

文章编号: 0583-1431(2021)06-0967-12

文献标识码: A

次线性非对称 Duffing 方程的 不变环面

张新丽

青岛科技大学数理学院 青岛 266061
E-mail: zxl@qust.edu.cn

朴大雄

中国海洋大学数学科学学院 青岛 266100
E-mail: dxpiao@ouc.edu.cn

摘 要 利用 Moser 扭转定理, 在一定的光滑性条件下, 证明了次线性非对称 Duffing 方程 $x'' + a(x^+)^{\frac{1}{3}} - b(x^-)^{\frac{1}{3}} + \varphi(x) = p(t)$ 无穷多不变环面的存在性, 从而得到拉格朗日稳定性, 其中扰动项 $\varphi(x)$ 有界, 而强迫项 $p(t)$ 是周期函数.

关键词 不变环面; 解的有界性; 次线性非对称 Duffing 方程; 扭转定理

MR(2010) 主题分类 34C11, 34C25, 37E40

中图分类 O175.1

Invariant Tori of Sublinear Asymmetric Duffing Equations

Xin Li ZHANG

*School of Mathematics and Physics,
Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, P. R. China
E-mail: zxl@qust.edu.cn*

Da Xiong PIAO

*School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, P. R. China
E-mail: dxpiao@ouc.edu.cn*

Abstract By using Moser's twist theorem, under some smoothness conditions, we prove the existence of infinitely many invariant tori and so the Lagrange stability for the sublinear asymmetric Duffing equations $x'' + a(x^+)^{\frac{1}{3}} - b(x^-)^{\frac{1}{3}} + \varphi(x) = p(t)$, where the perturbation term $\varphi(x)$ is bounded, while the forced term $p(t)$ is periodic in t .

Keywords invariant tori; boundedness of solutions; sublinear asymmetric Duffing equation; twist theorem

MR(2010) Subject Classification 34C11, 34C25, 37E40

Chinese Library Classification O175.1

收稿日期: 2020-08-27; 接受日期: 2020-10-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11571327, 11971059)

通讯作者: 朴大雄

1 引言

最近, 汪小明^[8]研究了次线性非对称 Duffing 方程

$$x'' + a(x^+)^{\frac{1}{3}} - b(x^-)^{\frac{1}{3}} + \varphi(x) = p(t), \quad (1.1)$$

其中 $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \max\{-x, 0\}$, $a \neq b$ 是两个正常数, $\varphi(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $p(t)$ 为连续的 2π 周期函数. 作者证明: 如果 $\varphi'(0) = 0$, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \varphi'(x) = 0$, 且存在正数 d , 使得当 $|x| \geq d$ 时, 有 $\operatorname{sgn}(x)(\varphi(x) - x\varphi'(x)) > \max_{t \in [0, 2\pi]} |p(t)|$, 则方程 (1.1) 存在 Aubry–Mather 集. 从动力系统的角度看, 一个很自然的问题是: 在什么条件下, 方程 (1.1) 具有不变环面. 本文就讨论这个问题.

关于非对称 Duffing 方程, 可追溯到源于吊桥问题^[4] 的方程

$$x'' + ax^+ - bx^- = p(t), \quad (1.2)$$

其中 $p(t)$ 是关于 t 的 2π 周期函数. 当 $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$ 时, Alonso 和 Ortega^[1] 对方程 (1.2) 构造了一个 2π 周期函数 $p(t)$, 并证明了无界解和周期解的共存性.

1999 年, 柳彬^[5] 讨论了方程 (1.2) 解的有界性问题. 当 $p(t) \in \mathcal{C}^6(\mathbb{S})$ 和 $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{2m}{n} \in \mathbb{Q}$ 时, 其中 $\mathbb{S} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, 作者证明: 若 $\mathcal{A}_p(\theta) := \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} p(mt)C(\theta + mt)dt \neq 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, 则方程 (1.2) 的所有解都是有界的, 其中 $C(t)$ 是 $x'' + ax^+ - bx^- = 0$ 满足初值条件 $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ 的解.

稍后, 王新平^[9] 将此结果推广到更一般的方程

$$x'' + ax^+ - bx^- + \phi(x) = p(t). \quad (1.3)$$

当 $p(t) \in \mathcal{C}^7(\mathbb{S})$, $\phi(x) \in \mathcal{C}^6(\mathbb{R})$, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^6 \phi^{(6)}(x) = 0$ 和 $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{2m}{n} \in \mathbb{Q}$ 时, 作者证明: 若 $\mathcal{A}_p(\theta) \neq \frac{n}{m} \{ \frac{1}{a} \phi(+\infty) - \frac{1}{b} \phi(-\infty) \}$, 则方程 (1.3) 的所有解均有界.

Ortega^[7] 证明了方程

$$x'' + ax^+ - bx^- = 1 + \varepsilon h(t) \quad (1.4)$$

的所有解都是有界的, 其中 $\varepsilon \ll 1$, $h(t) \in C^4(\mathbb{S})$.

王在洪、王奕倩和李红^[10] 证明了非对称超线性方程

$$x'' + a(x^+)^3 - b(x^-)^3 = p(t) \quad (1.5)$$

的所有解都是有界的, 其中 $p(t) \in C^5(\mathbb{S})$.

最近, 焦蕾、王奕倩和朴大雄^[3] 研究了半线性 Duffing 方程

$$x'' + ax^+ - bx^- = G_x(x, t) + f(t), \quad (1.6)$$

其中 $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ 是丢番图无理数, $f(t) \in C^{23}(\mathbb{S})$, $G(x, t) \in C^{21}(\mathbb{R} \times \mathbb{S})$. 在位势函数 $G(x, t)$ 没有渐近极限和多项式增长条件下, 他们利用 Moser 扭转定理证明了方程 (1.6) 的所有解都是有界的.

仅从上述文献即可知道, 非对称振子的动力学行为依赖于位势函数和强迫项的多种因素, 是非常复杂的. 而非对称振子 (1.1) 中的非对称部分 $a(x^+)^{\frac{1}{3}} - b(x^-)^{\frac{1}{3}}$ 是次线性的, 与 $ax^+ - bx^-$ 及 $a(x^+)^3 - b(x^-)^3$ 具有显著的差别. 在什么条件下方程 (1.1) 具有周期解、无界解, 在什么条件下有界解与无界解共存, 等等, 这些都是非常有意义的问题. 本文关注方程 (1.1) 的不变环面的存在性和拉格朗日稳定性问题. 主要结果如下.

