第64卷第6期 数学学报中文版 Vol.64, No.6
2021年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)06-0947-12 **文献标识码: A**

形变 $\mathfrak{bms}_3$ 代数上的左对称代数结构

余 意 孙建才

上海大学理学院数学系 上海 200444
E-mail: 793819382@qq.com; jcsun@shu.edu.cn

摘 要 本文主要通过对具有一定自然阶化条件的形变 $\mathfrak{bms}_3$ 代数上的相容左对称代数结构的分类讨论, 刻画了形变 $\mathfrak{bms}_3$ 代数的相容左对称代数结构.

关键词 形变 $\mathfrak{bms}_3$ 代数; 左对称代数; 李代数
MR(2010) 主题分类 46B20
中图分类 O177.2

Left-symmetric Algebra Structures on the Deformed $\mathfrak{bms}_3$ Algebra

Yi YU Jian Cai SUN

Department of Mathematics, Shanghai University,
Shanghai 200444, *P. R. China*
E-mail: 793819382@*qq.com*; *jcsun@shu.edu.cn*

Abstract We mainly determine the compatible left-symmetric algebra structures on the deformed $\mathfrak{bms}_3$ algebra with some natural grading conditions by classified the compatible left-symmetric algebra structures on the deformed $\mathfrak{bms}_3$ algebra.

Keywords the deformed $\mathfrak{bms}_3$ algebra; left-symmetric algebra; Lie algebra
MR(2010) Subject Classification 46B20
Chinese Library Classification O177.2

1 引言

众所周知, 左对称代数是一类李容许代数, 按照其换位运算构成一个李代数. 左对称代数的最早研究可以追溯到 1896 年, Cayley 在文 [7] 中对有根树代数的研究, 还有文 [26] 中对凸齐次锥体的研究, 文 [15] 中对结合环的上同调结构的研究, 以及文 [17] 和 [3] 中对李群上的仿射流形和仿射结构的研究.

左对称代数在数学和物理学的许多不同领域中都发挥着重要作用, 包括文 [2, 22] 中的李代数的相空间, 文 [1, 11, 12] 中的李群和李代数, 文 [3, 13, 16] 中的经典和量子 Yang-Baxter 方程, 文 [14] 中的量子场论等. 有关左对称代数和低维左对称代数的起源和应用的更多信息见文 [4, 5].

收稿日期: 2020-03-02; 接受日期: 2020-10-19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11671247, 11931009)

由于 $\mathbb{C}$ 上的有限维半单李代数上没有相容的左对称代数结构, 因此, 我们必须使用其 sub-adjacent 李代数的表示理论作为研究左对称代数的一种工具. 与左对称代数有关的一个重点是确定李代数上所有相容的左对称代数结构. Virasoro 代数作为一种重要的李代数, 在无穷维情况下具有许多相容的左对称代数结构 [6, 10, 18, 19, 21]. 特别地, 文 [19] 对 Virasoro 代数上的阶化左对称代数结构进行了分类. 进一步, 文 [18] 证明了超 Virasoro 代数上的相容左对称超代数结构满足自然阶化条件.

文 [9, 10, 23] 分别研究了 W- 代数 $W(2,2)$, twisted Heisenberg-Virasoro 代数和 Witt 代数上的相容左对称代数结构, 并且证明了具有一定的自然阶化条件. 同时, Witt 代数上的相容左对称代数结构满足某些非阶化条件在文 [19] 中做了一个分类. 除此之外, 对于特定条件下的 $N=2$ 的 Ramond 和 Neveu–Schwarz 超共形代数, 作者对其上的相容的左对称超代数结构进行了分类, 从而在文 [24] 中推广了关于 Witt, Virasoro 和超 Virasoro 代数的相应结果.

基于以上研究, 我们将确定形变 $\mathfrak{bms}_3$ 代数上的相容左对称代数结构, 其具体概念出自文 [6], 在此处表示为 $\mathscr{B}$. 我们还知道 $\mathscr{B}$ 对应于 $(2+1)$ 维 Maxwell 代数的无穷维提升.

基于此, 我们给出具有 $\mathbb{C}$- 基 $\{L_m, P_m, Z_m, c_1, c_2, c_3 \,|\, m\in\mathbb{Z}\}$ 的无限维李代数带有以下非平凡的李括积:

$$\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c_1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0},\\
&[L_m, P_n] = (m-n)P_{m+n} + \frac{c_2}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0},\\
&[P_m, P_n] = (m-n)Z_{m+n} + \frac{c_3}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0},\\
&[L_m, Z_n] = (m-n)Z_{m+n} + \frac{c_3}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0},\\
&[P_m, Z_n] = 0,\\
&[Z_m, Z_n] = 0,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $m,n\in\mathbb{Z}$, c_1,c_2,c_3 是 $\mathscr{B}$ 的中心元素.

现在概述本文的主要结果. 第 2 节从左对称代数的定义和若干结论开始, 然后给出主要结果. 第 3 节的第一小节根据某些自然假设对去中心的 $\mathscr{B}$ 上的左对称代数结构进行分类. 第二小节, 将在前面的基础上讨论左对称代数的非平凡中心扩张.

本文分别用 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{Z}$ 表示复数集和整数集. 除非另有说明, 否则所有李代数和左对称代数都定义在 $\mathbb{C}$ 上, 假设 $\epsilon\in\mathbb{C}$, 具有以下特性: $\mathrm{Re}\,\epsilon>0,\ \epsilon^{-1}\notin\mathbb{Z}$ 或者 $\mathrm{Re}\,\epsilon=0,\ \mathrm{Im}\,\epsilon>0$.

2 主要结果

本节首先回顾一下文 [9] 和 [10] 中左对称代数的一些定义和符号.

定义 2.1 设 A 为 $\mathbb{C}$ 上带有双线性乘积 $(x,y)\mapsto xy$ 的向量空间. 如果对于任何 $x,y,z\in A$,

$$(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$$

都关于 x,y 对称, 即

$$(x,y,z) = (y,x,z) \ \text{ 或 } \ (xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz),$$

则将 A 称为左对称代数.

