第64卷第6期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.64, No.6
2021年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)06-0881-14 **文献标识码: A**

gap 度量下线性时变系统的鲁棒性

徐晓萍 石岩月

中国海洋大学数学科学学院 青岛 266100
E-mail: xxpouc@163.com; shiyanyue@163.com

摘 要 本文主要在套代数框架下研究了线性时变系统的鲁棒稳定性. 当系统和控制器具有 gap 度量下相互独立的扰动时, 应用系统图和控制器图的三角形式, 给出了该类系统鲁棒稳定的充分条件. 进一步地, 还给出了多个系统同时鲁棒稳定的充分条件. 数值结果表明结论是有效的.

关键词 稳定性; 套代数; 无穷维线性时变系统; gap 度量
MR(2010) 主题分类 47A55, 47A68, 47B02
中图分类 O177.1

Robustness for Linear Time-varying Systems Using the Gap Metric

Xiao Ping XU Yan Yue SHI

School of Mathematical Sciences, Ocean University of China,
Qingdao 266100*, P. R. China*
E-mail: *xxpouc@163.com*; *shiyanyue@163.com*

Abstract We mainly study the robust stability for linear time-varying systems within the framework of nest algebra. We consider the robust stability when the system and controller are subject to independent uncertainties measured by the gap metric, and a sufficient condition is obtained by using the trigonometric structure of the graphs about the plant and the controller. Furthermore, we also obtain some sufficient conditions for the simultaneously robust stability of several linear time-varying systems. The numerical example shows that our conclusion is effective.

Keywords stability; nest algebra; infinite dimensional linear time-varying systems; gap metric
MR(2010) Subject Classification 47A55, 47A68, 47B02
Chinese Library Classification O177.1

1 引言

稳定性是系统理论中的一个基本而重要的概念. 在多种框架下, 反馈系统中很多形式的稳定

收稿日期: 2020-06-22; 接受日期: 2020-09-03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11701537); 中央高校基本科研业务费 (201964007)

性已被研究过 [1, 4, 6, 18, 19, 21], 例如内部稳定性、强稳定性、同时稳定性、鲁棒稳定性等等. 分解理论和表示理论是研究稳定性的基本方法. 分解理论中的素分解理论的一个重要特征是 H^∞ 中每个可稳定的多输入多输出 (MIMO) 系统都有一个素分解表示 [20]. 上世纪 90 年代起, 伴随着 H^∞ 控制理论的发展, 人们开始将时变系统放在输入 — 输出信号的一个相应的复 Hilbert 空间中考虑, 得到了很多理论结果. 对线性时变系统而言, 在将线性系统看成 Hilbert 空间上的线性算子的意义下, 此理论推广了 H^∞ 控制理论. 考虑如下的一个离散线性时变系统的实现, 其时变微分方程如下:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n u_n, \quad x_0 = 0, \quad y_n = d_n x_n + h_n u_n,$$

其中 $x_n \in \mathbb{C}^{k_n}$ 表示系统的状态, $u_n \in \mathbb{C}^{k_n}$ 表示输入, y_n 表示输出, a_n, b_n, d_n, h_n 表示相应维数的矩阵. 线性时变系统是从输入空间 $u = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$ 到输出空间 $y = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$ 的线性算子, 其矩阵表示如下:

$$L = \begin{bmatrix} h_0 & & & & \\ d_1 b_0 & h_1 & & & \\ d_2 a_1 b_0 & d_2 b_1 & h_2 & & \\ d_3 a_2 a_1 b_0 & d_3 a_2 b_1 & d_3 b_2 & h_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

在算子理论框架下, 离散线性时变系统是一个线性算子, 该算子可以表示为一个无穷维下三角矩阵, 系统的稳定性等价于算子的有界性. 基于上述发现, 研究者们开始用套代数 [2] 来表示所有稳定的关联的线性时变系统. 到目前为止, 套代数框架下对线性系统稳定性理论的研究已经有不少成果. 例如, Feintuch [5] 研究了线性时变系统的强稳定问题; 卢玉峰分别与徐晓萍和宫婷等合作给出了仅依赖强左或者强右表示的 Youla 参数化定理 [16, 17]; 于天秋等人 [25–27] 首次应用传递性方法研究了多个系统同时稳定的条件及控制器的设计问题; 刘浏、卢玉峰 [14, 15] 随后也对同时稳定问题进行了研究. 近几年来, 学者们研究了离散线性时变系统的鲁棒稳定问题 [23]、双素分解的稳定性判据 [24]、基于表示方法的稳定问题 [13]. 特别地, 于天秋研究了线性时变系统的基于连成网络的鲁棒稳定问题. 在研究鲁棒稳定性的方法里, gap 度量是其中的一个强有力的工具. gap 度量是上世纪 80 年代由学者 Zames 及 El-Sakkary [28] 引入控制论的. 自此之后, gap 度量被广泛应用于反馈系统的不确定性研究之中 [3, 7–12]. Vidyasagar [22] 证明了 gap 度量与关于正规素分解的图度量是等价的, 进而证明该度量诱导的拓扑是保持反馈稳定性是鲁棒性的最弱拓扑. Georgiou [12] 揭示了 gap 度量与一个特殊的 H^∞ 两块问题之间的关系. 当系统和控制器都具有 gap 度量扰动时, Qiu 和 Davison [19] 给出了线性时不变有限维反馈系统鲁棒稳定的充要条件. Foias, Georgiou 和 Smith [9, 10] 将时不变系统的相关结论推广到了线性时变系统, 从而发展出无穷维时变系统鲁棒稳定性的一个几何框架. 在该框架下, 扰动一般由其图给出描述, 并且是由 gap 度量测量的.