定理 1.1 假设 $p(t) \in \mathcal{C}^{10}(\mathbb{S})$, $\varphi(x) \in \mathcal{C}^9(\mathbb{R})$, 且 $\varphi(x)$ 满足

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = \varphi(\pm\infty) \text{ 存在且有限}, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^9 \varphi^{(9)}(x) = 0, \quad (1.7)$$

则方程 (1.1) 的所有解 $x = x(t)$ 都是有界的, 即 $x = x(t)$ 在 \mathbb{R} 上有定义, 并且满足

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) < \infty.$$

进一步地, 我们有

定理 1.2 假设定理 1.1 的条件成立, 则方程 (1.1) 存在无穷多不变环面而且存在 $\omega_0 > 0$, 使得对任意 $\omega > \omega_0$, 并且满足条件

$$\left| \omega - \frac{2\pi p}{q} \right| \geq c|q|^{-\frac{5}{2}} \quad (1.8)$$

的无理数 ω , 方程 (1.1) 存在以 $(\omega, \frac{1}{2}\pi)$ 为频率的拟周期解, 其中 $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, c 是正常数.

注 1.3 由 (1.7) 和洛必达法则可知

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^k \varphi^{(k)}(x) = 0, \quad |x^k \varphi^{(k)}(x)| \leq C, \quad 0 \leq k \leq 9. \quad (1.9)$$

本文第 2 节引进作用量 - 角变量, 并给出相应函数的正则性估计; 第 3 节为了在距原点任意远处获得满足 Moser 扭转定理条件的 Poincaré 映射, 利用生成函数构造进一步的典则变换; 第 4 节将验证所得 Poincaré 映射满足 Moser 扭转定理的所有条件, 从而完成定理 1.1 和 1.2 的证明.

2 作用量和角变量

首先, 如汪小明^[8]所作, 引进作用量和角变量. 为此考虑未扰动的辅助方程

$$x'' + a(x^+)^{\frac{1}{3}} - b(x^-)^{\frac{1}{3}} = 0. \quad (2.1)$$

它等价于下面的平面哈密顿系统

$$x' = -y, \quad y' = a(x^+)^{\frac{1}{3}} - b(x^-)^{\frac{1}{3}},$$

其哈密顿函数为

$$h(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}a(x^+)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{4}b(x^-)^{\frac{4}{3}}.$$

显然, h 在 \mathbb{R}^2 中除平衡点 $(x, y) = (0, 0)$ 外都是正的. 若记 $h(x, y) = E$ 是方程 (2.1) 的首次积分, 则方程 (2.1) 的解是周期的, 且当 E 趋于无穷时周期趋于零.

设 $C(t)$ 是如下初值问题的解:

$$\begin{cases} x'' + a(x^+)^{\frac{1}{3}} - b(x^-)^{\frac{1}{3}} = 0, \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0. \end{cases}$$

令 $S(t) = -C'(t)$, 则由文 [8] 可知:

- (1) $C(-t) = C(t)$, $S(-t) = -S(t)$, $C \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$;
- (2) $C(t), S(t)$ 是关于变量 t 的周期函数. 设其最小正周期为 T ;
- (3) $2S^2(t) + 3(a(C^+(t))^{\frac{4}{3}} + b(C^-(t))^{\frac{4}{3}}) \equiv 3a$.

令 $y = -x'$, 则方程 (1.1) 等价于系统

$$x' = -y, \quad y' = a(x^+)^{\frac{1}{3}} - b(x^-)^{\frac{1}{3}} + \varphi(x) - p(t).$$

这是一个非自治的平面哈密顿系统:

$$x' = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, t), \quad y' = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y, t), \quad (2.2)$$

其中 $H(x, y, t) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}a(x^+)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{4}b(x^-)^{\frac{4}{3}} + \Phi(x) - xp(t)$, $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(s)ds$.

引入广义极坐标变换

$$\begin{aligned} \Psi_1 : (r, \theta) &\in (0, +\infty) \times \mathbb{S} \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0), \\ x &= (\sigma r)^{\frac{3}{5}} C(\omega\theta), \quad y = (\sigma r)^{\frac{2}{5}} S(\omega\theta), \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $2\pi\omega = T$, $\sigma = \frac{5}{3a\omega}$, 则系统 (2.2) 变为如下哈密顿系统

$$r' = -\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta, t), \quad \theta' = \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta, t), \quad (2.4)$$

其中

$$h(r, \theta, t) = \frac{3a}{4}(\sigma r)^{\frac{4}{5}} + I_1(r, \theta) + I_2(r, \theta, t), \quad (2.5)$$

$$I_1(r, \theta) = \Phi((\sigma r)^{\frac{3}{5}} C(\omega\theta)), \quad I_2(r, \theta, t) = -(\sigma r)^{\frac{3}{5}} C(\omega\theta)p(t). \quad (2.6)$$

由 $\varphi(x) \in \mathcal{C}^9(\mathbb{R})$, $p(t) \in \mathcal{C}^{10}(\mathbb{S})$ 知, I_1, I_2 关于 θ 是 \mathcal{C}^2 的, I_1 关于 r 是 \mathcal{C}^{10} 的, I_2 关于 r 是 \mathcal{C}^∞ 的, 关于 t 是 \mathcal{C}^{10} 的.

引理 2.1 对 $r \gg 1$, 下列不等式成立:

$$|D_r^k I_1(r, \theta)| \leq Cr^{-k+\frac{3}{5}}, \quad 0 \leq k \leq 10. \quad (2.7)$$

证明 当 $k=0$ 时, 由 $|\varphi(x)| \leq C$ 知

$$0 \leq |\Phi(x)| \leq C|x|.$$

由 (2.6) 得

$$|I_1(r, \theta)| \leq Cr^{\frac{3}{5}}. \quad (2.8)$$

当 $k \geq 1$ 时, 由 (2.6) 和直接计算可得

$$r^k D_r^k I_1(r, \theta) = \sum_{i=1}^k c_{k,i} x^{k-i+1} \varphi^{(k-i)}(x), \quad (2.9)$$

其中 $x = (\sigma r)^{\frac{3}{5}} C(\omega\theta)$, $c_{k,i}$ 是常数. 结合 (1.9) 和 (2.9), 即可得到 (2.7). 证毕.

