第64卷第6期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.64, No.6
2021年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)06-0959-08 **文献标识码: A**

一类 Filiform 李代数 Q_n 的自同构群

刘丽娜 唐黎明

哈尔滨师范大学数学科学学院 哈尔滨 150025
E-mail: 1959769927@qq.com; limingtang@hrbnu.edu.cn

摘 要 本文利用 filiform 李代数 Q_n 的极小忠实表示, 获得了 Q_n 的自同构群的子群, 包括内自同构群, 中心自同构群, 对合自同构群, 外自同构群.

关键词 李代数; filiform 李代数; 自同构群
MR(2010) 主题分类 17B30, 17B40
中图分类 O152.5

Automorphism Groups of a Series of Filiform Lie Algebras Q_n

Li Na LIU Li Ming TANG

School of Mathematical, Harbin Normal University,
Harbin 150025, *P. R. China*
E-mail: 1959769927*@qq.com; limingtang@hrbnu.edu.cn*

Abstract In this paper, using the minimal faithful representation of Q_n, we characterize some subgroups of automorphism groups of Q_n, including inner automorphism groups, central automorphism groups, involution automorphism groups and outer automorphism groups.

Keywords Lie algebras; filiform Lie algebras; automorphism groups
MR(2010) Subject Classification 17B30, 17B40
Chinese Library Classification O152.5

1 引言

Filiform 李代数是一类重要的李代数, 众多学者都对此进行了深入研究. 2015 年, 王恒泰与黄崇辉 [11] 给出了 filiform 李代数 L_n 的李 triple 导子的分解和 L_n 的玻色子表示结构与费米子表示结构. 2016 年, Bahturin 等人 [1] 利用 filiform 李代数上的阿贝尔群, 给出了秩为 $1, 2$ 的 filiform 李代数的分类. 2017 年, Tsartsaflis [10] 得出 filiform 李代数 L_n 与 R_n 在特征为 2 的域上有相同的贝蒂数, 而且还计算出 $\mathbb{Z}_2$ 上 L_n 与 R_n 的前三个贝蒂数 [7]. 2019 年, Karimjanov 与 Ladra [5] 确定了 filiform 李代数 R_n, Q_n, W_n 的极小忠实表示. 李代数自同构是李代数结构理

收稿日期: 2020-06-16; 接受日期: 2020-10-19
基金项目: 国家自然科学基金项目 (12001141, 11971134); 黑龙江省自然科学基金项目 (JQ2020A002)
通讯作者: 唐黎明

论中的重要研究课题, 它也是微分几何、理论物理等其它领域中的重要研究工具. 2001 年, 曹佑安 [2] 确定了某交换环上严格上三角矩阵李代数的自同构群. 2003 年, 曹佑安与谭作文 [3] 证明了交换环上严格上三角矩阵李代数的自同构群可以由几类其自同构群的子群确定. 2006 年, 任斌 [9] 确定了以拟模型线状李代数为幂零根基的可解完备李代数的自同构群. 2011 年, 欧世坤等人 [8] 明确了交换环上严格上三角矩阵乘法半群自同构的具体表达形式; 同年, 吴明忠 [12] 确定了 filiform 李代数 R_n 的导子与自同构群的矩阵形式, 找到了具有 filiform 李代数 R_n 幂零根的不可分解的李代数, 并且证明了该可解李代数是完备的. 2018 年, 刘蕾与唐黎明 [6] 研究了 Heisenberg 李 (超) 代数的自同构群, 利用了 Heisenberg 李 (超) 代数与线性李 (超) 代数之间的同构, 获得了 Heisenberg 李 (超) 代数的自同构群的子群, 包括内自同构群、中心自同构群、对合自同构群.

本文利用 Q_n 的极小忠实表示, 获得了 Q_n 的自同构群的子群, 包括内自同构群、中心自同构群、对合自同构群、外自同构群.

定义 1.1 [4] 设 L 为域 $\mathbb{F}$ 上的一个向量空间, 有一个运算 $L\times L\to L$, 记为 $(x,y)\mapsto[x,y]$, 如果满足:

(1) 方括号运算是双线性的;

(2) $[x,x]=0, \forall x\in L$;

(3) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0, \forall x,y,z\in L$,

则这个运算称为 x 和 y 的方括号或换位子 (亦称李乘运算), 且称 L 为 $\mathbb{F}$ 上的一个李代数.