左对称代数上的模的定义是自然的, 可见文 [9]. 此外, 对于任何左对称代数 A, 其底空间可被赋予自然的 A- 模结构:

$$(a,m)\mapsto am,\quad (m,a)\mapsto ma,\quad 其中\ \ a,m\in A.$$

命题 2.2 设 A 为左对称代数, 对于任何 $x\in A$, 将 L_x 表示左乘法算子, 即对于任何 $y\in A$, $L_x(y)=xy$. 那么我们得到以下结果:

(1) $[x,y]=xy-yx$, 其中 $x,y\in A$.

定义了一个李代数 $G(A)$, 称为 A 的次相邻李代数, A 也称为李代数 $G(A)$ 上的相容左对称代数结构.

(2) 令 $L:G(A)\to \mathrm{gl}(A)$, $x\mapsto L_x$, 则 (L,A) 给出了李代数 $G(A)$ 的一个表示, 即 $[L_x,L_y]=L_{[x,y]}$, 其中 $x,y\in A$. 我们称其为李代数 $G(A)$ 的正则表示.

令 G 为李代数, $\rho:G\to \mathrm{gl}(V)$ 为 G 的表示. 一个 1-cocycle $q:G\to V$ 是与 ρ 相关的向量空间上的线性映射 (用 (ρ,q)) 表示), 满足 $q[x,y]=\rho(x)q(y)-\rho(y)q(x)$, 其中 $x,y\in G$. 设 A 为左对称代数, $\rho:G(A)\to\mathrm{gl}(V)$ 为其 sub-adjacent 李代数的表示. 如果 g 是从 A 到 V 的同构, 则 g 是一个与 ρ 相关的 $G(A)$ 的 1-cocycle. 在任何李代数上并不总是有相容的左对称代数结构.

现在给出李代数具有相容的左对称代数机构的一个充分必要条件.

命题 2.3 令 G 为一个李代数. 那么, G 上有一个相容的左对称代数结构, 当且仅当存在 G 的一个双射 1-cocycle. 实际上, 让 (ρ,q) 是 G 的一个双射 1-cocycle, 则

$$x*y=q^{-1}\rho(x)q(y),\quad 其中\ \ x,y\in G,$$

反之, 对于左对称代数 A, 恒等变换 id 是与正则表示 L 相关联的 $G(A)$ 的一个 1-cocycle.

为避免混淆, 对于李代数 G, 我们用 $A(G)$ 来表示 G 上的一个相容左对称代数.

现在我们给出具有 $\mathbb{C}$- 基 $\{L_n,W_n,\ c\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ 的无限维李代数 W- 代数 $W(2,2)$ 的扩积定义:

$$\begin{aligned}[L_m,L_n]&=(m-n)L_{m+n}+\frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0},\\ [L_m,W_n]&=(m-n)W_{m+n}+\frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0},\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 $m,n\in\mathbb{Z}$, c_1,c_2,c_3 是 W- 代数 $W(2,2)$ 的中心元素.

注意到, W- 代数 $W(2,2)$ 和形变 $\mathfrak{bms}_3$ 代数的扩积定义的相似性, 为了方便起见, 我们引用了文 [9] 上 W- 代数 $W(2,2)$ 的相容左对称代数结构得到以下结果:

$\widetilde{\mathscr{W}}$ 是一个 $\mathbb{Z}$- 阶化的李代数: $\widetilde{\mathscr{W}}=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\widetilde{\mathscr{W}}_m$, 其中

$$\widetilde{\mathscr{W}}_m=\mathbb{C}L_m\oplus\mathbb{C}W_m\oplus\delta_{m,0}\mathbb{C}c,\ 其中\ m\in\mathbb{Z},$$

若 $A(\widetilde{W})$ 的乘积满足以下关系, 则具有自然的阶化条件:

$$\begin{aligned}L_mL_n&=f(m,n)L_{m+n}+\omega(L_m,L_n)c,\\ L_mW_n&=g(m,n)W_{m+n}+\omega(L_m,W_n)c,\\ W_mL_n&=h(m,n)W_{m+n}+\omega(W_m,L_n)c,\\ W_mW_n&=a(m,n)L_{m+n}+b(m,n)W_{m+n}+\omega(W_m,W_n)c,\\ cc&=cL_m=L_mc=cW_n=W_nc=0,\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 $f(m,n)$, $g(m,n)$, $h(m,n)$ 和 $\omega(\cdot,\cdot)$ 都是复数值函数.

定理 2.4 W- 代数 $W(2,2)$ 上满足关系 (2.2) 的任何左对称代数结构与由以下函数确定的左对称代数之一是同构的:

$$f(m,n)=\frac{-n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)},\quad \omega(L_m,L_n)=\frac{1}{24}(m^3-m+(\epsilon-\epsilon^{-1})m^2)\delta_{m+n,0},$$
$$a(m,n)=b(m,n)=\omega(W_m,W_n)=0$$

和

$$g(m,n)=h(m,n)=\frac{-n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)},\quad \omega(L_m,W_n)=\omega(W_m,L_n)=\frac{1}{24}(m^3-m+(\epsilon-\epsilon^{-1})m^2)\delta_{m+n,0}$$

或 $g(m,n)=m-n,\quad \omega(W_m,L_n)=h(m,n)=0,\quad \omega(L_m,W_n)=\dfrac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}$

对任意 $m,n\in\mathbb{Z}$.