由于 $rd\theta - hdt = -(hdt - rd\theta)$, 若从 (2.5) 能解出 $r = r(h, t, \theta)$ 作为 h, t, θ 的函数, 则

$$\frac{dh}{d\theta} = -\frac{\partial r}{\partial t}(h, t, \theta), \quad \frac{dt}{d\theta} = \frac{\partial r}{\partial h}(h, t, \theta) \quad (2.10)$$

是一个新的哈密顿系统, 它以 $r = r(h, t, \theta)$ 为哈密顿函数, 分别以 h, t 和 θ 作为作用量、角变量和时间变量.

由 (2.5) 直接计算可得

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{3}{5}a\sigma^{\frac{4}{5}} \cdot r^{-\frac{1}{5}} + \sigma^{\frac{3}{5}}\varphi(x)C(\omega\theta) \cdot r^{-\frac{2}{5}} - \sigma^{\frac{3}{5}}C(\omega\theta)p(t) \cdot r^{-\frac{2}{5}}.$$

由 $\varphi(x)$ 的有界性可知, 对 $r \gg 1$, 有 $\frac{\partial h}{\partial r} > 0$. 由隐函数存在定理知, 存在函数 $R = R(h, t, \theta)$, 使得

$$r(h, t, \theta) = dh^{\frac{5}{4}} + R(h, t, \theta), \quad (2.11)$$

其中 $d = (\frac{4}{3a})^{\frac{5}{4}}\sigma^{-1}$.

引理 2.2 对 $h \gg 1$, 下列估计式成立:

$$|D_h^i D_t^j R(h, t, \theta)| \leq Ch^{-i+1}, \quad 0 \leq i + j \leq 10. \quad (2.12)$$

证明 将 (2.11) 代入 (2.5) 的右边, 得

$$h = d^{-\frac{4}{5}}(dh^{\frac{5}{4}} + R)^{\frac{4}{5}} + I_1(dh^{\frac{5}{4}} + R, \theta) + I_2(dh^{\frac{5}{4}} + R, \theta, t). \quad (2.13)$$

利用泰勒展开式, 可得

$$\frac{3a}{5} \sigma^{\frac{4}{5}} \int_0^1 (dh^{\frac{5}{4}} + \mu R)^{-\frac{1}{5}} R d\mu + I_1(dh^{\frac{5}{4}} + R, \theta) + I_2(dh^{\frac{5}{4}} + R, \theta, t) = 0. \quad (2.14)$$

函数 $R(h, t, \theta)$ 可以由 (2.14) 确定.

下面用数学归纳法证明 (2.12).

根据引理 2.1、式 (2.14) 和 I_2 的定义可知 $|R| \leq Ch$. 假设 $i \leq n-1$ 时, 有

$$|D_h^i R(h, t, \theta)| \leq Ch^{-i+1}.$$

对 (2.14) 两端作用微分算子 D_h^n , 则左端变为如下一些项的线性和:

$$\frac{3a}{5} \sigma^{\frac{4}{5}} (D_h^m R) \int_0^1 (dh^{\frac{5}{4}} + \mu R)^{-\frac{1}{5}-s} \prod_{k=1}^s D_h^{j_k} (dh^{\frac{5}{4}} + \mu R) d\mu, \quad (2.15)$$

$$D_r^v I_1(dh^{\frac{5}{4}} + R, \theta) \prod_{k=1}^v D_h^{l_k} (dh^{\frac{5}{4}} + R), \quad (2.16)$$

$$D_r^v I_2(dh^{\frac{5}{4}} + R, \theta, t) \prod_{k=1}^v D_h^{l_k} (dh^{\frac{5}{4}} + R), \quad (2.17)$$

其中 $1 \leq s \leq n$, $1 \leq j_k \leq n$, $m + \sum_{k=1}^s j_k = n$, $1 \leq v \leq n$, $1 \leq l_k \leq n$, $\sum_{k=1}^v l_k = n$. 然后将包含 $D^i R$, $i < n$ 的所有项移到等式右端, 左端 $D^n R$ 的系数为

$$\frac{3a}{5} \sigma^{\frac{4}{5}} \int_0^1 (dh^{\frac{5}{4}} + \mu R)^{-\frac{1}{5}} d\mu - \frac{3a}{25} \sigma^{\frac{4}{5}} R \int_0^1 (dh^{\frac{5}{4}} + \mu R)^{-\frac{6}{5}} \mu d\mu + D_r I_1 + D_r I_2 \geq Ch^{-\frac{1}{4}}. \quad (2.18)$$

由归纳假设, 以及式 (2.15)–(2.18), 可以证明

$$|D_h^n R(h, t, \theta)| \leq Ch^{-n+1}.$$

对 (2.13) 两端关于 t 求导数可得

$$\left(\frac{3a}{5} \sigma^{\frac{4}{5}} (dh^{\frac{5}{4}} + R)^{-\frac{1}{5}} + D_r I_1 + D_r I_2 \right) D_t R + D_t I_2 = 0. \quad (2.19)$$

由引理 2.1、式 (2.14) 和 I_2 的定义, 可得 $|D_t R| \leq Ch$.

假设 $i + j \leq n-1$ 时 (2.12) 成立, 下面来证明 $i + j = n$ 时结论成立.