定义 1.2 [5] 设 L 是有限维李代数, 有如下理想列:

$$L^1=L,\quad L^2=[L,L],\ \ldots,\ L^{i+1}=[L,L^i].$$

若存在 $s\in\mathbb{N}$, 有 $L^s=0$, 则称 L 为幂零的.

定义 1.3 [5] 一个李代数 L 被称为是 filiform 李代数, 如果 $\dim L^i=n-i$, 其中 $n=\dim L$, $2\le i\le n$.

设 $\{x_1,\ldots,x_{2s}\}$ 是 filiform 李代数 Q_n $(n=2s, s\ge 3)$ 的一个基, 李运算给出:

$$[x_1,x_i]=-[x_i,\,x_1]=x_{i+1},\ \ 2\le i\le 2s-2;$$
$$[x_{2s+1-i},x_i]=-[x_i,\,x_{2s+1-i}]=(-1)^i x_{2s},\ \ 2\le i\le s,$$

其余基元素之间的李运算为 0.

定义 1.4 [4] 设 L 是域 $\mathbb{F}$ 上的李代数, 如果 A 为李代数的线性自同构, 且满足

$$A[x,y]=[A(x),A(y)],\quad \forall x,y\in L,$$

则称 A 为李代数 L 的自同构. L 的所有自同构构成一个群, 称为 L 的自同构群, 记作 $\mathrm{Aut}(L)$.

引理 1.5 [5] 设 Q_n $(n=2s)$ 是域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维 filiform 李代数, $\{x_1,\ldots,x_{2s}\}$ 是它的一个基, 则 φ 为 Q_n 的一个极小忠实表示:

$$\varphi: Q(n)\to \mathrm{gl}(n),$$
$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_{2s}x_{2s}\mapsto\begin{pmatrix}0&a_2&-a_3&\cdots&a_{2s-2}&-a_{2s-1}&-2a_{2s}\\0&0&a_1&\cdots&0&0&a_{2s-1}\\0&0&0&\cdots&0&0&a_{2s-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&a_1&a_3\\0&0&0&\cdots&0&0&a_2\\0&0&0&\cdots&0&0&0\end{pmatrix}.$$

2 主要定理及其证明

约定 e 为单位矩阵, e_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1 而其余元素为 0 的矩阵.

定理 2.1 设 Q_n $(n=2s)$ 是一个 n 维 filiform 李代数, 取

$$\alpha=e+\sum_{i=2}^{2s-1}b_i(e_{2s+1-i,2s}+(-1)^ie_{1i})-2b_{2s}e_{1,2s},\quad b_i\in\mathbb{C}, \tag{2.1}$$

则 α 可逆. 设映射

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha: Q_n&\to Q_n,\\ x&\mapsto\sigma_\alpha(x),\end{aligned}$$

其中 $\sigma_\alpha(x)=\alpha x\alpha^{-1}$, 则 σ_α 是 Q_n 的一个自同构. 令

$$G=\left\{\sigma_\alpha\,\middle|\,\forall\,\alpha=e+\sum_{i=2}^{2s-1}b_i(e_{2s+1-i,2s}+(-1)^ie_{1i})-2b_{2s}e_{1,2s},b_i\in\mathbb{C}\right\},$$

则 G 是 $\mathrm{Aut}(Q_n)$ 的子群.

证明 由已知

$$\alpha=e+\sum_{i=2}^{2s-1}b_i(e_{2s+1-i,2s}+(-1)^ie_{1i})-2b_{2s}e_{1,2s},$$

则有

$$\alpha^{-1}=e-\sum_{i=2}^{2s-1}b_i(e_{2s+1-i,2s}+(-1)^ie_{1i})+2b_{2s}e_{1,2s}.$$

由引理 1.5 设

$$x=a_1\sum_{i=2}^{2s-2}e_{i,i+1}+\sum_{i=2}^{2s-1}a_i(e_{2s+1-i,2s}+(-1)^ie_{1i})-2a_{2s}e_{1,2s},$$

则有

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(x)=x&+a_1\sum_{i=2}^{2s-2}b_i(e_{2s-i,2s}+(-1)^ie_{1,i+1})+\sum_{i=2}^{2s-1}(-1)^i(b_ia_{2s+1-i}-a_ib_{2s+1-i})e_{1,2s}\\&-a_1\sum_{i=2}^{2s-2}(-1)^ib_ib_{2s-i}e_{1,2s}\in Q_n,\end{aligned}$$

故 σ_α 是映射. $\forall x\in Q_n$, 存在 $\alpha^{-1}x\alpha\in Q_n$, 使得 $\sigma_\alpha(\alpha^{-1}x\alpha)=x$. 因此 σ_α 是满射. 对任意的

$$\sigma_\alpha(x_1)=\alpha x_1\alpha^{-1},\quad\sigma_\alpha(x_2)=\alpha x_2\alpha^{-1},$$

当 $\sigma_\alpha(x_1)=\sigma_\alpha(x_2)$ 时, 可得 $x_1=x_2$. 因此 σ_α 是单射.