易知 $\mathscr{B}$ 也是 $\mathbb{Z}$- 阶化的: $\mathscr{B}_m=\mathbb{C}L_m\oplus\mathbb{C}P_m\oplus\mathbb{C}Z_m\oplus\delta_{m,0}(\mathbb{C}c_1\oplus\mathbb{C}c_2\oplus\mathbb{C}c_3)$, 其中 $m\in\mathbb{Z}$. 自然地, 我们假设相容的左对称代数结构满足相似的阶化条件, 可以得到 $A(\mathscr{B})$ 的如下假设:

$$\begin{aligned}
L_mL_n&=a(m,n)L_{m+n}+\omega(L_m,L_n)c_1,\\
L_mP_n&=b_1(m,n)P_{m+n}+\omega(L_m,P_n)c_2,\\
P_mL_n&=b_2(m,n)P_{m+n}+\omega(P_m,L_n)c_2,\\
P_mP_n&=c(m,n)Z_{m+n}+\omega(P_m,P_n)c_3,\\
L_mZ_n&=d_1(m,n)Z_{m+n}+\omega(L_m,Z_n)c_3,\\
Z_mL_n&=d_2(m,n)Z_{m+n}+\omega(Z_m,L_n)c_3,\\
P_mZ_n&=f_1(m,n)L_{m+n}+g_1(m,n)P_{m+n}+h_1(m,n)Z_{m+n}\\
&\quad+\omega_1(P_m,Z_n)c_1+\omega_2(P_m,Z_n)c_2+\omega_3(P_m,Z_n)c_3,\\
Z_mP_n&=f_2(m,n)L_{m+n}+g_2(m,n)P_{m+n}+h_2(m,n)Z_{m+n}\\
&\quad+\omega_1(Z_m,P_n)c_1+\omega_2(Z_m,P_n)c_2+\omega_3(P_m,Z_n)c_3,\\
Z_mZ_n&=r(m,n)L_{m+n}+s(m,n)P_{m+n}+t(m,n)Z_{m+n}\\
&\quad+\omega_1(Z_m,Z_n)c_1+\omega_2(Z_m,Z_n)c_2+\omega_3(Z_m,Z_n)c_3,
\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中 $\mathscr{B}$ 中元素的所有系数都是复数值函数.

现在证明本文的主要结果.

定理 2.5 形变 $\mathfrak{bms}_3$ 代数上的任何左对称代数结构与由以下函数确定的左对称代数之一是同构的:

$$\begin{aligned}
&a(m,n)=\frac{-n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)},\\
&d_1(m,n)=m-n,\quad d_2(m,n)=0,\\
&f_1(m,n)=g_1(m,n)=h_1(m,n)=f_2(m,n)=g_2(m,n)=h_2(m,n)\\
&\qquad\qquad=r(m,n)=s(m,n)=t(m,n)=0,\\
&\omega(L_m,L_n)=\frac{1}{24}(m^3-m+(\epsilon-\epsilon^{-1})m^2)\delta_{m+n,0},\\
&\omega(L_m,Z_n)=\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0},\quad \omega(Z_m,L_n)=0,\\
&\omega_i(P_m,Z_n)=\omega_i(Z_m,P_n)=\omega_i(Z_m,Z_n)=0
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&b_1(m,n)=b_2(m,n)=\frac{-n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)},\\
&c(m,n)=-\frac{1+\epsilon n}{\epsilon},\\
&\omega(L_m,P_n)=\omega(P_m,L_n)=\frac{1}{24}(m^3-m+(\epsilon-\epsilon^{-1})m^2)\delta_{m+n,0},\\
&\omega(P_m,P_n)=\frac{(1+\epsilon n)(m^3-m)}{12\epsilon(n-m)}\delta_{m+n,0}
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
&b_1(m,n)=m-n,\quad b_2(m,n)=0,\\
&c(m,n)=\frac{1}{2}(m-n),\\
&\omega(L_m,P_n)=\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0},\quad \omega(P_m,L_n)=0,\\
&\omega(P_m,P_n)=0
\end{aligned}$$

对任意 $m,n\in\mathbb{Z}$, $1\le i\le 3$.

3　定理 2.5 的证明

证明分为两步. 其一是讨论无中心的形变第一步是讨论无中心的形变 $\mathfrak{bms}_3$ 代数的左对称代数结构, 由关系 (1.1) 定义, 其中 $c_1=c_2=c_3=0$. 其二是获得 $\mathscr{B}$ 上左对称代数的中心扩张.

第一步　无中心的情况.

$\mathscr{B}$ 的左对称代数结构的阶化条件是在关系 (2.3) 中给出的, 其中 $c_1=c_2=c_3=0$, 从而给出以下引理:

引理 3.1　由 (2.3) 的定义和 $c_1=c_2=c_3=0$ 的双线性乘积, 当且仅当在以下情况下有 $\mathscr{B}$ 上的相容左对称代数结构:

$$a(m,n)-a(n,m)=b_1(m,n)-b_1(n,m)=m-n, \tag{3.1}$$
$$c(m,n)-c(n,m)=d_1(m,n)-d_1(n,m)=m-n, \tag{3.2}$$
$$f_1(m,n)=f_1(n,m),\quad g_1(m,n)=g_1(n,m),\quad h_1(m,n)=h_1(n,m), \tag{3.3}$$
$$r_1(m,n)=r_1(n,m),\quad s_1(m,n)=s_1(n,m),\quad t_1(m,n)=t_1(n,m), \tag{3.4}$$
$$a(n,k)a(m,n+k)-a(m,k)a(n,m+k)=(m-n)a(m+n,k), \tag{3.5}$$
$$b_1(n,k)b_1(m,n+k)-b_1(m,k)b_1(n,m+k)=(m-n)b_1(m+n,k), \tag{3.6}$$
$$d_1(n,k)d_1(m,n+k)-d_1(m,k)d_1(n,m+k)=(m-n)d_1(m+n,k), \tag{3.7}$$
$$b_2(n,k)b_1(m,n+k)-a(m,k)b_2(n,m+k)=(m-n)b_2(m+n,k), \tag{3.8}$$
$$c(n,k)d_1(m,n+k)-b_1(m,k)c(n,m+k)=(m-n)c(m+n,k), \tag{3.9}$$
$$f_1(n,k)a(m,n+k)-d_1(m,k)f_1(n,m+k)=(m-n)f_1(m+n,k), \tag{3.10}$$
$$g_1(n,k)b_1(m,n+k)-d_1(m,k)g_1(n,m+k)=(m-n)g_1(m+n,k), \tag{3.11}$$
$$h_1(n,k)d_1(m,n+k)-d_1(m,k)h_1(n,m+k)=(m-n)h_1(m+n,k), \tag{3.12}$$
$$b_2(n,k)c(m,n+k)-b_2(m,k)c(n,m+k)=(m-n)d_2(m+n,k), \tag{3.13}$$