在套代数的框架下, 本文将主要研究线性时变系统的稳定性判据. 应用 gap 度量、最小模及系统图与控制器图之间的角等工具, 我们证明了最优可稳定边界的一些性质以及线性时变系统稳定的一些充要条件. 与此同时, 本文考虑了线性时变系统的鲁棒稳定性, 当系统和控制器都具有 gap 度量下的扰动时, 应用系统图与控制器图的三角形式给出了一个充分条件. 更确切地说, 假设 $\{L_0, C_0\}$ 是稳定的, 当系统 L 的扰动是以 L_0 为中心、半径是 r_1 的 gap 球, 控制器 C 的

扰动是以 C_0 为中心、半径是 r_2 的 gap 球时, 如果扰动半径及最优可稳定边界之间满足条件 $\arcsin r_1 + \arcsin r_2 < \arcsin b(L_0, C_0)$, 那么反馈系统 $\{L, C\}$ 是稳定的.

本文第 2 节简介一些常用记号、定义及命题等. 第 3 节应用 gap 度量, 证明系统稳定的等价条件. 第 4 和第 5 节给出本文的主要研究结论: 系统鲁棒稳定的充分条件及同时鲁棒稳定的充分条件. 第 6 节列举了一个数值例子, 该例表明, 本文所得的关于鲁棒稳定性的结论是有效的. 最后以结论及致谢结尾.

2 基础知识

本节简介一些后续研究中用到的数学概念和性质. 相关细节可以参考文献 [2, 6].

假设输入 — 输出信号空间 $\mathscr{H}$ 为复无穷维序列空间:

$$\mathscr{H} = \left\{(x_0, x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\right\},$$

其中 $|\cdot|$ 表示复数域 $\mathbb{C}$ 上的标准欧几里得范数. 显然地, 在标准内积 $(x, y) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \bar{y}_i$ 下, $\mathscr{H}$ 是一个可分的 Hilbert 空间, 且其范数为 $\|x\| = (\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$. 令 $\mathscr{H}_e = \{(x_0, x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{C}\}$ 表示 $\mathscr{H}$ 的扩展空间.

假设 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 是两个 Hilbert 空间, "$\oplus$" 表示这两个空间的直和:

$$\mathscr{H} \oplus \mathscr{K} = \left\{\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} : h \in \mathscr{H},\, k \in \mathscr{K}\right\}.$$

$\mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{K}$ 的全体有界线性算子所构成的 Banach 空间, 算子范数定义为

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathscr{H},\, \|x\| \le 1} \|Ax\|.$$

特别地, 记 $\mathscr{B}(\mathscr{H}) := \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$. 对于 $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\operatorname{Ran} T$ 表示算子 T 的值域 $\{Tx : x \in \mathscr{H}\}$, $\operatorname{Ker} T$ 表示算子 T 的核 $\{x \in \mathscr{H} : Tx = 0\}$. 记算子 T 的伴随算子为 T^*, 即对任意 $x, y \in \mathscr{H}$, 均有 $(T^*x, y) = (x, Ty)$ 成立.

在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中, 包含 $\{0\}$ 和 $\mathscr{H}$ 的所有闭子空间的链 $\mathscr{N}$ 称为一个套, 它在交与闭扩张下是封闭的. 由套 $\mathscr{N}$ 决定的套代数如下:

$$\mathscr{T}(\mathscr{N}) = \{T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) : TN \subseteq N,\ \forall\, N \in \mathscr{N}\}.$$

对 $n \ge 0$, P_n 表示 $\mathscr{H}_e$ 上的标准截断算子:

$$P_n(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) = (x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots),$$

其中 $P_{-1} = 0$, $P_\infty = I$. 由于 P_n 将时间 n 后的所有输出作用为零, 因此投影序列 $\{P_n\}_{n=-1}^{\infty}$ 在研究线性系统的关联性这一物理概念时起到了重要的作用.

下面的定义揭示了离散线性时变系统在算子理论的框架下是如何被刻画的.

定义 2.1 [6] 给定 $\mathscr{H}_e$ 上的一个线性变换 T, 如果对任意的 n 满足 $P_nT = P_nTP_n$ 成立, 那么称 T 是关联的. $\mathscr{H}_e$ 上的线性系统是指 $\mathscr{H}_e$ 上的一个关联的线性变换, 它在预解拓扑下是连续的.

$\mathscr{H}_e$ 上全体线性时变系统构成的集合在标准的加法与乘法下构成一个代数, 记为 $\mathscr{L}$. 因此在 $\mathscr{H}$ 的标准基底下, $\mathscr{L}$ 上的任意元素是一个无穷维下三角矩阵 (具体可见文 [6, 第 5 章]).