在 (2.19) 两端作用算子 $D_h^i D_t^{j-1}$ 后, 左端化为如下项的线性和:

$$\left(\frac{3a}{5} \sigma^{\frac{4}{5}} (dh^{\frac{5}{4}} + R)^{-\frac{1}{5}} + D_r I_1 + D_r I_2 \right) D_h^i D_t^j R, \quad (2.20)$$

$$D_h^{i_1} D_t^{j_1} \left(\frac{3a}{5} \sigma^{\frac{4}{5}} (dh^{\frac{5}{4}} + R)^{-\frac{1}{5}} + D_r I_1 + D_r I_2 \right) D_h^{i_2} D_t^{j_2+1} R, \quad (2.21)$$

$$D_h^i D_t^{j-1} (D_t I_2), \quad (2.22)$$

其中 $i_1 + i_2 = i$, $j_1 + j_2 = j - 1$, $i + j = n$, $i_1 + j_1 \geq 1$. 将 (2.20) 留在等式左端, 其余项均移到右端, 同时注意 (2.21) 又可以写成如下项的线性和:

$$\left(\frac{3a}{5} \sigma^{\frac{4}{5}} (dh^{\frac{5}{4}} + R)^{-\frac{1}{5}-m} \prod_{k=1}^m D_h^{i_1^k} D_t^{j_1^k} (dh^{\frac{5}{4}} + R) \right) D_h^{i_2} D_t^{j_2} R, \quad (2.23)$$

$$\left(D_r^{m+1} I_1 \prod_{k=1}^m D_h^{i_1^k} D_t^{j_1^k} (dh^{\frac{5}{4}} + R) \right) D_h^{i_2} D_t^{j_2} R, \quad (2.24)$$

$$\left(D_r^{m+1} D_t^s I_2 \prod_{k=1}^m D_h^{i_1^k} D_t^{l_1^k} (dh^{\frac{5}{4}} + R) \right) D_h^{i_2} D_t^{j_2} R, \quad (2.25)$$

其中 $0 \leq i_1^k \leq i_1$, $0 \leq j_1^k, l_1^k \leq j_1$, $1 \leq i_1 + j_1 = n - 1$, $\sum_{k=1}^m i_1^k = i_1$, $\sum_{k=1}^m j_1^k = j_1$, $s + \sum_{k=1}^m l_1^k = j_1$. 而 (2.22) 又进一步可以写成如下项的线性和:

$$D_r^m D_t^{s+1} I_2 \prod_{k=1}^m D_h^{i_1^k} D_t^{j_1^k} (dh^{\frac{5}{4}} + R), \quad (2.26)$$

其中 $1 \leq m$, $s \leq n - 1$, $0 \leq i_1^k \leq i$, $0 \leq j_1^k \leq j - 1$, $\sum_{k=1}^m i_1^k = i$, $s + \sum_{k=1}^m j_1^k = j - 1$.

由归纳假设及 (2.23)–(2.26), 可得

$$|D_h^i D_t^j R(h, t, \theta)| \leq C h^{-i+1}.$$

证毕.

3 进一步的典则变换

本节将做更多的典则变换, 使得新系统的 Poincaré 映射成为一个明显的扭转映射. 受文 [2] 的启发, 首先证明一个重要的引理.

对于 t 是 2π 周期的函数 $f(r, t, \theta)$ 记

$$[f](r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, t, \theta) dt.$$

引理 3.1 对 $\lambda \gg 1$, 假设 $H = d\lambda^\alpha + h_1(\lambda, \theta) + h_2(\lambda, t, \theta)$ 满足

$$|D_\lambda^i h_1(\lambda, \theta)| \leq C \lambda^{\beta-i}, \quad |D_\lambda^j D_t^k h_2(\lambda, t, \theta)| \leq C \lambda^{\gamma-j}, \quad (3.1)$$

其中 $0 \leq i \leq n_1$, $0 \leq j+k \leq n_1$, $\alpha > 1$, $\beta < \alpha$, $\gamma < \alpha$, 函数 $h_1(\lambda, \theta)$, $h_2(\lambda, t, \theta)$ 关于 θ 都是 \mathcal{C}^{n_2} 的, 则存在关于 θ 是周期的典则变换:

$$\Psi_2 : \lambda = \xi + u(\xi, \eta, \theta), \quad t = \eta + v(\xi, \eta, \theta), \quad (3.2)$$

使函数 H 变为

$$\tilde{H} = d_1 \xi^\alpha + \tilde{h}_1(\xi, \theta) + \tilde{h}_2(\xi, \eta, \theta),$$

其中函数 $\tilde{h}_1(\xi, \theta)$ 和 $\tilde{h}_2(\xi, \eta, \theta)$ 关于 θ 分别是 \mathcal{C}^{n_2} , \mathcal{C}^{n_2-1} 的, 且满足

$$|D_\xi^i \tilde{h}_1(\xi, \theta)| \leq C \lambda^{\tilde{\beta}-i}, \quad |D_\xi^j D_\eta^k \tilde{h}_2(\xi, \eta, \theta)| \leq C \xi^{\tilde{\gamma}-j}, \quad (3.3)$$

其中

$$0 \leq i \leq n_1, \quad 0 \leq j+k \leq n_1 - 2, \quad \tilde{\beta} = \max\{\beta, \gamma\}, \quad \tilde{\gamma} = \begin{cases} \gamma - (\alpha - \gamma), & \gamma \geq 1, \\ \gamma - (\alpha - 1), & \gamma < 1. \end{cases}$$

证明 我们将通过生成函数 S 来定义典则变换:

$$\Psi_2: \lambda = \xi + \frac{\partial S}{\partial t}(\xi, t, \theta), \quad \eta = t + \frac{\partial S}{\partial \xi}(\xi, t, \theta).$$

于是, 变换后 H 将具有形式

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= d\left(\xi + \frac{\partial S}{\partial t}\right)^\alpha + h_1\left(\xi + \frac{\partial S}{\partial t}, \theta\right) + h_2\left(\xi + \frac{\partial S}{\partial t}, t, \theta\right) + \frac{\partial S}{\partial \theta} \\ &= d\xi^\alpha + h_1(\xi, \theta) + d\alpha\xi^{\alpha-1}\frac{\partial S}{\partial t} + D_\lambda h_1(\xi, \theta)\frac{\partial S}{\partial t} + [h_2](\xi, \theta) + h_2(\xi, t, \theta) - [h_2](\xi, \theta) \\ &\quad + d\alpha(\alpha-1)\int_0^1\int_0^1\left(\xi+s\mu\frac{\partial S}{\partial t}\right)^{\alpha-2}\mu\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2dsd\mu + \int_0^1D_\lambda h_2\left(\xi+\mu\frac{\partial S}{\partial t}, t, \theta\right)\frac{\partial S}{\partial t}d\mu \\ &\quad + \int_0^1\int_0^1D_\lambda^2 h_1\left(\xi+s\mu\frac{\partial S}{\partial t}, \theta\right)\mu\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2dsd\mu + \frac{\partial S}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