$\forall\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, $\forall\,x_1,x_2\in Q_n$, 可得

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&=\alpha(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\alpha^{-1}\\&=\lambda_1\alpha x_1\alpha^{-1}+\lambda_2\alpha x_2\alpha^{-1}=\lambda_1\sigma_\alpha(x_1)+\lambda_2\sigma_\alpha(x_2).\end{aligned}$$

因此 σ_α 是线性变换. 故 σ_α 是 Q_n 的一个同构映射.

$\forall\, x_1, x_2 \in Q_n$, 可得

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha([x_1,x_2]) &= \sigma_\alpha(x_1x_2 - x_2x_1) = \alpha(x_1x_2 - x_2x_1)\alpha^{-1} = \alpha x_1x_2\alpha^{-1} - \alpha x_2x_1\alpha^{-1},\\ \sigma_\alpha(x_1),\sigma_\alpha(x_2)] &= [\alpha x_1\alpha^{-1}, \alpha x_2\alpha^{-1}] = \alpha x_1\alpha^{-1}\alpha x_2\alpha^{-1} - \alpha x_2\alpha^{-1}\alpha x_1\alpha^{-1}\\ &= \alpha x_1x_2\alpha^{-1} - \alpha x_2x_1\alpha^{-1}.\end{aligned}$$

因此

$$\sigma_\alpha([x_1,x_2]) = [\sigma_\alpha(x_1), \sigma_\alpha(x_2)],$$

故 σ_α 是 Q_n 的一个自同构.

$\forall\, \sigma_\alpha, \sigma_\beta \in G, \forall\, x \in Q_n$, 可得

$$\sigma_\alpha\sigma_\beta(x) = \alpha(\beta x\beta^{-1})\alpha^{-1} = \alpha\beta x(\alpha\beta)^{-1} = \sigma_{\alpha\beta}(x).$$

因此 $\sigma_\alpha\sigma_\beta = \sigma_{\alpha\beta} \in G$. $\forall\, \sigma_\alpha \in G, \forall\, x \in Q_n$, 可得

$$\sigma_\alpha\sigma_{\alpha^{-1}}(x) = \sigma_\alpha(\alpha^{-1}x(\alpha^{-1})^{-1}) = \alpha(\alpha^{-1}x(\alpha^{-1})^{-1})\alpha^{-1} = x.$$

因此 $\sigma_{\alpha^{-1}} = \sigma_\alpha^{-1} \in G$. 故 G 是 $\mathrm{Aut}(Q_n)$ 子群. 证毕.

定义 2.2 Q_n 的自同构 σ_α 称为 Q_n 的内自同构

$$G = \left\{\sigma_\alpha \,\middle|\, \forall\, \alpha = e + \sum_{i=2}^{2s-1} b_i(e_{2s+1-i,2s} + (-1)^i e_{1i}) - 2b_{2s}e_{1,2s}, b_i \in \mathbb{C}\right\},$$

称为 Q_n 的内自同构群.

定理 2.3 设 Q_n $(n = 2s)$ 是一个 n 维 filiform 李代数, 取 $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$, 设映射

$$\begin{aligned}\mu_c : Q_n &\to Q_n,\\ x &\mapsto \mu_c(x),\end{aligned}$$

其中 $\mu_c(x) = x + (c_1a_2 + c_2a_1)e_{1,2s}$, 则 μ_c 是 Q_n 的一个自同构. 令 $S = \{\mu_c \,|\, \forall\, c \in \mathbb{C}^2\}$, 则 S 是 $\mathrm{Aut}(Q_n)$ 的子群.