我们称 $\mathscr{H}_e$ 上的一个线性系统 T 是稳定的, 如果它限制到 $\mathscr{H}$ 上是一个有界算子. 记 $\mathscr{S}$ 为 $\mathscr{H}_e$ 上所有稳定的线性时变系统构成的集合. 显然, $\mathscr{S}$ 是一个包含恒等算子的弱闭代数, 它在算子代数意义下是一个离散套代数 (具体可见文 [6, 第 5 章]).

对于 $L, C \in \mathscr{L}$, 考虑由系统 L 与控制器 C 组成的标准反馈图, 其闭环系统方程为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & C \\ L & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

如果 $M_1 = \left[\begin{smallmatrix} I & C \\ L & -I \end{smallmatrix}\right]$ 是可逆的且其逆为下面的转移矩阵

$$H(L,C) = \begin{bmatrix} (I+CL)^{-1} & C(I+LC)^{-1} \\ L(I+CL)^{-1} & -(I+LC)^{-1} \end{bmatrix},$$

那么称该反馈系统是适定的.

定义 2.2 [6] 如果 $H(L,C)$ 的每个元素都在 $\mathscr{S}$ 中, 那么称由系统 L 和控制器 C 确定的闭环系统是稳定的. 如果存在控制器 C, 使得系统 L 和控制器 C 组成的闭环系统是稳定的, 那么称系统 L 是可镇定的.

为了刻画可镇定系统, 对于一个线性系统, 我们需要描述其强右表示和强左表示的概念. 在 $\mathscr{H}$ 中, 假设线性变换 L 的定义域为 $\mathscr{D}(L) = \{u \in \mathscr{H} : Lu \in \mathscr{H}\}$, 那么其图定义为

$$G(L) = \left\{ \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} x : x \in \mathscr{D}(L) \right\},$$

L 的逆图定义为

$$G^{-1}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} L \\ I \end{bmatrix} x : x \in \mathscr{D}(L) \right\}.$$

结合图的概念, $\{L, C\}$ 的稳定性有几何化的描述: $\{L, C\}$ 稳定当且仅当 $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ 可以被分解为代数直和 $G(L) \dotplus G^{-1}(-C)$.

对于强表示, 其定义描述如下 (可参考文 [1, 6]).

定义 2.3 [6] 对于给定的系统 L, 如果存在 $M, N \in \mathscr{S}$, 满足如下条件:

(1) $G(L) = \mathrm{Ran}\left[\begin{smallmatrix} M \\ N \end{smallmatrix}\right]$;

(2) $\left[\begin{smallmatrix} M \\ N \end{smallmatrix}\right]$ 有一个稳定的左逆, 即存在 $X, Y \in \mathscr{S}$, 使得 $[Y, X]\left[\begin{smallmatrix} M \\ N \end{smallmatrix}\right] = I$,

那么称系统 L 有一个强右表示 $\left[\begin{smallmatrix} M \\ N \end{smallmatrix}\right]$.

如果强右表示 $\left[\begin{smallmatrix} M \\ N \end{smallmatrix}\right]$ 是等距的, 那么称该强右表示是正规的.

如果存在 $\hat{M}, \hat{N} \in \mathscr{S}$, 满足如下条件:

(1) $G(L) = \mathrm{Ker}[-\hat{N}, \hat{M}]$;

(2) $[-\hat{N}, \hat{M}]$ 有一个稳定的右逆, 即存在 $\hat{X},\ \hat{Y} \in \mathscr{S}$, 使得 $[-\hat{N}, \hat{M}]\left[\begin{smallmatrix} -\hat{X} \\ \hat{Y} \end{smallmatrix}\right] = I$,

那么称系统 L 有一个强左表示 $[-\hat{N}, \hat{M}]$.

如果强左表示 $[-\hat{N}, \hat{M}]$ 是余等距的, 那么称该强左表示是正规的.

关于强右表示, 有如下结论. 对于强左表示, 亦有类似的结论.

定理 2.4 [6] 设 $M, N \in \mathscr{S}$, 那么 $\left[\begin{smallmatrix} M \\ N \end{smallmatrix}\right]$ 是 $L \in \mathscr{L}$ 的一个强右表示当且仅当

(1) 存在 $X, Y \in \mathscr{S}$, 使得 $[Y, X]\left[\begin{smallmatrix} M \\ N \end{smallmatrix}\right] = I$;

(2) M 在 $\mathscr{L}$ 中是可逆的.

注 2.5 由上述定理易知, L 的一个右表示 $\left[\begin{smallmatrix} M \\ N \end{smallmatrix}\right]$ 给出了 L 的一个右分解表示 $L = NM^{-1}$. 如果该表示为强表示, 那么称该表示为 L 的一个右素分解. 类似地, 有 L 的左分解表示 $L = \hat{M}^{-1}\hat{N}$ 以及左素分解的定义.