令

$$d\alpha\xi^{\alpha-1}\frac{\partial S}{\partial t} + D_\lambda h_1(\xi, \theta)\frac{\partial S}{\partial t} + h_2(\xi, t, \theta) - [h_2](\xi, \theta) = 0,$$

由此可知生成函数 S 可定义为

$$S(\xi, t, \theta) = -\int_0^t (d\alpha\xi^{\alpha-1} + D_\lambda h_1(\xi, \theta))^{-1} (h_2(\xi, \tau, \theta) - [h_2](\xi, \theta)) d\tau. \quad (3.4)$$

若令

$$\tilde{h}_1(\xi, \theta) = h_1(\xi, \theta) + [h_2](\xi, \theta), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2(\xi, \eta, \theta) &= d\alpha(\alpha-1)\int_0^1\int_0^1\left(\xi+s\mu\frac{\partial S}{\partial t}\right)^{\alpha-2}\mu\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2dsd\mu + \frac{\partial S}{\partial \theta} \\ &\quad + \int_0^1D_\lambda h_2\left(\xi+\mu\frac{\partial S}{\partial t}, t, \theta\right)\frac{\partial S}{\partial t}d\mu \\ &\quad + \int_0^1\int_0^1D_\lambda^2 h_1\left(\xi+s\mu\frac{\partial S}{\partial t}, \theta\right)\mu\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2dsd\mu, \end{aligned} \quad (3.6)$$

则

$$\tilde{H} = d\xi^\alpha + \tilde{h}_1(\xi, \theta) + \tilde{h}_2(\xi, \eta, \theta).$$

由 (3.1) 和 (3.5) 可知, (3.3) 中的第一个估计式成立. 下面来证明 (3.3) 的第二个估计式.

由 (3.4) 可知

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\xi, t, \theta) = -(d\alpha\xi^{\alpha-1} + D_\lambda h_1(\xi, \theta))^{-1} (h_2(\xi, t, \theta) - [h_2](\xi, \theta)).$$

根据莱布尼兹公式, $D_\xi^i D_t^{j+1} S$ 是如下项的线性和:

$$D_\xi^{i_1} (d\alpha\xi^{\alpha-1} + D_\lambda h_1(\xi, \theta))^{-1} D_\xi^{i_2} D_t^j (h_2(\xi, t, \theta) - [h_2](\xi, \theta)),$$

即

$$(d\alpha\xi^{\alpha-1} + D_\lambda h_1(\xi, \theta))^{-1} \prod_{k=1}^m D_\xi^{l_m} (d\alpha\xi^{\alpha-1} + D_\lambda h_1(\xi, \theta)) D_\xi^{i_2} D_t^j (h_2(\xi, t, \theta) - [h_2](\xi, \theta)),$$

其中 $i_1 + i_2 = i$, $m \geq 1$, $\sum_{k=1}^m l_m = i_1$. 根据 (3.1), 我们可以得到

$$|D_\xi^i D_t^{j+1} S| \leq C\xi^{1-\alpha+\gamma-i}. \quad (3.7)$$

由 $\tilde{h}_2(\xi, \eta, \theta)$ 的表达式知, $D_\xi^i D_\eta^j \tilde{h}_2(\xi, \eta, \theta)$ 为如下项的线性和:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 D_\xi^{i_1} D_\eta^{j_1} \left(\xi + s\mu \frac{\partial S}{\partial t} \right)^{\alpha-2} \mu D_\xi^{i_2} D_\eta^{j_2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 ds d\mu, \\ & \int_0^1 D_\xi^{i_1} D_\eta^{j_1} D_\lambda h_2 \left(\xi + \mu \frac{\partial S}{\partial t}, t, \theta \right) D_\xi^{i_2} D_\eta^{j_2} \frac{\partial S}{\partial t} d\mu, \\ & \int_0^1 \int_0^1 D_\xi^{i_1} D_\eta^{j_1} D_\lambda^2 h_1 \left(\xi + s\mu \frac{\partial S}{\partial t}, \theta \right) \mu D_\xi^{i_2} D_\eta^{j_2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 ds d\mu, \\ & D_\xi^i D_\eta^j \frac{\partial S}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

其中 $i_1 + i_2 = i$, $j_1 + j_2 = j$. 结合 $D_\xi^i D_\eta^j \tilde{h}_2(\xi, \eta, \theta)$, 得到 (3.3) 中的第二个估计式. 证毕.

引理 3.2 存在典则变换:

$$\Psi_3 : h = \rho + U(\rho, \tau, \theta), \quad t = \tau + V(\rho, \tau, \theta), \quad (3.8)$$

使哈密顿系统 (2.10) 变成

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tau}(\rho, \tau, \theta), \quad \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \rho}(\rho, \tau, \theta), \quad (3.9)$$

其中哈密顿函数为

$$\tilde{r}(\rho, \tau, \theta) = d\rho^{\frac{5}{4}} + R_1(\rho, \theta) + R_2(\rho, \tau, \theta), \quad (3.10)$$

且当 $\rho \gg 1$ 函数 $R_1(\rho, \theta)$ 和 $R_2(\rho, \tau, \theta)$ 满足

$$|D_\rho^i R_1(\rho, \theta)| \leq C\rho^{1-i}, \quad 0 \leq i \leq 6, \quad (3.11)$$

$$|D_\rho^i D_\tau^j R_2(\rho, \tau, \theta)| \leq C\rho^{\frac{1}{2}-i}, \quad 0 \leq i+j \leq 6. \quad (3.12)$$

而且函数 $R_1(\rho, \theta)$ 和 $R_2(\rho, \tau, \theta)$ 关于 θ 分别是 \mathcal{C}^1 和 \mathcal{C}^0 的.

证明 连续使用引理 3.1 两次即可完成引理的证明. 证毕.