证明 $\forall\, x \in Q_n$, 有

$$\mu_c(x) = x + (c_1a_2 + c_2a_1)e_{1,2s} \in Q_n,$$

故 μ_c 是映射. $\forall\, x \in Q_n$, 存在 $x - (c_1a_2 + c_2a_1)e_{1,2s} \in Q_n$, 使得

$$\mu_c(x - (c_1a_2 + c_2a_1)e_{1,2s}) = x.$$

因此 μ_c 是满射. 对任意的

$$\begin{aligned}\mu_c(x_1) &= x_1 + (c_1a_2 + c_2a_1)e_{1,2s},\\ \mu_c(x_2) &= x_2 + (c_1b_2 + c_2b_1)e_{1,2s},\end{aligned}$$

当 $\mu_c(x_1) = \mu_c(x_2)$ 时, 可得

$$x_1 = x_2, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2.$$

因此 μ_c 是单射. $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \forall\, x_1, x_2 \in Q_n$, 可得

$$\begin{aligned}\mu_c(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) &= \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + (c_1(\lambda_1a_1 + \lambda_2b_1) + c_2(\lambda_1a_2 + \lambda_2b_2))e_{1,2s}\\ &= \lambda_1(x_1 + (c_1a_1 + c_2a_2)e_{1,2s}) + \lambda_2(x_2 + (c_1b_1 + c_2b_2)e_{1,2s})\\ &= \lambda_1\mu_c(x_1) + \lambda_2\mu_c(x_2).\end{aligned}$$

因此 μ_c 是线性变换. 故 μ_c 是 Q_n 的一个同构映射.

$\forall\, x_1, x_2 \in Q_n$, 可得

$$\begin{aligned}
&\mu_c([x_1,x_2]) = [x_1,x_2],\\
&[\mu_c(x_1),\mu_c(x_2)] = [x_1+(c_1a_2+c_2a_1)e_{1,2s}, x_2+(c_1b_2+c_2b_1)e_{1,2s}]\\
&\qquad = [x_1,x_2]+[x_1,(c_1b_2+c_2b_1)e_{1,2s}]+[(c_1a_2+c_2a_1)e_{1,2s},x_2]\\
&\qquad\quad +[(c_1a_2+c_2a_1)e_{1,2s},(c_1b_2+c_2b_1)e_{1,2s}]\\
&\qquad = [x_1,x_2].
\end{aligned}$$

因此

$$\mu_c([x_1,x_2]) = [\mu_c(x_1),\mu_c(x_2)],$$

故 μ_c 是 Q_n 的一个自同构.

$\forall\, \mu_c, \mu_d \in S$, $\forall\, x \in Q_n$, 设 $d=(d_1,d_2)\in\mathbb{C}^2$, 可得

$$\begin{aligned}
\mu_c\mu_d(x) &= \mu_c(x+(d_1a_2+d_2a_1)e_{1,2s})\\
&= x+((c_1+d_1)a_2+(c_2+d_2)a_1)e_{1,2s}\\
&= \mu_{c+d}(x).
\end{aligned}$$

因此 $\mu_c\mu_d=\mu_{c+d}\in S$. $\forall\, \mu_c\in S$, $\forall\, x\in Q_n$, 可得

$$\begin{aligned}
\mu_c\mu_{-c}(x) &= \mu_c(x+(-c_1a_2-c_2a_1)e_{1,2s})\\
&= x+(-c_1a_2-c_2a_1)e_{1,2s}+(c_1a_2+c_2a_1)e_{1,2s}\\
&= x.
\end{aligned}$$

因此 $\mu_{-c}=\mu_c^{-1}\in S$. 故 S 是 $\mathrm{Aut}(Q_n)$ 子群. 证毕.

定义 2.4 Q_n 的自同构 μ_c 称为 Q_n 的中心自同构, $S=\{\mu_c\,|\,\forall\, c\in\mathbb{C}^2\}$ 称为 Q_n 的中心自同构群.

定理 2.5 设 Q_n $(n=2s)$ 是一个 n 维 filiform 李代数, 取 $\gamma=e_{1,2s}+e_{2,2s-1}+\cdots+e_{2s,1}$, 设映射

$$\begin{aligned}
\omega_0 : Q_n &\to Q_n,\\
x &\mapsto \omega_0(x),
\end{aligned}$$

其中 $\omega_0(x)=-\gamma x'\gamma$, 则 ω_0 是 Q_n 的一个自同构. 令 $W=\{\iota,\omega_0\}$, 其中 ι 是恒等变换, 则 W 是 $\mathrm{Aut}(Q_n)$ 的子群.