定理 2.6 [6] 设 $L \in \mathscr{L}$ 有一个右素分解 $L = AB^{-1}$, $C \in \mathscr{L}$ 有一个左素分解 $C = D^{-1}N$, 使得反馈系统 $\{L, C\}$ 是适定的. 那么 $\{L, C\}$ 是稳定的当且仅当 $DB + NA$ 在 $\mathscr{S}$ 中是可逆的.

如果 $L \in \mathscr{L}$ 有一个左素分解 $L = \hat{B}^{-1}\hat{A}$, $C \in \mathscr{L}$ 有一个右素分解 $C = \hat{N}\hat{D}^{-1}$, 使得反馈系统 $\{L, C\}$ 是适定的. 那么 $\{L, C\}$ 是稳定的当且仅当 $\hat{B}\hat{D} + \hat{A}\hat{N}$ 在 $\mathscr{S}$ 中是可逆的.

下述定理是经典的 Youla–Kucera 参数化定理, 它的证明可参考文献 [1] 或 [6].

定理 2.7 [6] $L \in \mathscr{L}$ 可镇定当且仅当存在 $M, N, X, Y, \hat{M}, \hat{N}, \hat{X}, \hat{Y} \in \mathscr{S}$, 使得 $\hat{M}^{-1}\hat{N}$ 和 NM^{-1} 分别为 L 的左、右素分解且满足双 Bezout 恒等式

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ -\hat{N} & \hat{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & -\hat{X} \\ N & \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -\hat{X} \\ N & \hat{Y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y & X \\ -\hat{N} & \hat{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

C 镇定 L 当且仅当存在 $Q \in \mathscr{S}$, 使得 C 有

$$\text{强右表示}\begin{bmatrix} \hat{Y} - NQ \\ \hat{X} + MQ \end{bmatrix}\text{和强左表示}\ [-(X + Q\hat{M}), Y - Q\hat{N}].$$

3 稳定性与 gap 度量

本节首先介绍关于 gap 度量的一些基本概念. 令 $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ 是 $\mathscr{H}$ 上的闭子空间, P_1, P_2 表示对应空间上的正交投影.

定义 3.1 [6] 从 $\mathscr{M}_1$ 到 $\mathscr{M}_2$ 的定向 gap, 记为 $\vec{\delta}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2)$, 其定义为

$$\sup\{\inf[\|x - y\| : y \in \mathscr{M}_2] : x \in \mathscr{M}_1,\ \|x\| = 1\}.$$

(即 $\vec{\delta}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) = \|(I - P_2)P_1\|$, $\vec{\delta}(\mathscr{M}_2, \mathscr{M}_1) = \|(I - P_1)P_2\|$).

定义 3.2 [6] 闭子空间 $\mathscr{M}_1$ 与 $\mathscr{M}_2$ 之间的 gap 定义为

$$\delta(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) = \max\{\vec{\delta}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2), \vec{\delta}(\mathscr{M}_2, \mathscr{M}_1)\}.$$

定理 3.3 [6] $\delta(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) = \|P_1 - P_2\|$.

定理 3.4 [6] 假设 $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ 是 $\mathscr{H}$ 上的闭子空间, 那么 $\delta(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) < 1$ 当且仅当 $P_1 : \mathscr{M}_2 \to \mathscr{M}_1$ 是一对一且到上的. 进一步地, 如果 $\delta(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) < 1$, 那么

$$\delta(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) = \vec{\delta}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) = \vec{\delta}(\mathscr{M}_2, \mathscr{M}_1).$$

注 3.5 $\delta(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) < 1$ 等价于 $\hat{P}_1$ 和 $\hat{P}_2$ 的可逆性, 其中 $\hat{P}_1$ 是 P_1 在 $P_2\mathscr{H}$ 上的限制, $\hat{P}_2$ 是 P_2 在 $P_1\mathscr{H}$ 上的限制. 因此

$$\delta(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) = \sqrt{1 - \mu(\hat{P}_1)^2} = \sqrt{1 - \mu(\hat{P}_2)^2}.$$

对于 $x, y \in \mathscr{H}$, 非零向量 x, y 间的角定义为:

$$\theta(x, y) = \arccos\frac{|(x, y)|}{\|x\|\,\|y\|},$$

显然, $\theta(x, y) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. $\mathscr{H}$ 上两个闭子空间 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 之间的角为

$$\theta(\mathscr{M}, \mathscr{N}) = \{\theta(x, y) : 0 \neq x \in \mathscr{M},\ 0 \neq y \in \mathscr{N}\},$$

其中最小角 $\theta_{\min}(\mathscr{M},\mathscr{N})$ 和最大角 $\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{N})$ 的定义分别为

$$\theta_{\min}(\mathscr{M},\mathscr{N})=\inf\{\theta(x,y):0\neq x\in\mathscr{M},\,0\neq y\in\mathscr{N}\},$$
$$\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{N})=\sup\{\theta(x,y):0\neq x\in\mathscr{M},\,0\neq y\in\mathscr{N}\}.$$

对于 $\mathscr{H}$ 上的有界线性算子, 下面回顾最小模的定义. 令 A 是 $\mathscr{H}$ 上的一个有界线性算子, 记 A 的最小模为 $\mu(A)$, 即

$$\mu(A)=\inf\{\|Ax\|:\|x\|=1\}.$$

如果 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是可逆的, 那么数 $\mu(A)$ 实际上起到了 A^{-1} 范数的倒数的作用.