4 定理 1.1 的证明

本节先导出系统 (3.9) 的 Poincaré 映射的表达式, 然后验证这个 Poincaré 映射满足 Moser 扭转定理的所有条件, 从而完成定理的证明.

引理 4.1 哈密顿系统 (3.9) 的 Poincaré 映射 $\mathcal{P}_{2\pi}$ 具有如下形式:

$$\tau_1 = \tau_0 + f_0(\rho_0) + f_1(\rho_0, \tau_0), \quad \rho_1 = \rho_0 + f_2(\rho_0, \tau_0), \quad (4.1)$$

其中

$$f_0(\rho_0) = \frac{5\pi d}{2} \rho_0^{\frac{1}{4}} + \int_0^{2\pi} \frac{\partial R_1}{\partial \rho}(\rho_0, s) ds, \quad (4.2)$$

且函数 $f_0(\rho_0)$, $f_1(\rho_0, \tau_0)$ 和 $f_2(\rho_0, \tau_0)$ 满足

$$|D_{\rho_0}^i f_0(\rho_0)| \leq C\rho_0^{\frac{1}{4}-i}, \quad 0 \leq i \leq 5, \quad (4.3)$$

$$|D_{\rho_0}^i D_{\tau_0}^j f_1(\rho_0, \tau_0)| \leq C\rho_0^{-\frac{1}{4}-\frac{3i}{4}}, \quad 0 \leq i+j \leq 5, \quad (4.4)$$

$$|D_{\rho_0}^i D_{\tau_0}^j f_2(\rho_0, \tau_0)| \leq C\rho_0^{\frac{1}{2}-\frac{3i}{4}}, \quad 0 \leq i+j \leq 4. \quad (4.5)$$

证明 将系统 (3.9) 两边关于 θ 积分得

$$\mathcal{P}_\theta : \tau(\theta) = \tau_0 + f_0(\rho_0, \theta) + A(\rho_0, \tau_0, \theta), \quad \rho(\theta) = \rho_0 + B(\rho_0, \tau_0, \theta), \quad (4.6)$$

其中

$$f_0(\rho_0, \theta) = \frac{5d}{4}\rho_0^{\frac{1}{4}}\theta + \int_0^\theta \frac{\partial R_1}{\partial \rho}(\rho_0, s)ds, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} A(\rho_0, \tau_0, \theta) = & \frac{5d}{16} \int_0^\theta \int_0^1 (\rho_0 + \mu B(\rho_0, \tau_0, s))^{-\frac{3}{4}} B(\rho_0, \tau_0, s) d\mu ds \\ & + \int_0^\theta \int_0^1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho^2}(\rho_0 + \mu B(\rho_0, \tau_0, s), s) B(\rho_0, \tau_0, s) d\mu ds \\ & + \int_0^\theta \frac{\partial R_2}{\partial \rho}(\rho_0 + B(\rho_0, \tau_0, s), \tau_0 + f_0(\rho_0, s) + A(\rho_0, \tau_0, s), s) ds, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$B(\rho_0, \tau_0, \theta) = - \int_0^\theta \frac{\partial R_2}{\partial \tau}(\rho_0 + B(\rho_0, \tau_0, s), \tau_0 + f_0(\rho_0, s) + A(\rho_0, \tau_0, s), s) ds. \quad (4.9)$$

令 $f_0(\rho_0) = f_0(\rho_0, 2\pi)$, $f_1(\rho_0, \tau_0) = A(\rho_0, \tau_0, 2\pi)$, $f_2(\rho_0, \tau_0) = B(\rho_0, \tau_0, 2\pi)$, 即可得到系统 (3.9) 的 Poincaré 映射 $\mathcal{P}_{2\pi}$ 的表达式 (4.1).

根据 $f_0(\rho_0)$ 的表达式和 (3.11) 得到估计式 (4.3).

下面来证明估计式 (4.4) 和 (4.5).

(1) 当 $i + j = 0$ 时, 由 (3.12) 知 $|f_2(\rho_0, \tau_0)| \leq C\rho_0^{\frac{1}{2}}$. 根据 $f_1(\rho_0, \tau_0)$ 的表达式, (3.11) 和 (3.12) 得

$$|f_1(\rho_0, \tau_0)| \leq C\rho_0^{-\frac{1}{4}}.$$

(2) 当 $i + j \geq 1$ 时, 由于 $D_{\rho_0}^i D_{\tau_0}^j R_1(\rho_0 + B, \theta)$ 为如下项的线性和:

$$D_\rho^m R_1(\rho_0 + B, \theta) \left(\prod_{s=1}^m D_{\rho_0}^{i_s} D_{\tau_0}^{j_s}(\rho_0 + B) \right), \quad (4.10)$$

其中 $1 \leq m \leq i + j$, $\sum_{s=1}^k i_s = i$, $\sum_{s=1}^k j_s = j$.

同时, $D_{\rho_0}^i D_{\tau_0}^j R_2(\rho_0 + B, \tau_0 + f_0 + A)$ 为如下项的线性和:

$$D_\rho^m D_\tau^l R_2 \left(\prod_{s=1}^m D_{\rho_0}^{i_s} D_{\tau_0}^{j_s}(\rho_0 + B) \right) \left(\prod_{s=m+1}^{m+l} D_{\rho_0}^{i_s} D_{\tau_0}^{j_s}(\tau_0 + f_0 + A) \right) ds, \quad (4.11)$$

其中 $1 \leq m + l \leq i + j$, $\sum_{s=1}^{m+l} i_s = i$, $\sum_{s=1}^{m+l} j_s = j$. 由数学归纳法, 根据 (3.11)、(3.12)、(4.10) 和 (4.11) 即可得到估计式 (4.4) 和 (4.5). 证毕.

