&\le(1+2\delta)^p+2\delta^p.\end{aligned}\tag{2.11}$$

结合 (2.10) 和 (2.11), 得到

$$\|M_STf+N_S(T+B_n)h_n\|_p^p\le(\alpha_n+\delta)^p[(1+2\delta)^p+2\delta^p].\tag{2.12}$$

于是, 通过 (2.8), (2.9) 和 (2.12), 我们得到

$$\|(T+B_n)f_n\|_p\le(\alpha_n+\delta)[(1+2\delta)^p+2\delta^p]^{\frac{1}{p}}+4\delta\tag{2.13}$$

对充分大的 n 成立. 通过 (2.13) 和 (2.7), 这与 (2.6) 矛盾. 假设不成立, 定理证毕.

通过定理 2.7 可以得到下面推论, 证明方法与文 [1, 定理 1] 的证明类似.

推论 2.8 设 $T \in \mathscr{L}(A^p_\omega) \setminus \mathscr{K}(A^p_\omega)$, $\{T_n\} \subset \mathscr{K}(A^p_\omega)$ 是一列紧算子满足 $T_n \to T$ (SOT) 和 $T_n^* \to T^*$ (SOT). 那么存在一列非负实数 $\{a_n\}$, 使得 $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$, $K = \sum_{n=1}^\infty a_n T_n \in \mathscr{K}(A^p_\omega)$, 且

$$\|T - K\|_{A^p_\omega \to A^p_\omega} = \|T\|_e.$$

3 A^p_ω 上 Toeplitz 算子的本性范数

我们知道, 任意 $z \in \mathbb{D}$ 和 $r > 0$, 给定 $\mathbb{D}$ 上正 Borel 测度 μ, $D(z,r)$ 上 μ 的平均 $\widehat{\mu}_r$ 记为 $\frac{\mu(D(z,r))}{\omega(D(z,r))}$, 这里 $\omega(D(z,r)) = \int_{D(z,r)} \omega(\varsigma) dA(\varsigma)$.

引理 3.1 设 $1 < p < \infty$, 那么存在常数 C 满足

$$|f(z)|^p \leq \frac{C}{\omega(D(z,1))} \int_{D(z,1)} |f(\varsigma)|^p \omega(\varsigma) dA(\varsigma).$$

证明 由文 [8, 引理 2.5] 即得. 证毕.

下面的引理 3.2 是文 [7, 定理 1].

引理 3.2 设 $\mu \geq 0$ 是 $\mathbb{D}$ 上的一个正 Borel 测度. 那么 Toeplitz 算子 T_μ 在 A^p_ω 上有界, 当且仅当 μ 是一个 p-Carleson 测度; T_μ 是 A^p_ω 上的紧算子当且仅当 μ 是一个消失的 p-Carleson 测度. 进一步, 当 μ 是 p-Carleson 测度时,

$$\|T_\mu\| \simeq \sup_{z \in \mathbb{D}} \widehat{\mu}_r(z)$$

对某一个 (或者任意) 固定 $r > 0$ 成立.

记 $\mathbb{N}$ 是正整数集合. 给定 $\mathbb{D}$ 上正 Borel 测度 μ 满足 p-Carleson 性质, 对于 $m \in \mathbb{N}$ 定义 $\mu_n(E) = \mu(E \cap D(0,n))$. 对所有 z, $z \notin D(0, n-1)$, 我们有

$$\mu_n(D(z,1)) = 0.$$

于是, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, T_{μ_n} 在 A^p_ω 上是紧的.

引理 3.3 若 μ 是一个 p-Carleson 测度, 那么存在某个常数 $C > 0$, 对所有 $f \in H(\mathbb{D})$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 成立

$$\int_{\mathbb{D} \setminus D(0,n)} |f(z)|^p d\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{D} \setminus D(0,n-1)} |f(z)|^p \omega(\varsigma) \hat{\mu}_1(z) dA(z).$$

证明 因为规范权 $\omega \in \mathscr{R}$, 由文献 [7, (2.2) 式] 表明 $\omega(D(z,1)) \asymp \omega(D(\varsigma,1))$, 这里等价的常数只和 ω 相关. 由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D} \setminus D(0,n)} |f(z)| d\mu(z) &\leq C \int_{\mathbb{D} \setminus D(0,n)} \frac{1}{\omega(D(z,1))} \int_{D(z,1)} |f(\varsigma)| \omega(\varsigma) dA(\varsigma) d\mu(z) \\
&\leq C \int_{\mathbb{D} \setminus D(0,n)} \frac{1}{\omega(D(z,1))} d\mu(z) \int_{\mathbb{D}} |f(\varsigma) \chi_{D(z,1)}| \omega(\varsigma) dA(\varsigma) \\
&\lesssim C \int_{\mathbb{D} \setminus D(0,n-1)} \frac{1}{\omega(D(\varsigma,1))} |f(\varsigma)| \omega(\varsigma) dA(\varsigma) \int_{\mathbb{D}} \chi_{D(\varsigma,1)} d\mu(z) \\
&\leq C \int_{\mathbb{D} \setminus D(0,n-1)} |f(\varsigma)| \omega(\varsigma) \hat{\mu}_1(\varsigma) dA(\varsigma).
\end{aligned}$$

这就证明了引理.