在如下定理中, 我们将应用 gap 度量、最小模及两个闭子空间的角来描述最优稳定边界. 该命题可以参考文献 [6, 第 9 章] 的内容, 但其详细证明由本文给出.

定理 3.6 [6] 设反馈系统 $\{L,C\}$ 是稳定的, 记

$$\mathscr{M}=G(L),\quad \mathscr{N}=G^{-1}(-C),\quad Q_{\mathscr{M},\mathscr{N}}=\begin{bmatrix} I\\ L\end{bmatrix}(I+CL)^{-1}\begin{bmatrix} I & -C\end{bmatrix},$$

定义 $b_{\mathscr{M},\mathscr{N}}=\|Q_{\mathscr{M},\mathscr{N}}\|^{-1}$, 那么

$$\begin{aligned} b_{\mathscr{M},\mathscr{N}}&=\mu(P_{\mathscr{N}^\perp}|\mathscr{M})=\sqrt{1-\delta(\mathscr{M},\mathscr{N}^\perp)^2}\\ &=\inf\{\|A_{\mathscr{M},\mathscr{N}}x\|:x\in\mathscr{M},\,\|x\|=1\}\\ &=\inf\{d(x,\mathscr{N}):x\in\mathscr{M},\,\|x\|=1\}\\ &=\inf\{\sin\theta(x,y):0\neq x\in\mathscr{M},\,0\neq y\in\mathscr{N}\}.\end{aligned}$$

证明 L 的正规强右表示和正规强左表示分别记为 $\left[\begin{smallmatrix} M\\ N\end{smallmatrix}\right]$ 和 $[-\hat{N}\quad \hat{M}]$, C 的正规强右表示和正规强左表示分别记为 $\left[\begin{smallmatrix} V\\ U\end{smallmatrix}\right]$ 和 $[-\hat{U}\quad \hat{V}]$, 有

$$\mathscr{M}=G(L)=\operatorname{Ran}\begin{bmatrix} M\\ N\end{bmatrix},\quad \mathscr{N}=G^{-1}(-C)=\operatorname{Ker}\begin{bmatrix}\hat{V} & \hat{U}\end{bmatrix},$$

那么 $\mathscr{N}^\perp=\operatorname{Ran}\left[\begin{smallmatrix} V^*\\ U^*\end{smallmatrix}\right]$. $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}^\perp$ 的正交投影分别为

$$P_{\mathscr{M}}=\begin{bmatrix} M\\ N\end{bmatrix}\begin{bmatrix} M^* & N^*\end{bmatrix},\quad P_{\mathscr{N}^\perp}=\begin{bmatrix}\hat{V}^*\\ \hat{U}^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{V} & \hat{U}\end{bmatrix}.$$

注意到

$$\begin{aligned} Q_{\mathscr{M},\mathscr{N}}&=\begin{bmatrix} I\\ L\end{bmatrix}(I+CL)^{-1}\begin{bmatrix} I & -C\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} I\\ NM^{-1}\end{bmatrix}(I+\hat{V}^{-1}\hat{U}NM^{-1})^{-1}\begin{bmatrix} I & -\hat{V}^{-1}\hat{U}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} M\\ N\end{bmatrix}M^{-1}[\hat{V}^{-1}(\hat{V}M+\hat{U}N)M^{-1}]^{-1}\hat{V}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{V} & -\hat{U}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} M\\ N\end{bmatrix}(\hat{V}M+\hat{U}N)^{-1}\begin{bmatrix}\hat{V} & -\hat{U}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

因此

$$b_{\mathscr{M},\mathscr{N}} = \|Q_{\mathscr{M},\mathscr{N}}\|^{-1} = \left\| \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} (\hat{V}M + \hat{U}N)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{V} & -\hat{U} \end{bmatrix} \right\|^{-1}$$
$$= \left\|(\hat{V}M + \hat{U}N)^{-1}\right\|^{-1} = \mu(\hat{V}M + \hat{U}N).$$

通过计算可得

$$\begin{aligned} b_{\mathscr{M},\mathscr{N}} &= \mu(\hat{V}M + \hat{U}N) \\ &= \inf\left\{ \left\| \begin{bmatrix} \hat{V} & \hat{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} x \right\| : x \in \mathscr{H}, \, \|x\| = 1 \right\} \\ &= \inf\left\{ \left\| \begin{bmatrix} \hat{V}^* \\ \hat{U}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V} & \hat{U} \end{bmatrix} x \right\| : x \in \mathscr{M}, \, \|x\| = 1 \right\} \\ &= \inf\{\|A_{\mathscr{M},\mathscr{N}}x\| : x \in \mathscr{M}, \, \|x\| = 1\} \\ &= \mu(A_{\mathscr{M},\mathscr{N}}) = \mu(P_{\mathscr{N}^\perp}|\mathscr{M}) \\ &= \sqrt{1 - \delta(\mathscr{M}, \mathscr{N}^\perp)^2}. \end{aligned}$$

由于反馈系统 $\{L, C\}$ 是稳定的, 因此有 $\mathscr{M} \cap \mathscr{N} = \{0\}$.