引理 4.2 存在典则变换:

$$\Psi_4 : \gamma = f_0(\rho), \quad \tau = \tau, \quad (4.12)$$

使哈密顿系统 (3.9) 的 Poincaré 映射 $\mathcal{P}_{2\pi}$ 变为

$$\tau_1 = \tau_0 + \gamma_0 + g_1(\gamma_0, \tau_0), \quad \gamma_1 = \gamma_0 + g_2(\gamma_0, \tau_0), \quad (4.13)$$

其中

$$g_1(\gamma_0, \tau_0) = f_1(\rho_0, \tau_0), \quad g_2(\gamma_0, \tau_0) = \int_0^1 f'_0(\rho_0 + \mu f_2) \cdot f_2 d\mu, \quad \rho_0 = f_0^{-1}(\gamma_0), \quad (4.14)$$

且函数 $g_1(\gamma_0, \tau_0)$ 和 $g_2(\gamma_0, \tau_0)$ 满足

$$|D_{\gamma_0}^i D_{\tau_0}^j g_k(\gamma_0, \tau_0)| \leq C\gamma_0^{-1}, \quad 0 \leq i+j \leq 4, \quad k=1, 2. \quad (4.15)$$

证明 首先我们用数学归纳法来证明

$$|D_{\gamma_0}^i \rho_0| \leq C\gamma_0^{4-i}, \quad 0 < i \leq 5. \quad (4.16)$$

由 $\rho_0 = f_0^{-1}(\gamma_0)$ 及 (4.4) 可得

$$|D_{\gamma_0} \rho_0| = \left| \frac{1}{D_{\rho_0} f_0} \right| \leq C\gamma_0^3.$$

假设 $i < n$ 时 (4.16) 成立, 下面证明 $i = n$ 时成立.

对 $f_0(\rho_0) = \gamma_0$ 两端关于 γ_0 求 n 阶导数得

$$0 = \sum_{m=1}^n c_m \left(D_{\rho_0}^m f_0 \prod_{k=1}^m D_{\gamma_0}^{j_k} \rho_0 \right), \quad \sum_{k=1}^m j_k = n.$$

因此, 由归纳假设和 (4.4) 得

$$|D_{\gamma_0}^n \rho_0| = \left| (c_1 D_{\rho_0} f_0)^{-1} \sum_{m=2}^n c_m \left(D_{\rho_0}^m f_0 \prod_{k=1}^m D_{\gamma_0}^{j_k} \rho_0 \right) \right| \leq C\gamma_0^{4-n}.$$

下面来证明估计式 (4.15).

(1) $i+j=0$.

由 (4.4)、(4.12) 和 (4.14) 可知

$$|g_1(\gamma_0, \tau_0)| \leq C\gamma_0^{-1}. \quad (4.17)$$

由 (4.3)、(4.5)、(4.12) 和 (4.14) 可知

$$|g_2(\gamma_0, \tau_0)| \leq C\gamma_0^{-1}. \quad (4.18)$$

(2) $i+j=1$.

由 (4.4)、(4.12) 和 (4.14) 可知

$$\begin{aligned} |D_{\gamma_0} g_1(\gamma_0, \tau_0)| &= |D_{\rho_0} f_1(\rho_0, \tau_0) \cdot D_{\gamma_0} \rho_0| \leq C\gamma_0^{-1}, \\ |D_{\tau_0} g_1(\gamma_0, \tau_0)| &= |D_{\tau_0} f_1(\rho_0, \tau_0)| \leq C\gamma_0^{-1}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} D_{\gamma_0} g_2(\gamma_0, \tau_0) &= \int_0^1 (f_0' \cdot D_{\rho_0} f_2 + f_0'' \cdot (1 + \mu D_{\rho_0} f_2) \cdot f_2) \cdot D_{\gamma_0} \rho_0 d\mu, \\ D_{\tau_0} g_2(\gamma_0, \tau_0) &= \int_0^1 (f_0' \cdot D_{\tau_0} f_2 + f_0'' \cdot \mu D_{\tau_0} f_2 \cdot f_2) d\mu. \end{aligned}$$

根据 (4.3)、(4.5)、(4.12) 和 (4.14) 可知

$$|D_{\gamma_0} g_2(\gamma_0, \tau_0)| \leq C\gamma_0^{-1}, \quad |D_{\tau_0} g_2(\gamma_0, \tau_0)| \leq C\gamma_0^{-1}.$$

当 $i+j > 1$ 时, $D_{\gamma_0}^i D_{\tau_0}^j g_1(\gamma_0, \tau_0)$ 为如下项的线性和:

$$D_{\rho_0}^k D_{\tau_0}^j f_1(\rho_0, \tau_0) \prod_{l=1}^k D_{\gamma_0}^{i_l} \rho_0, \quad (4.19)$$

其中 $1 < k \leq i$, $1 < i_l$, $\sum_{l=1}^k i_l = i$.

由 (4.4)、(4.16) 和归纳法可知

$$|D_{\gamma_0}^i D_{\tau_0}^j g_1(\gamma_0, \tau_0)| \leq C\gamma_0^{-1}, \quad 0 \leq i+j \leq 4.$$

另一方面, $D_{\gamma_0}^i D_{\tau_0}^j g_2(\gamma_0, \tau_0)$ 为形如 (4.20) 的项的线性组合:

$$\int_0^1 (D_{\gamma_0}^{i_1} D_{\tau_0}^{j_1} f'_0(\rho_0 + \mu f_2))(D_{\gamma_0}^{i_2} D_{\tau_0}^{j_2} f_2) d\mu, \quad (4.20)$$

其中 $i_1 + i_2 = i$, $j_1 + j_2 = j$. 而 $D_{\gamma_0}^{i_1} D_{\tau_0}^{j_1} f'_0(\rho_0 + \mu f_2)$ 为形如 (4.21) 的项的和

$$D_{\rho_0}^{m+1} f_0 \left(\prod_{l=1}^m D_{\gamma_0}^{i_l} D_{\tau_0}^{j_l} (\rho_0 + \mu f_2) \right), \quad (4.21)$$

其中 $1 \leq m \leq i_1 + j_1$, $\sum_{l=1}^m i_l = i_1$, $\sum_{l=1}^m j_l = j_1$. 注意到 $D_{\gamma_0}^i D_{\tau_0}^j f_2$ 为形如 (4.22) 的项的和

$$D_{\rho_0}^k D_{\tau_0}^j f_2(\rho_0, \tau_0) \prod_{l=1}^k D_{\gamma_0}^{i_l} \rho_0, \quad (4.22)$$

其中 $1 < k \leq i$, $1 < i_l$, $\sum_{l=1}^k i_l = i$.