定理 3.4 设 $1 < p < \infty$. 正 Borel 测度 μ 满足 p-Carleson 性质, 且 T_μ 是 A^p_ω 上非紧的 Toeplitz 算子. 那么, 在 A^p_ω 上存在无穷多个不同的紧 Toeplitz 算子 T_ϕ, 满足

$$\|T_\mu - T_\phi\|_{A^p_\omega \to A^p_\omega} = \|T_\mu\|_e.$$

证明 首先证明 T_{μ_n} 以强算子拓扑收敛到 T_μ. 为此, 定义辅助的线性算子 T:

$$Tf(z) = \int_{\mathbb{D}} |B^\omega_z(\varsigma)|\,|f(\varsigma)|\omega(\varsigma)dA(\varsigma).$$

对于 $\omega \in \mathscr{R}$, 文 [9, 定理 5] 表明 $T : L^p_\omega \to L^p_\omega$ 是有界的. 这就说明, 当 $1 < p < \infty$ 时, 有

$$\|T\|_{L^p_\omega \to L^p_\omega} < +\infty. \tag{3.1}$$

任意 $f \in A^p_\omega$, 由式 (3.1) 和引理 3.3, 当 $n \to \infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\|(T_{\mu_n} - T_\mu)f\|_p^p &= \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}\setminus D(0,n)} B^\omega_z(\varsigma) f(z) d\mu(z) \right|^p \omega(\varsigma)dA(\varsigma) \\
&\le C \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,n)} |B^\omega_z(\varsigma) f(z)| d\mu(z) \right)^p \omega(\varsigma)dA(\varsigma) \\
&\le C \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,n-1)} |B^\omega_z(\varsigma) f(z)|\, \omega(z)\, \widehat{|\mu|}_1(z) dA(z) \right)^p \omega(\varsigma)dA(\varsigma) \\
&\le C\|\widehat{|\mu|}_1\|_\infty^p \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,n-1)} |B^\omega_z(\varsigma) f(z)| \omega(z) dA(z) \right)^p \omega(\varsigma)dA(\varsigma) \\
&= C\|\widehat{|\mu|}_1\|_\infty^p \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} |B^\omega_z(\varsigma) f(z) \chi_{\mathbb{D}\setminus D(0,n-1)}(z)| \omega(z) dA(z) \right)^p \omega(\varsigma)dA(\varsigma) \\
&= \|\widehat{|\mu|}_1\|_\infty^p \|TM_{\chi_{\mathbb{D}\setminus D(0,n-1)}} |f|\,\|_{p,}^p \\
&\le C\|\widehat{|\mu|}_1\|_\infty^p \|M_{\chi_{\mathbb{D}\setminus D(0,n-1)}} |f|\,\|_{p,}^p \\
&= C\|\widehat{|\mu|}_1\|_\infty^p \int_{\mathbb{D}\setminus D(0,n-1)} |f(z)|^p \omega(z) dA(z) \to 0.
\end{aligned}$$

因为 μ 是一个 Borel 测度, 上面不等式表明 $T_{\mu_n} \to T_\mu$ (SOT). μ_n 的支撑在 $\mathbb{D}$ 上是紧的, 于是 A^p_ω 上 T_{μ_n} 是紧的. $A^{p}_\omega{}^* \simeq A^q_\omega$, 这就容易验证

$$T^*_{\mu_n} \to T^*_\mu \quad \text{(SOT)}.$$

对于任意非负实数列 $\{a_n\}$ 且满足 $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$, 我们将证明 $\sum_{n=1}^\infty a_n T_{\mu_n}$ 以算子范数收敛且极限依然是 A^p_ω 上的紧 Toeplitz 算子. 事实上, 由 $T_{\mu_n} \to T_\mu$ (SOT) 和一致有界原理得到 $\{\|T_{\mu_n}\|\}$ 是有界的. 那么当 $k \to \infty$ 时,

$$\sum_{n=k}^\infty a_n \|T_{\mu_n}\| \le C \sum_{n=k}^\infty a_n \to 0.$$

这表明 $K = \sum_{n=1}^\infty a_n T_{\mu_n}$ 以算子范数收敛且是紧的. 于是

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \|T_{\mu_n}\|_{A^p_\omega \to A^p_\omega} \le C\|\widehat{|\mu|_r}\|_\infty \sum_{n=1}^\infty a_n = C\|\widehat{|\mu|_r}\|_\infty < \infty.$$