$$c(n,k)f_1(m,n+k)-c(m,k)f_1(n,m+k)=0, \tag{3.14}$$

$$c(n,k)g_1(m,n+k)-c(m,k)g_1(n,m+k)=0, \tag{3.15}$$

$$c(n,k)h_1(m,n+k)-c(m,k)h_1(n,m+k)=0, \tag{3.16}$$

$$h_1(n,k)f_1(m,n+k)-h_1(m,k)f_1(n,m+k)=(m-n)f_1(m+n,k), \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}&f_1(n,k)b_2(m,n+k)+g_1(n,k)c(m,n+k)+h_1(n,k)g_1(m,n+k)\\&\quad-f_1(m,k)b_2(n,m+k)-h_1(m,k)g_1(n,m+k)=(m-n)g_1(m+n,k),\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}&h_1(n,k)h_1(m,n+k)-g_1(m,k)c(n,m+k)-h_1(m,k)h_1(n,m+k)\\&\quad=(m-n)h_1(m+n,k),\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$d_2(n,k)d_1(m,n+k)-a_1(m,k)d_2(n,m+k)=(m-n)d_2(m+n,k), \tag{3.20}$$

$$f_2(n,k)a(m,n+k)-b_1(m,k)f_2(n,m+k)=0, \tag{3.21}$$

$$g_2(n,k)b_1(m,n+k)-b_1(m,k)g_2(n,m+k)=0, \tag{3.22}$$

$$h_2(n,k)d_1(m,n+k)-b_1(m,k)h_2(n,m+k)=0, \tag{3.23}$$

$$r(n,k)a(m,n+k)-d_1(m,k)r(n,m+k)=(m-n)r(m+n,k), \tag{3.24}$$

$$s(n,k)b_1(m,n+k)-d_1(m,k)s(n,m+k)=(m-n)s(m+n,k), \tag{3.25}$$

$$t(n,k)d_1(m,n+k)-d_1(m,k)t(n,m+k)=(m-n)t(m+n,k), \tag{3.26}$$

$$d_2(n,k)f_1(m,n+k)-b_2(m,k)f_2(n,m+k)=0, \tag{3.27}$$

$$d_2(n,k)g_1(m,n+k)-b_2(m,k)g_2(n,m+k)=0, \tag{3.28}$$

$$d_2(n,k)h_1(m,n+k)-b_2(m,k)h_2(n,m+k)=0, \tag{3.29}$$

$$f_2(n,k)b_2(m,n+k)+h_2(n,k)f_1(m,n+k)-c(m,k)f_2(n,m+k)=0, \tag{3.30}$$

$$h_2(n,k)g_1(m,n+k)-c(m,k)g_2(n,m+k)=0, \tag{3.31}$$

$$g_2(n,k)c(m,n+k)+h_2(n,k)h_1(m,n+k)-c(m,k)h_2(n,m+k)=0, \tag{3.32}$$

$$t(n,k)f_1(m,n+k)-g_1(m,k)f_2(n,m+k)-h_1(m,k)r(n,m+k)=0, \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}&r(n,k)b_2(m,n+k)+t(n,k)g_1(m,n+k)-g_1(m,k)g_2(n,m+k)\\&\quad-h_1(m,k)s(n,m+k)=0,\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}&s(n,k)c(m,n+k)+t(n,k)h_1(m,n+k)-f_1(n,k)d_2(m,n+k)\\&\quad-g_1(m,k)h_2(n,m+k)-h_1(m,k)t(n,m+k)=0,\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$d_2(n,k)r(m,n+k)-d_2(m,k)r(n,m+k)=0, \tag{3.36}$$

$$d_2(n,k)s(m,n+k)-d_2(m,k)s(n,m+k)=0, \tag{3.37}$$

$$d_2(n,k)t(m,n+k)-d_2(m,k)t(n,m+k)=0, \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}&g_2(n,k)f_2(m,n+k)+h_2(n,k)r(m,n+k)-g_2(m,k)f_2(n,m+k)\\&\quad-h_2(m,k)r(n,m+k)=0,\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}&g_2(n,k)g_2(m,n+k)+h_2(n,k)s(m,n+k)-g_2(m,k)g_2(n,m+k)\\&\quad-h_2(m,k)s(n,m+k)=0,\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}&f_2(n,k)d_2(m,n+k)+g_2(n,k)h_2(m,n+k)+h_2(n,k)t(m,n+k)\\&\qquad-f_2(m,k)d_2(n,m+k)-g_2(m,k)h_2(n,m+k)-h_2(m,k)t(n,m+k)=0,\end{aligned}\tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}&s(n,k)e_2(m,n+k)+t(n,k)u(m,n+k)+u(n,k)j_1(m,n+k)\\&\qquad-s(m,k)e_2(n,m+k)-t(m,k)u(n,m+k)-u(m,k)j_1(n,m+k)=0,\end{aligned}\tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}&s(n,k)f_2(m,n+k)+t(n,k)r(m,n+k)-s(m,k)f_2(n,m+k)\\&\qquad-t(m,k)r(n,m+k)=0,\end{aligned}\tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}&s(n,k)g_2(m,n+k)+t(n,k)s(m,n+k)-s(m,k)g_2(n,m+k)\\&\qquad-t(m,k)s(n,m+k)=0,\end{aligned}\tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}&r(n,k)d_2(m,n+k)+s(n,k)h_2(m,n+k)+t(n,k)t(m,n+k)\\&\qquad-r(m,k)d_2(n,m+k)-s(m,k)h_2(n,m+k)-t(n,k)t(n,m+k)=0,\end{aligned}\tag{3.45}$$

其中所有 $m,n,k\in\mathbb{Z}$.