由 (4.6)、(4.16)、(4.20)–(4.22) 和归纳法可知

$$|D_{\gamma_0}^i D_{\tau_0}^j g_2(\gamma_0, \tau_0)| \leq C\gamma_0^{-1}, \quad 0 \leq i+j \leq 4.$$

证毕.

引理 4.3 ^[2] 对充分大的 γ_0 , 映射 $\mathcal{P}_{2\pi}$:

$$\tau_1 = \tau_0 + \gamma_0 + g_1(\gamma_0, \tau_0), \quad \gamma_1 = \gamma_0 + g_2(\gamma_0, \tau_0)$$

具有相交性.

引理 4.4 ^[6] (Moser 小扭转定理) 假设映射

$$\mathcal{P}: \theta_1 = \theta + r + f(r, \theta), \quad r_1 = r + g(r, \theta) \quad (4.23)$$

满足相交性, 函数 $f(r, \theta), g(r, \theta) \in \mathcal{C}^4([A, B] \times \mathbb{S})$, $B - A \geq 1$, 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $\|f\|_{\mathcal{C}^4} + \|g\|_{\mathcal{C}^4} \leq \delta$, 则映射 \mathcal{P} 在 $[A, B] \times \mathbb{S}$ 上有不变曲线

$$r = \omega + u(\xi), \quad \theta = \xi + v(\xi), \quad (4.24)$$

其中 $u(\xi)$ 和 $v(\xi)$ 是 2π 周期函数, 且 $\|u(\xi)\| + \|v(\xi)\| < \varepsilon$, $\omega \in [A + \varepsilon, B - \varepsilon]$ 满足丢番图条件

$$\left| \omega - \frac{2\pi p}{q} \right| \geq \varepsilon |q|^{-\frac{5}{2}}, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > 0. \quad (4.25)$$

而且映射 (4.23) 在不变曲线 (4.24) 上的限制为 $\theta_1 = \theta + \omega$, 即不变曲线的旋转数为 ω .

定理 1.1 的证明 综合以上引理, Poincaré 映射 $\mathcal{P}_{2\pi}$ 满足了引理 4.4 (Moser 小扭转定理) 的所有条件. 因此, 根据引理 4.4 结论的前半部分可知, 当 γ_0 充分大时, 存在 $\mathcal{P}_{2\pi}$ 的一条不变闭曲线围绕 $\gamma = \text{常数}$. 由我们所做一系列变换的典则性, 意味着距离原点任意远处存在系统 (2.2) 的 Poincaré 映射的不变曲线围绕原点 $(x, y) = (0, 0)$, 由初值问题解的唯一性可知定理 1.1 成立.

定理 1.2 的证明 证明与文 [11] 中主要定理的证明方法类似, 故在此简略描述. 由引理 4.4 结论的后半部分可知, 存在充分大的正数 $\omega_0 > 0$, 对满足条件 (4.25) 的无理数 $\omega > \omega_0$, 存在 $\mathcal{P}_{2\pi}$ 的一条不变闭曲线. 而系统 (4.13) 的 $t = 0$ 时刻从不变曲线上出发的解确定了坐标为 (r, θ, t) 的轨道空间 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$ 中的一个不变环面, 该不变环面上每个解都是拟周期的, 其频率为 $(\omega, \frac{1}{2}\pi)$.

注 4.5 带有非对称项 $ax^+ - bx^-$ 的振子的动力学性态常与数 $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ 的数论性质有关, 但对于带有非对称项 $a(x^+)^{\frac{1}{3}} - b(x^-)^{\frac{1}{3}}$ 的振子来说, 文 [8] 和本文的结果表明, 其动力学性态似乎与 a 和 b 的数论性质并没有大的关系. 我们的结论也表明, 由于 $a(x^+)^{\frac{1}{3}} - b(x^-)^{\frac{1}{3}}$ 的非线性性质比 $ax^+ - bx^-$ 强很多, 就拉格朗日稳定性而言, 并不需要类似于文 [9] 中的连接 $\varphi(x)$ 与 $p(t)$ 的关系 $\mathcal{A}_p(\theta) \neq \frac{\pi}{m} \{ \frac{1}{a} \phi(+\infty) - \frac{1}{b} \phi(-\infty) \}$ 这样的条件.

参 考 文 献

- [1] Alonso M. J., Ortega R., Roots of unity and unbounded motions of an asymmetric oscillator, *J. Differ. Equ.*, 1998, **143**: 201–220.
- [2] Dieckerhoff R., Zehnder E., Boundedness for solutions via the twist-theorem, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci.*, 1987, **14**: 79–95.
- [3] Jiao L., Piao D. X., Wang Y. Q., Boundedness of the general semilinear Duffing equations via the twist-theorem, *J. Diff. Equ.*, 2012, **252**: 91–113.
- [4] Lazer A. C., McKenna P. J., Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridge: some new connections with nonlinear analysis, *SIAM Rev.*, 1990, **32**(4): 537–578.
- [5] Liu B., Boundedness in asymmetric oscillations, *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **231**: 355–373.
- [6] Moser J., On invariant curves of area preserving mappings of an annulus, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. II*, 1962, **1962**: 1–20.
- [7] Ortega R., Asymmetric oscillators and twist mappings, *J. Lond. Math. Soc.*, 1996, **53**: 325–342.
- [8] Wang X. M., Aubry–Mather sets for sublinear asymmetric Duffing equations (in Chinese), *Sci. Sin. Math.*, 2012, **42**(1): 13–21.
- [9] Wang X. P., Invariant tori and boundedness in asymmetric oscillations, *Acta. Math. Sin. Engl. Ser.*, 2003, **19**: 765–782.
- [10] Wang Z. H., Wang Y. Q., Li H., Boundedness of solutions for Duffing equations with asymmetric superlinear restoring terms, *Chin. Ann. Math. Ser. A*, 2002, **23**(2): 187–196.
- [11] You J. G., Boundedness for solutions of superlinear Duffing equations via the twist theorem, *Sci. China Ser. A*, 1992, **35**(4): 399–412.