接下来, 我们将证明

$$\inf\{d(x, \mathscr{N}) : x \in \mathscr{M}, \|x\| = 1\} = \inf\{\sin\theta(x, y) : 0 \neq x \in \mathscr{M}, \, 0 \neq y \in \mathscr{N}\}.$$

对于 $x \in \mathscr{M}$, $\|x\| = 1$, $P_{\mathscr{N}}x \neq 0$, 因为 $\|P_{\mathscr{N}}x\|^2 = (P_{\mathscr{N}}x, P_{\mathscr{N}}x) = (x, P_{\mathscr{N}}x)$, 所以

$$\begin{aligned} d^2(x, \mathscr{N}) &= \|x - P_{\mathscr{N}}x\|^2 = 1 - \|P_{\mathscr{N}}x\|^2 \\ &= 1 - \frac{\|P_{\mathscr{N}}x\|^4}{\|P_{\mathscr{N}}x\|^2} = 1 - \frac{|(x, P_{\mathscr{N}}x)|^2}{\|x\|^2\|P_{\mathscr{N}}x\|^2} \\ &\geq \inf\left\{1 - \frac{|(x, y)|^2}{\|x\|^2\|y\|^2} : 0 \neq x \in \mathscr{M}, \, 0 \neq y \in \mathscr{N}\right\} \\ &= \inf\{\sin^2\theta(x, y) : 0 \neq x \in \mathscr{M}, \, 0 \neq y \in \mathscr{N}\}, \end{aligned}$$

从而我们证明了

$$\inf\{d(x, \mathscr{N}) : x \in \mathscr{M}, \, \|x\| = 1\} \geq \inf\{\sin\theta(x, y) : 0 \neq x \in \mathscr{M}, \, 0 \neq y \in \mathscr{N}\}.$$

另一方面, 对于 $x \in \mathscr{M}$, $y \in \mathscr{N}$, 以及 $x, y \neq 0$, 存在 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使得 $|\lambda| = 1$, 且 $|(x, y)| = (\lambda x, y)$. 记 $\tilde{x} = \frac{\lambda x}{\|x\|}$, $\tilde{y} = \frac{y}{\|y\|}$, 那么

$$\begin{aligned} \sin^2\theta(x, y) &= 1 - \frac{|(\lambda x, y)|^2}{\|x\|^2\|y\|^2} = 1 - |(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 \\ &= 1 - |(P_{\mathscr{N}}\tilde{x}, \tilde{y})|^2 \geq 1 - \|P_{\mathscr{N}}\tilde{x}\|^2 = d^2(\tilde{x}, \mathscr{N}) \\ &\geq \inf\{d^2(x, \mathscr{N}) : x \in \mathscr{M}, \, \|x\| = 1\}, \end{aligned}$$

从而有 $\inf\{d(x, \mathscr{N}) : x \in \mathscr{M}, \, \|x\| = 1\} \leq \inf\{\sin\theta(x, y) : 0 \neq x \in \mathscr{M}, \, 0 \neq y \in \mathscr{N}\}$. 因此

$$\inf\{d(x, \mathscr{N}) : x \in \mathscr{M}, \, \|x\| = 1\} = \inf\{\sin\theta(x, y) : 0 \neq x \in \mathscr{M}, \, 0 \neq y \in \mathscr{N}\}.$$

再根据 $\inf\{\|A_{\mathscr{M},\mathscr{N}}x\| : x \in \mathscr{M}, \, \|x\| = 1\} = \inf\{d(x, \mathscr{N}) : x \in \mathscr{M}, \, \|x\| = 1\}$, 定理证毕.

注 3.7 通常地, 称 $b_{\mathscr{M},\mathscr{N}}$ 为由系统 L 与控制器 C 确定的最优稳定边界, 并且通常将其记为 $b(L,C)$.

应用定理 3.6, 显然可得下述引理.

引理 3.8 $\theta_{\min}(\mathscr{M},\mathscr{N}) = \arcsin b_{\mathscr{M},\mathscr{N}} = \arccos \delta(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp})$.

由于 $\delta(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}) = \cos\theta_{\min}(\mathscr{M},\mathscr{N}) = \sin\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp})$, 因此有

$$\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}) = \arcsin \delta(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}) = \arccos b_{\mathscr{M},\mathscr{N}}.$$

关于反馈系统的稳定性, 下面将描述它的一些充要条件.

定理 3.9 [6] 系统 $\{L,C\}$ 稳定与下面各项是等价的:

(1) $\delta(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}) < 1$;

(2) $\theta_{\min}(\mathscr{M},\mathscr{N}) > 0$;

(3) $\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}) < \frac{\pi}{2}$.

证明 记 $\left[\begin{smallmatrix} M \\ N \end{smallmatrix}\right]$ 为 L 的正规强右表示, $[-\hat{U} \quad \hat{V}]$ 为 C 的正规强左表示.