又因为在算子范数下

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N a_n T_{\mu_n} = \lim_{M\to\infty} T_{\sum_{n=1}^M a_n \mu_n} = T_{\sum_{n=1}^\infty a_n \mu_n}.$$

令 $\psi_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu_n$. 我们知道 $T_{\psi_1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nT_{\mu_n}$ 是 A^p_ω 上一个紧的 Toeplitz 算子. 由推论 2.8, 得到

$$\|T_\mu-T_{\psi_1}\|_{A^p_\omega\to A^p_\omega}=\|T_\mu\|_e.$$

更进一步, 可以看出 $T_{\mu_n}-T_{\psi_1}\to T_\mu-T_{\psi_1}(\mathrm{SOT})$, $(T_{\mu_n}-T_{\psi_1})^*\to(T_\mu-T_{\psi_1})^*(\mathrm{SOT})$. 同时, $T_\mu-T_{\psi_1}\neq 0$, 这是因为 T_μ 是非紧的. 由 $\mathscr{L}(A^p_\omega)$ 是一个 Banach 空间, 固定 $\mathscr{O}$ 是强算子拓扑下 $T_\mu-T_{\psi_1}$ 的凸邻域, 其闭包不包含 0. 通过删除有限项, 对于所有的 n, 我们可以设 $T_{\mu_n}-T_{\psi_1}\in\mathscr{O}$. 由推论 2.8, 存在一列非负实数 $\{b_n\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=1$ 和

$$\|(T_\mu-T_{\psi_1})-K\|_{A^p_\omega\to A^p_\omega}=\|T_\mu-T_{\psi_1}\|_e=\|T_\mu\|_e,$$

这里 $K=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(T_{\mu_n}-T_{\psi_1})=(\sum_{n=1}^{\infty}b_nT_{\mu_n})-T_{\psi_1}$. 于是

$$T_{\psi_2}:=T_{\psi_1}+K=\sum_{n=1}^{\infty}b_nT_{\mu_n}$$

也是逼近 T_μ 的一列紧算子. 因 K 是 $\{T_\mu-T_{\psi_1}\}\subset\mathscr{O}$ 的一个无限的凸组合, 得到 $K\neq 0$. 于是 $T_{\psi_1}\neq T_{\psi_2}$. 对于 $s\in[0,1]$, 定义 $\psi=s\psi_1+(1-s)\psi_2$. 这样, 我们就有无限个 Toeplitz 算子 T_ψ 满足

$$\|T_\mu-T_\psi\|_{A^p_\omega\to A^p_\omega}=\|T_\mu\|_e.$$

定理 3.4 证毕.

参 考 文 献

[1] Axler S., Berg I. D., Jewell N., Shields A., Approximation by compact operators and the space $H^\infty+C$, *Ann. Math.*, 1979, **109**: 601–612.

[2] Axler S., Jewll N., Shields A., The essential norm of an operator and its adjoint, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1981, **261**(1): 159–167.

[3] Duren P. L., Schuster A. P., Bergman Spaces, Mathematical Surveys and Monographs, Vol.100, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[4] Rudin W., Functional Analysis, Second Edition, International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[5] Lang S., Real and Functional Analysis, GTM 142, 3rd Edn., Springer, New York, 1993.

[6] Li F. Y., Essential norm of Toeplitz operators and Hankel operators on the weighted Bergman space, *Integr. Equ. Oper. Theory*, 2012, **75**: 517–525.

[7] Peláez J., Rättyä J., Sierra K., Berezin transform and Toeplitz operators on weighted Bergman spaces induced by regular weights, *J. Geom. Anal.*, 2018, **28**: 656–687.

[8] Peláez J. A., Rättyä J., Weighted Bergman spaces induced by rapidly increasing weights, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2014, **227**: 1066.

[9] Peláez J. A., Rättyä J., Two weight inequality for Bergman projection, *J. Math. Pures Appl.*, 2016, **105**(1): 102–130.

[10] Zheng D. C., Toeplitz operators and Hankel operators, *Integr. Eqn. Oper. Theory*, 1989, **12**: 280–299.

[11] Zhu K. H., Operator Theory in Function Spaces, 2nd Edn., Mathematical Surveys and Monographs, Providence, RI, 2007.