根据定理 2.4, 为了在具有条件 (2.3) 的 $\mathscr{B}$ 上获得相容的左对称代数结构, 可以假设

$$a(m,n)=\frac{-n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)},\quad \text{其中 } m,n\in\mathbb{Z}.\tag{3.46}$$

此外得到由 (3.46) 定义的 $a(m,n)$ 引出的引理, 它确定了 $\mathscr{B}$ 上所有相容的左对称代数结构.

引理 3.2 对于固定的 ϵ 和由 (3.46) 定义的 $a(m,n)$, 我们有以下两种情况同时满足关系 (3.1)–(3.45):

$$\begin{aligned}a(m,n)=\frac{-n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)},\quad d_1(m,n)=m-n,\quad d_2(m,n)=0,\\f_1(m,n)=g_1(m,n)=h_1(m,n)=f_2(m,n)=g_2(m,n)=h_2(m,n)\\=r(m,n)=s(m,n)=t(m,n)=0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}b_1(m,n)=b_2(m,n)=\frac{1+\epsilon n}{1+\epsilon(m+n)},\quad c(m,n)=-\frac{1+\epsilon n}{\epsilon}\\\text{或}\quad b_1(m,n)=m-n,\quad b_2(m,n)=0,\quad c(m,n)=\frac{1}{2}(m-n)\end{aligned}$$

对所有 $m,n\in\mathbb{Z}$.

证明 易知上述引理中的所有复值函数同时满足引理 3.1 中给出的所有关系.

通过 (3.14)–(3.16), (3.21)–(3.23) 和 (3.24)–(3.26) 知

$$\begin{aligned}f_1(m,n)=g_1(m,n)=h_1(m,n)=f_2(m,n)=g_2(m,n)=h_2(m,n)\\=r(m,n)=s(m,n)=t(m,n)=0.\end{aligned}$$

情形 1 $b_1(m,n)=b_2(m,n)=d_1(m,n)=d_2(m,n)=\frac{-n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)}$.

对任意 $m,n\in\mathbb{Z}$, 有

$$C(m,n)=\frac{1+\epsilon(m+n)}{1+\epsilon n}c(m,n).$$

通过 (3.9) 有

$$-(n+k)C(n,k)+kC(n,m+k)=(m-n)C(m+n,k).\tag{3.47}$$

在 (3.47) 中取 $n=k=0$, 有 $0=mc(m,0)$. 然后我们得到

$$c(m,0)=0, \tag{3.48}$$

在 (3.47) 中取 $m=n=0$, 得到 $C(0,k)=0$, 即 $c(m,0)=c(0,m)=0$. 然而, 根据 (3.2), $c(m,0)-c(0,m)=m\neq 0$, 所以是矛盾的.

情形 2 $b_1(m,n)=b_2(m,n)=\frac{-n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)}$, $d_1(m,n)=m-n$, $d_2(m,n)=0$.

通过 (3.13) 有

$$\frac{c(m,n+k)}{1+\epsilon(n+k)}-\frac{c(n,m+k)}{1+\epsilon(m+k)}=0. \tag{3.49}$$

在 (3.47) 中取 $k=0$, 有

$$\frac{c(m,n)}{1+\epsilon n}-\frac{c(n,m)}{1+\epsilon m}=0.$$

通过 (3.2) 我们有

$$c(m,n)=-\frac{1+\epsilon n}{\epsilon}. \tag{3.50}$$

情形 3 $b_1(m,n)=m-n,\ b_2(m,n)=0,\ d_1(m,n)=d_2(m,n)=\frac{-n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)}$.

通过 (3.13) 有

$$0=-(m-n)\frac{n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)}. \tag{3.51}$$

我们很容易发现它与 $m,n\in\mathbb{Z}$ 的任意性相矛盾.

情形 4 $b_1(m,n)=d_1(m,n)=m-n,\ b_2(m,n)=d_2(m,n)=0$.

通过 (3.9) 有

$$(m-n-k)c(n,k)-(m-k)c(n,m+k)=(m-n)c(m+n,k). \tag{3.52}$$

在 (3.52) 中取 $k=n$, 我们有

$$(m-2n)c(n,n)-(m-n)c(n,m+n)=(m-n)c(m+n,n). \tag{3.53}$$

除此之外, 取 $n=0$, $m=k$, 得到 $c(m,m)=0$, 有 $c(n,n)=0$. 同时, 通过 (3.2) 得到

$$c(n,m+n)=-\frac{1}{2}m, \tag{3.54}$$

即

$$c(m,n)=\frac{1}{2}(m-n). \tag{3.55}$$

因此, 该引理成立. 证毕.

第二步 形变 $\mathfrak{bms}_3$ 代数的左对称代数结构.

本节通过确定 $\mathscr{B}$ 上左对称代数结构的中心扩张来给出形变 $\mathfrak{bms}_3$ 代数上左对称代数结构的分类. 首先, 给出以下引理:

引理 3.3 引理 3.1 中的关系所定义的乘法能在 $\mathscr{B}$ 上给出相容的左对称代数结构, 当且仅当对于 $m,n,k\in\mathbb{Z}$, $\omega_i(\cdot,\cdot)$, $1\leq i\leq 3$, 有 (3.1)–(3.45) 和以下所有恒等式成立:

$$\begin{aligned}\omega(L_m,L_n)-\omega(L_n,L_m)&=\omega(L_m,P_n)-\omega(P_n,L_m)=\omega(P_m,P_n)-\omega(P_n,P_m)\\&=\omega(L_m,Z_n)-\omega(Z_n,L_m)=\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0},\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\omega_i(P_m, Z_n) = \omega_i(Z_n, P_m), \tag{3.57}$$

$$\omega_i(Z_m, Z_n) = \omega_i(Z_n, Z_m) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.58}$$

$$a(n,k)\omega(L_m, L_{n+k}) - a(m,k)\omega(L_n, L_{m+k}) = (m-n)\omega(L_{m+n}, L_k), \tag{3.59}$$

$$b_1(n,k)\omega(L_m, P_{n+k}) - b_1(m,k)\omega(L_n, P_{m+k}) = (m-n)\omega(L_{m+n}, P_k), \tag{3.60}$$