首先证明 $\{L,C\}$ 稳定与条件 (1) 的等价性. 由于 $\{L,C\}$ 稳定当且仅当 $\hat{V}M+\hat{U}N$ 在 $\mathscr{S}$ 中是可逆的, 即 $\mu(\hat{V}M+\hat{U}N) > 0$. 应用定理 3.6 的结论

$$\mu(\hat{V}M+\hat{U}N) = \sqrt{1-\delta(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp})^2}$$

可知, $\{L,C\}$ 是稳定的当且仅当 $\delta(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}) < 1$, 即条件 (1) 成立.

接下来证明 (1) 与 (2) 的等价性, 即 $\delta(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}) < 1$ 和 $\theta_{\min}(\mathscr{M},\mathscr{N}) > 0$ 的等价性. 我们应用引理 3.8, 有

$$\theta_{\min}(\mathscr{M},\mathscr{N}) = \arccos \delta(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}),$$

因此

$$\delta(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}) < 1 \Leftrightarrow \theta_{\min}(\mathscr{M},\mathscr{N}) > 0;$$

最后证明条件 (3) 与系统 $\{L,C\}$ 稳定的等价性. 由于

$$\begin{aligned}\mu(\hat{V}M+\hat{U}N) &= \inf\{\sin\theta(x,y) : 0 \neq x \in \mathscr{M},\, 0 \neq y \in \mathscr{N}\} \\ &= \inf\{\cos\theta(x,y) : 0 \neq x \in \mathscr{M},\, 0 \neq y \in \mathscr{N}^{\perp}\} = \cos\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}),\end{aligned}$$

因此 $\mu(\hat{V}M+\hat{U}N) > 0$ 等价于

$$\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}) < \frac{\pi}{2},$$

即 $\{L,C\}$ 是稳定的当且仅当条件 $\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{N}^{\perp}) < \frac{\pi}{2}$ 成立. 证毕.

4 系统和控制器都具有扰动时的鲁棒性

本节将主要考虑套代数框架下线性时变系统的鲁棒稳定性. 具体地, 当系统和控制器都具有 gap 度量下的扰动时, 我们将主要研究此类鲁棒稳定问题. Qiu 等人在文 [19] 中对线性时不变有限维系统研究过相同的问题. 不同于文 [19], 本文将主要针对线性时变无穷维系统进行研究, 应用系统图和控制器图的三角形式, 给出了系统鲁棒稳定的一个充分条件. 在给出本文主要结果前, 先介绍几个引理.

给定一个闭子空间 $\mathscr{M}_0$, 且 $0<b<1$, 记

$$\mathscr{B}(\mathscr{M}_0,b)=\{\mathscr{M}:\delta(\mathscr{M}_0,\mathscr{M})<b\}.$$

对于 $\mathscr{H}$ 上的闭算子 L_1,L_2, 记 $\delta(L_1,L_2)=\delta(G(L_1),G(L_2))$.

引理 4.1 [6] 令 $\mathscr{M}_0$, $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ 是 $\mathscr{H}$ 上的闭子空间, 且满足 $\delta^2(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)+\delta^2(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)<1$. 那么

$$\delta(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)\leq\delta(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)\sqrt{1-\delta^2(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)}+\delta(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)\sqrt{1-\delta^2(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)}. \tag{4.1}$$

应用引理 4.1, 下面给出两个闭子空间的最小角和最大角的一些性质.

引理 4.2 令 $\mathscr{M}_0$, $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ 为 $\mathscr{H}$ 的闭子空间, 满足 $\delta^2(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)+\delta^2(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)<1$. 那么

$$\theta_{\min}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)\leq\theta_{\min}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_0)+\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2). \tag{4.2}$$

证明 因为

$$\delta^2(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)+\delta^2(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)<1 \quad 和 \quad \theta_{\min}(\mathscr{M},\mathscr{N})=\arcsin\delta(\mathscr{M},\mathscr{N}),$$

所以有

$$\sin^2\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)+\sin^2\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)<1,$$

因此

$$\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)+\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)<\frac{\pi}{2}.$$

等式 (4.1) 等价于

$$\begin{aligned}
&\sin\theta_{\min}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)\\
&\quad\leq\sin\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)\sqrt{1-\sin^2\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)}+\sin\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)\sqrt{1-\sin^2\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)}\\
&\quad=\sin\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)\cos\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)+\sin\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)\cos\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)\\
&\quad=\sin(\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)+\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)).
\end{aligned}$$

这表明

$$\theta_{\min}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)\leq\theta_{\min}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_0)+\theta_{\min}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2).$$

证毕.

类似地, 应用结论

$$\sin\theta_{\max}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)=\delta(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2),$$

我们可得下面的引理.

引理 4.3 令 $\mathscr{M}_0$, $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ 是 $\mathscr{H}$ 上的闭子空间, 且满足 $\delta^2(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_1)+\delta^2(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2)<1$. 那么

$$\theta_{\max}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)\leq\theta_{\max}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_0)+\theta_{\max}(\mathscr{M}_0,\mathscr{M}_2). \tag{4.3}$$

接下来将证明本文的主要结论, 即当系统和控制器都具有 gap 度量下的扰动时, 我们给出系统鲁棒稳定性的一个充分条件.