证明 由已知得 $\gamma^2=e$, $\gamma'=\gamma$. $\forall\, x\in Q_n$, 有

$$\omega_0(x)=-\gamma x'\gamma\in Q_n,$$

故 ω_0 是映射. $\forall\, x\in Q_n$, 存在 $-\gamma x'\gamma\in Q_n$, 使得

$$\omega_0(-\gamma x'\gamma)=x.$$

因此 ω_0 是满射. 对任意的

$$\omega_0(x_1)=x_1+(c_1a_2+c_2a_1)e_{1,2s},$$

$$\omega_0(x_2)=x_2+(c_1b_2+c_2b_1)e_{1,2s},$$

当 $\omega_0(x_1)=\omega_0(x_2)$ 时, 可得

$$x_1=x_2,\quad a_1=b_1,\quad a_2=b_2.$$

因此 ω_0 是单射. $\forall\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, $\forall\,x_1,x_2\in Q_n$, 可得

$$\begin{aligned}\omega_0(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&=-\gamma(\lambda_1x_1'+\lambda_2x_2')\gamma\\&=\lambda_1(-\gamma x_1'\gamma)+\lambda_2(-\gamma x_2'\gamma)\\&=\lambda_1\omega_0(x_1)+\lambda_2\omega_0(x_2).\end{aligned}$$

因此 ω_0 是线性变换. 故 ω_0 是 Q_n 的一个同构映射.

$\forall\,x_1,x_2\in Q_n$, 可得

$$\begin{aligned}\omega_0([x_1,x_2])&=\omega_0(x_1x_2-x_2x_1)=-\gamma(x_1x_2-x_2x_1)'\gamma\\&=-\gamma x_2'x_1'\gamma+\gamma x_1'x_2'\gamma,\\ [\omega_0(x_1),\omega_0(x_2)]&=[-\gamma x_1'\gamma,-\gamma x_2'\gamma]\\&=(-\gamma x_1'\gamma)(-\gamma x_2'\gamma)-(-\gamma x_2'\gamma)(-\gamma x_1'\gamma)\\&=\gamma x_1'x_2'\gamma-\gamma x_2'x_1'\gamma.\end{aligned}$$

因此

$$\omega_0([x_1,x_2])=[\omega_0(x_1),\omega_0(x_2)],$$

故 ω_0 是 Q_n 的一个自同构.

$\forall\,\omega_0\in W$, $\forall\,x\in Q_n$, 可得

$$\omega_0\omega_0(x)=\omega_0(-\gamma x'\gamma)=-\gamma(-\gamma x'\gamma)'\gamma=x.$$

因此

$$\omega_0^2=\iota\in W.$$

故 W 是 $\mathrm{Aut}(Q_n)$ 子群. 证毕.

定义 2.6 Q_n 的自同构 ω_0 称为 Q_n 的对合自同构, $W=\{\iota,\omega_0\}$ 称为 Q_n 的对合自同构群.

定理 2.7 设 Q_n $(n=2s)$ 是一个 n 维 filiform 李代数, 映射

$$\begin{aligned}\xi_b:Q_n&\to Q_n,\\ x&\mapsto\xi_b(x),\end{aligned}$$

其中 $\xi_b(x)=x+ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})$, $b\in\mathbb{C}$, 则 ξ_b 是 Q_n 的一个自同构. 令 $U=\{\xi_b\,|\,\forall\,b\in\mathbb{C}\}$, 则 U 是 $\mathrm{Aut}(Q_n)$ 的子群.

证明 $\forall\,x\in Q_n$, 有

$$\xi_b(x)=x+ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})\in Q_n,$$

故 μ_c 是映射. $\forall\,x\in Q_n$, 存在 $x-ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})\in Q_n$, 使得

$$\xi_b(x-ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1}))=x.$$

因此 μ_c 是满射. 对任意的

$$\begin{aligned}\xi_b(x_1)&=x_1+ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1}),\\ \xi_b(x_2)&=x_2+bc_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1}),\end{aligned}$$

当 $\xi_b(x_1)=\xi_b(x_2)$ 时, 可得

$$x_1=x_2,\quad a_2=c_2.$$

因此 ξ_b 是单射. $\forall\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, $\forall\,x_1,x_2\in Q_n$, 可得

$$\begin{aligned}\xi_b(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+b(\lambda_1a_2+\lambda_2c_2)(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})\\&=\lambda_1(x_1+ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1}))+\lambda_2(x_2+bc_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1}))\\&=\lambda_1\xi_b(x_1)+\lambda_2\xi_b(x_2).\end{aligned}$$

因此 ξ_b 是线性变换. 故 ξ_b 是 Q_n 的一个同构映射.