$$d_1(n,k)\omega(L_m, Z_{n+k}) - d_1(m,k)\omega(L_n, Z_{m+k}) = (m-n)\omega(L_{m+n}, Z_k), \tag{3.61}$$

$$b_2(n,k)\omega(L_m, P_{n+k}) - a(m,k)\omega(P_n, L_{m+k}) = (m-n)\omega(P_{m+n}, L_k), \tag{3.62}$$

$$c(n,k)\omega(L_m, Z_{n+k}) - b_1(m,k)\omega(P_n, P_{m+k}) = (m-n)\omega(P_{m+n}, P_k), \tag{3.63}$$

$$f_1(n,k)\omega(L_m, L_{n+k}) - d_1(m,k)\omega_1(P_n, Z_{m+k}) = (m-n)\omega_1(P_{m+n}, Z_k), \tag{3.64}$$

$$g_1(n,k)\omega(L_m, P_{n+k}) - d_1(m,k)\omega_2(P_n, Z_{m+k}) = (m-n)\omega_2(P_{m+n}, Z_k), \tag{3.65}$$

$$h_1(n,k)\omega(L_m, Z_{n+k}) - d_1(m,k)\omega_3(P_n, Z_{m+k}) = (m-n)\omega_3(P_{m+n}, Z_k), \tag{3.66}$$

$$b_2(n,k)\omega(P_m, P_{n+k}) - b_2(m,k)\omega(P_n, P_{m+k}) = (m-n)\omega(Z_{m+n}, L_k), \tag{3.67}$$

$$c(n,k)\omega_i(P_m, Z_{n+k}) - c(m,k)\omega_i(P_n, Z_{m+k}) = (m-n)\omega_i(Z_{m+n}, P_k), \tag{3.68}$$

$$h_1(n,k)\omega_1(P_m, Z_{n+k}) - h_1(m,k)\omega_1(P_n, Z_{m+k}) = (m-n)\omega_1(Z_{m+n}, Z_k), \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned} &f_1(n,k)\omega(P_m, L_{n+k}) + h_1(n,k)\omega_2(P_m, Z_{n+k}) - f_1(m,k)\omega(P_n, L_{m+k}) \\ &\quad - h_1(m,k)\omega_2(P_n, Z_{m+k}) = (m-n)\omega_2(Z_{m+n}, Z_k), \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned} &g_1(n,k)\omega(P_m, P_{n+k}) + h_1(n,k)\omega_3(P_m, Z_{n+k}) - g_1(m,k)\omega(P_n, P_{m+k}) \\ &\quad - h_1(m,k)\omega_3(P_n, Z_{m+k}) = (m-n)\omega_3(Z_{m+n}, Z_k), \end{aligned} \tag{3.71}$$

$$d_2(n,k)\omega(L_m, Z_{n+k}) - a(m,k)\omega(Z_n, L_{m+k}) = (m-n)\omega(Z_{m+n}, L_k), \tag{3.72}$$

$$f_2(n,k)\omega(L_m, L_{n+k}) - b_1(m,k)\omega_1(Z_n, L_{m+k}) = (m-n)\omega_1(Z_{m+n}, P_k), \tag{3.73}$$

$$g_2(n,k)\omega(L_m, P_{n+k}) - b_1(m,k)\omega_2(Z_n, P_{m+k}) = (m-n)\omega_2(Z_{m+n}, P_k), \tag{3.74}$$

$$h_2(n,k)\omega(L_m, Z_{n+k}) - b_1(m,k)\omega_3(Z_n, L_{m+k}) = (m-n)\omega_3(Z_{m+n}, P_k), \tag{3.75}$$

$$t(n,k)\omega_1(P_m, Z_{n+k}) = g_1(m,k)\omega_1(Z_n, P_{m+k}) + h_1(m,k)\omega_1(Z_n, Z_{m+k}), \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned} &r\,(n,k)\omega(P_m, L_{n+k}) + t(n,k)\omega_2(P_m, Z_{n+k}) \\ &\quad = g_1(m,k)\omega_2(Z_n, P_{m+k}) + h_1(m,k)\omega_2(Z_n, Z_{m+k}), \end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned} &s\,(n,k)\omega(P_m, P_{n+k}) + t(n,k)\omega_3(P_m, Z_{n+k}) \\ &\quad = f_1(m,k)\omega(Z_n, L_{m+k}) + g_1(m,k)\omega_3(Z_n, P_{m+k}) + h_1(m,k)\omega_3(Z_n, Z_{m+k}), \end{aligned} \tag{3.78}$$

$$d_2(n,k)\omega(Z_m, Z_{n+k}) = d_2(m,k)\omega(Z_n, Z_{m+k}), \tag{3.79}$$

$$h_1(n,k)\omega_1(P_m, Z_{n+k}) = c(m,k)\omega_1(Z_n, Z_{m+k}), \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned} &g_2(n,k)\omega_1(Z_m, P_{n+k}) + h_2(n,k)\omega_1(Z_m, Z_{n+k}) \\ &\quad = g_2(m,k)\omega_1(Z_n, P_{m+k}) + h_2(m,k)\omega_1(Z_n, Z_{m+k}), \end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned} &g_2(n,k)\omega_2(Z_m, P_{n+k}) + h_2(n,k)\omega_2(Z_m, Z_{n+k}) \\ &\quad = g_2(m,k)\omega_2(Z_n, P_m + k) + h_2(m,k)\omega_2(Z_n, Z_{m+k}), \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned} &f_2(n,k)\omega(Z_m,L_{n+k})+g_2(n,k)\omega_3(Z_m,P_{n+k})+h_2(n,k)\omega_3(Z_m,Z_{n+k})\\ &\quad=f_2(m,k)\omega(Z_n,L_{m+k})+g_2(m,k)\omega_3(Z_n,P_{m+k})+h_2(m,k)\omega_3(Z_n,Z_{m+k}), \end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned} &s(n,k)\omega_1(Z_m,P_{n+k})+t(n,k)\omega_1(Z_m,Z_{n+k})\\ &\quad=s(m,k)\omega_1(Z_n,P_m+k)+t(m,k)\omega_1(Z_n,Z_{m+k}), \end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned} &s(n,k)\omega_2(Z_m,P_{n+k})+t(n,k)\omega_2(Z_m,Z_{n+k})\\ &\quad=s(m,k)\omega_2(Z_n,P_m+k)+t(m,k)\omega_2(Z_n,Z_{m+k}), \end{aligned} \tag{3.85}$$

$$\begin{aligned} &s(n,k)\omega_3(Z_m,P_{n+k})+t(n,k)\omega_3(Z_m,P_{n+k})+r(n,k)\omega(Z_m,L_{n+k})\\ &\quad=s(m,k)\omega_3(Z_n,L_{m+k})+t(m,k)\omega_3(Z_n,P_{m+k})+r(m,k)\omega(Z_n,L_{m+k}). \end{aligned} \tag{3.86}$$

根据定理 2.4 和引理 3.1, 可以假设

$$\begin{aligned} &a(m,n)=\frac{-n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)},\quad d_1(m,n)=m-n,\quad d_2(m,n)=0,\\ &\omega(L_m,L_n)=\frac{1}{24}(m^3-m+(\epsilon-\epsilon^{-1})m^2)\delta_{m+n,0},\\ &f_1(m,n)=g_1(m,n)=h_1(m,n)=f_2(m,n)=g_2(m,n)=h_2(m,n)\\ &\qquad\qquad=r(m,n)=s(m,n)=t(m,n)=0 \end{aligned}$$

和

$$b_1(m,n)=b_2(m,n)=\frac{1+\epsilon n}{1+\epsilon(m+n)},\quad c(m,n)=-\frac{1+\epsilon n}{\epsilon},$$

$$\text{或}\quad b_1(m,n)=m-n,\quad b_2(m,n)=0,\quad c(m,n)=-\frac{1}{2}(n-m),$$

对所有 $m,n\in\mathbb{Z}$.

接下来给出定理 2.5 的证明.

证明 容易验证定理 2.4 的复值函数 $a(m,n)$, $d_i(m,n)$, $f_i(m,n)$–$h_i(m,n)$, $r(m,n)$–$t(m,n)$, $\omega(\cdot,\cdot)$ 和 $\omega_i(\cdot,\cdot)$ 满足引理 3.1 和 3.2 中的所有等式.

通过 (3.69)–(3.71) 易知 $\omega_i(Z_m,Z_n)=0$, $1\le i\le 3$. 通过 (3.64)–(3.66) 和 (3.57) 易知

$$\omega_i(P_m,Z_n)=\omega_i(Z_m,P_n)=0,\quad 1\le i\le 3.$$

在 (3.72) 中, 取 $m=n$ 可得

$$a(n,k)\omega(Z_n,L_{n+k})=0.$$

对比引理 (3.1), 有 $\omega(Z_m,L_n)=0$, 其中 $m\ne n$. 对所有 $n\in\mathbb{Z}$, 在 (3.62) 中取 m, k, $m+k=n$, $m\ne 0$ 和 $k\ne 0$, 我们有 $\omega(Z_n,L_n)=0$. 因此 $\omega(Z_m,L_n)=0$, 其中 $m,n\in\mathbb{Z}$. 把上面的等式代入到 (3.60), 我们有

$$\omega(L_m,Z_n)=\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}.$$

接下来证明分为两个部分.

情形 1 $b_1(m,n)=b_2(m,n)=\frac{-n(1+\epsilon n)}{1+\epsilon(m+n)}$,

$$\varphi(m,n)=\frac{\omega(L_m,P_n)}{1+\epsilon n}\quad\text{和}\quad\psi(m,n)=\frac{\omega(P_m,L_n)}{1+\epsilon n},$$

即 (3.71), (3.75) 和 (3.77) 可写为:

$$(1+\epsilon n)\varphi(m,n)-(1+\epsilon m)\psi(n,m)=\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}, \tag{3.87}$$

$$k\varphi(n,m+k)-k\varphi(m,n+k)=(m-n)\varphi(m+n,k), \tag{3.88}$$

$$k\psi(n,m+k)-k\varphi(m,n+k)=(m-n)\psi(m+n,k). \tag{3.89}$$

在等式 (3.88) 和 (3.89) 中取 $k=0$, 对比 (3.87), 有

$$\varphi(0,n)=\varphi(n,0)=\psi(0,n)=\psi(n,0)=0,\quad \text{其中}\quad n\in\mathbb{Z}.$$

在等式 (3.89) 中取 $n=0$, 得到

$$(n+k)\varphi(n,k)=(n+k)\psi(n,k)=0.$$

因此

$$\varphi(m,n)=\delta_{m+n,0}\varphi(m),\quad \text{且}\quad \psi(m,n)=\delta_{m+n,0}\varphi(m).$$

在等式 (3.89) 中取 $m+n+k=0$ 和 $m=n$, 有 $2m(\varphi(m)-\psi(m))=0$. 因此 $\varphi(m)=\psi(m)$, 对所有 $m\in\mathbb{Z}$. 又在等式 (3.89) 中取 $m+n+k=0$, 得到

$$(m-n)\varphi(m+n)=(m+n)(\varphi(m)-\varphi(n)). \tag{3.90}$$

从而

$$\varphi(m)=\frac{m^2-m}{2}\varphi(2)-(m^2-2m)\varphi(1). \tag{3.91}$$

在 (3.71) 中取 $m+n=0$, 并通过 (3.91) 可得

$$(1-\epsilon m)\left(\frac{m^2-m}{2}\varphi(2)-(m^2-m)\varphi(1\right)-(1+\epsilon m)\left(\frac{m^2+m}{2}\varphi(2)-(m^2+m)\varphi(1)\right)=\frac{m^3-m}{12},$$

即 $\varphi(1)=-\frac{1+\epsilon}{24\epsilon}$, $\varphi(2)=-\frac{2+\epsilon}{12\epsilon}$. 因此

$$\varphi(m)=-\frac{m^2+\epsilon m}{24\epsilon},\quad \text{其中}\quad m\in\mathbb{Z}.$$

从而得到

$$\omega(L_m,P_n)=\omega(P_m,L_n)=\frac{1}{24}(m^3-m+(\epsilon-\epsilon^{-1})m^2)\delta_{m+n,0}.$$

最后讨论 $\omega(P_m,P_n)$. 在 (3.67) 中取 $k=0$, 通过 (3.56) 有

$$\frac{\omega(P_m,P_n)}{1+\epsilon n}=\frac{\omega(P_m,P_n)-\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}}{1+\epsilon m},$$

因而

$$\omega(P_m,P_n)=\frac{(1+\epsilon n)(m^3-m)}{12\epsilon(n-m)}\delta_{m+n,0}.$$

情形 2 $b_1(m,n)=m-n$, $b_2(m,n)=0$.