$\forall\,x_1,x_2\in Q_n$, 可得

$$\xi_b([x_1,\,x_2])=[x_1,x_2],$$

$$\begin{aligned}[\xi_b(x_1),\,\xi_b(x_2)]&=[x_1+ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1}),x_2+bc_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})]\\&=[x_1,x_2]+[x_1,bc_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})]+[ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1}),x_2]\\&\quad+[ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1}),bc_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})]\\&=[x_1,x_2]+ba_2c_2e_{1,2s}-ba_2c_2e_{1,2s}+0\\&=[x_1,x_2].\end{aligned}$$

因此

$$\xi_b([x_1,x_2])=[\xi_b(x_1),\xi_b(x_2)].$$

故 ξ_b 是 Q_n 的一个自同构.

$\forall\,\xi_b,\xi_d\in U$ $(b,d\in\mathbb{C})$, $\forall\,x\in Q_n$, 可得

$$\begin{aligned}\xi_b\xi_d(x)&=\xi_b(x+da_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1}))\\&=x+da_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})+ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})\\&=x+(b+d)a_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})\\&=\mu_{b+d}(x).\end{aligned}$$

因此 $\xi_b\xi_d=\xi_{b+d}\in U$. $\forall\,\xi_b\in U$, $\forall\,x\in Q_n$, 可得

$$\begin{aligned}\xi_b\xi_{-b}(x)&=\xi_b(x-ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1}))\\&=x-ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})+ba_2(e_{2,2s}-e_{1,2s-1})\\&=x.\end{aligned}$$

因此

$$\xi_{-b}=\xi_b^{-1}\in S.$$

故 U 是 $\mathrm{Aut}(Q_n)$ 子群. 证毕.

定义 2.8 Q_n 的自同构 ξ_b 称为 Q_n 的外自同构, $U=\{\xi_b\,|\,\forall\,b\in\mathbb{C}\}$ 称为 Q_n 的外自同构群.

参 考 文 献

[1] Bahturin Y., Goze M., Remm E., Group gradings on filiform Lie algebra, *Comm. Algebra*, 2016, **44**(1): 40–62.

[2] Cao Y. A., Automorphisms of the Lie Algebra of Strictly Upper Triangular Matrices over Certain Commutative Rings, *Linear Algebra Appl.*, 2001, **329**: 175–187.

[3] Cao Y. A., Tan Z. W., Automorphisms of the Lie algebra of strictly upper triangular matrices over a commutative ring, *Linear Algebra Appl.*, 2003, **360**: 105–122.

[4] Humphreys J. E., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer, New York, 1972.

[5] Karimjanov I. A., Ladra M., Minimal representations of filiform Lie algebras and their application for construction of Leibniz algebras, *J. Geom. Phys.*, 2019, **144**: 235–244.

[6] Liu L., Tang L. M., The automorphism groups of Heisenberg Lie (super) algebras (in Chinese), *J. Math.*, 2018, **38**(3): 502–510.

[7] Nikolayevsky Y., Tsartsaflis I., Cohomology of $\mathbb{N}$-graded Lie algebras of maximal class over $\mathbb{Z}_2$, *J. Lie Theory*, 2017, **27**: 529–544.

[8] Ou S. K., Fan L. J., Wang D. Y., Multiplicative semigroup automorphisms of strictly triangular matrices over a commutative ring (in Chinese), *Adv. Math.*, 2011, **40**(5): 621–630.

[9] Ren B., Automorphism group of solvable complete Lie algebras with quasi filiform radical, *J. Univ. Sci. Technol. Suzhou* (*Natur. Sci.*), 2006, **23**(3): 16–20.

[10] Tsartsaflis I., On the Betti numbers of filiform Lie algebras over fields of characteristic two, *Rev. Un. Mat. Argentina*, 2017, **58**: 95–106.

[11] Wang H. T., Huang C. H., Lie triple derivations and bosonic and fernionic representations for filiform Lie algebra L_n, *J. Math. Sci.*, 2015, **31**: 43–55.

[12] Wu M. Z., The solvable Lie algebras with filiform R_n nilradicals, *Chinese Quart. J. Math.*, 2011, **26**(1): 100–107.