在 (3.62) 中取 $m=n$ 可知 $a(n,k)\omega(P_n,L_n+k)=0$. 对比引理 (3.1), 得到

$$\omega(P_m,L_n)=0,$$

其中 $m\neq n$. 对任意 $n\in\mathbb{Z}$, 在 (3.62) 中取 m,k, 使得 $m+k=n$, $m\neq 0$ 和 $k\neq 0$, 得到 $\omega(P_n,L_n)=0$. 因此 $\omega(P_m,L_n)=0$, 其中 $m,n\in\mathbb{Z}$. 把以上等式代入到 (3.60), 易得

$$\omega(L_m,P_n)=\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}.$$

现在我们再考虑 $\omega(P_m, P_n)$, 在 (3.63) 中取 $n=k$, 通过 (3.56) 易得

$$\omega(P_m, P_n) = 0.$$

综上, 我们的主要结果已经证明完毕.

参 考 文 献

[1] Andrada A., Salamon S., Complex product structure on Lie algebras, *Forum Math.*, 2005, **17**: 261–295.

[2] Bai C. M., A further study on non-abelian phase spaces: Left-symmetric algebraic approach and related geometry, *Rev. Math. Phys.*, 2006, **18**: 545–564.

[3] Bordemann M., Generalized Lax pairs, the modified classical Yang–Baxter equation, and affine geometry of Lie groups, *Comm. Math. Phys.*, 1990, **135**: 201–216.

[4] Burde D., Simple left-symmetric algebras with solvable Lie algebra, *Manuscripta Math.*, 1998, **95**: 397–411.

[5] Burde D., Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics, *Cent. Eur. J. Math.*, 2006, **4**: 323–357.

[6] Caroca R., Concha P., Rod´iguez E., et al., Generalizing the $\mathfrak{bms}_3$ and 2D-conformal algebras by expanding the Virasoro algebra, *European Phys. J. C*, 2018, **78**, Article No. 262.

[7] Cayley A., On the theory of the analytic forms called trees, In: Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, Cambridge University Press, Cambridge, 1890, **3**: 242–246.

[8] Chapoton F., Classification of some simple graded pre-Lie algebras of growth one, *Commun. Algebra*, 2004, **32**: 243–251.

[9] Chen H. J., Li J. B., Left-symmetric algebra structures on the W-algebra $W(2,2)$, *Lin. Alg. Appl.*, 2012, **437**: 1821–1834.

[10] Chen H. J., Li J. B., Left-symmetric algebra structures on the twisted Heisenberg–Virasoro algebra, *Sci. China Math.*, 2014, **57**: 469–476.

[11] Dardié J., Médina A., Algèbres de Lie kählériennes et double extension, *J. Algebra*, 1996, **185**: 774–795.

[12] Dardié J., Médina A., Double extension symplectique d'un groupe de Lie symplectique, *Adv. Math.*, 1996, **117**: 208–227.

[13] Diatta A., Médina, Classcal Yang–Baxter equation and left invariant affine geometry on Lie groups, *Manuscripta Math.*, 2004, **114**: 477–486.

[14] Etingof P., Soloviev A., Quantization of geometric classical r-matrices, *Math. Res. Lett.*, 1999, **6**: 223–228.

[15] Gerstenhaber M., The cohomology structure of an associative ring, *Ann. Math.*, 1963, **78**: 267–288.

[16] Golubchik I. Z., Sokolov V. V., Generalized operator Yang–Baxter equations, integrable ODEs and nonassociative algebras, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2000, **7**: 184–197.

[17] Kim H., Complete left-invariant affine structures on nilpotent Lie groups, *J. Diff. Geom.*, 1986, **24**: 373–394.

[18] Kong X. L., Bai C. M., Left-symmetric superalgebra structures on the super-Virasoro algebras, *Pacific J. Math.*, 2008, **235**: 43–55.

[19] Kong X. L., Chen H. J., Bai C. M., Classification of graded left-symmetric algebra structures on the Witt and Virasoro algebras, *Intern. J. Math.*, 2011, **22**: 201–222.

[20] Koszul J., Domaines bornés homogènes et orbites de groups de transformations affines, *Bull. Soc. Math. France*, 1961, **89**: 515–533.

[21] Kupershmidt B. A., On the nature of the Virasoro algebra, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 1999, **6**: 222–245.

[22] Kupershmidt B. A., Non-abelian phase spaces, *J. Phys.*, 1994, **27**: 2801–2809.

[23] Liu X. W., Guo X. Q., Bian D. P., A note on the left-symmetric algebraic structures of the Witt algebra, *Linear Multilinear Algebra*, 2017, **65**: 1793–1804.

[24] Liu X. W., Bian D. P., Guo X. Q., Left-symmetric superalgebra structures on the $N=2$ superconformal algebras, *Commun. Algebra*, 2018, **46**: 929–941.

[25] Tang X. M., Bai C., A class of non-graded left-symmetric algebraic structures on the Witt algebra, *Math. Nachr.*, 2012, **285**: 922–935.

[26] Vinberg E. B., Convex homogeneous cones, *Transl. of Moscow Math. Soc.*, 1963, **12**: 340–403.