定理 4.4 设反馈系统 $\{L_0,C_0\}$ 是稳定的, 且 $r_i\in[0,1)$, $i=1,2$. 如果

$$\arcsin r_1+\arcsin r_2+\arccos b(L_0,C_0)<\frac{\pi}{2}, \tag{4.4}$$

那么对所有的 $L\in\mathscr{B}(L_0,r_1)$ 和 $C\in\mathscr{B}(C_0,r_2)$, $\{L,C\}$ 是稳定的.

证明 假设

$$\arcsin r_1+\arcsin r_2+\arccos b(L_0,C_0)<\frac{\pi}{2}$$

对所有的 $L\in\mathscr{B}(L_0,r_1)$ 和 $C\in\mathscr{B}(C_0,r_2)$, 我们将证明 $\{L,C\}$ 是稳定的. 记

$$\theta_0=\arccos b(L_0,C_0),\quad \theta_1=\arcsin r_1,\quad \theta_2=\arcsin r_2,$$
$$\mathscr{M}=G(L),\quad \mathscr{M}_0=G(L_0),\quad \mathscr{N}=G^{-1}(-C),\quad \mathscr{N}_0=G^{-1}(-C_0),$$

条件

$$\arcsin r_1+\arcsin r_2+\arccos b(L_0,C_0)<\frac{\pi}{2}$$

变为

$$\theta_0+\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}.$$

对于 $L\in\mathscr{B}(L_0,r_1)$ 和 $C\in\mathscr{B}(C_0,r_2)$, 由于

$$\delta(\mathscr{M},\mathscr{M}_0)=\delta(L,L_0)<r_1,$$
$$\delta(\mathscr{N}^\perp,\mathscr{N}_0^\perp)=\delta(\mathscr{N},\mathscr{N}_0)=\delta(G(-C),G(-C_0))=\delta(G(C),G(C_0))=\delta(C,C_0)<r_2,$$

因此

$$\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{M}_0)=\arcsin\delta(\mathscr{M},\mathscr{M}_0)<\theta_1,$$
$$\theta_{\max}(\mathscr{N}^\perp,\mathscr{N}_0^\perp)=\arcsin\delta(\mathscr{N}^\perp,\mathscr{N}_0^\perp)<\theta_2,$$

并且

$$\begin{aligned}\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{N}^\perp)&\le\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{M}_0)+\theta_{\max}(\mathscr{M}_0,\mathscr{N}^\perp)\\&\le\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{M}_0)+\theta_{\max}(\mathscr{M}_0,\mathscr{N}_0^\perp)+\theta_{\max}(\mathscr{N}_0^\perp,\mathscr{N}^\perp)\\&=\theta_{\max}(\mathscr{M},\mathscr{M}_0)+\theta_0+\theta_{\max}(\mathscr{N}_0^\perp,\mathscr{N}^\perp)\\&<\theta_1+\theta_0+\theta_2<\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

应用定理 3.9 可知, $\{L,C\}$ 是稳定的. 证毕.

注 4.5 注意条件

$$\arcsin r_1+\arcsin r_2+\arccos b(L_0,C_0)<\frac{\pi}{2}$$

等价于

$$\arcsin r_1+\arcsin r_2<\arcsin b(L_0,C_0),$$

或者

$$r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\sqrt{1-b^2(L_0,C_0)}<b^2(L_0,C_0).$$

应用定理 4.4, 我们有下面的两个推论.

推论 4.6 设 $\{L_0,C_0\}$ 是稳定的, 且 $r_1\in[0,1)$. 如果 $r_1<b(L_0,C_0)$, 那么对所有的 $L\in\mathscr{B}(L_0,r_1)$, 系统 $\{L,C_0\}$ 是稳定的.

推论 4.7 设 $\{L_0,C_0\}$ 是稳定的, 且 $r_2\in[0,1)$. 如果 $r_2<b(L_0,C_0)$, 那么对所有的 $C\in\mathscr{B}(C_0,r_2)$, 系统 $\{L_0,C\}$ 是稳定的.

5 系统和控制器都具有扰动时的同时鲁棒性

本节将对系统和控制器都具有扰动时的同时鲁棒性进行刻画. 具体地, 当系统 L_{10} 和 L_{20} 可被控制器 C_0 同时稳定时, 对于 $r_i \in [0,1)$, $i=1,2$, 当 $L_1 \in \mathscr{B}(L_{10},r_1)$, $L_2 \in \mathscr{B}(L_{20},r_1)$, $C \in \mathscr{B}(C_0,r_2)$ 时, L_1 和 L_2 可被同时稳定的充分条件是什么呢?

定理 5.1 设系统 L_{10} 和 L_{20} 能被控制器 C_0 稳定, 且 $r_i \in [0,1)$, $i=1,2$. 记

$$s=\min\{\arcsin b(L_{10},C_0),\arcsin b(L_{20},C_0)\},$$

如果

$$\arcsin r_1+\arcsin r_2<s, \tag{5.1}$$

那么对所有的 $L_1 \in \mathscr{B}(L_{10},r_1)$, $L_2 \in \mathscr{B}(L_{20},r_1)$ 以及 $C \in \mathscr{B}(C_0,r_2)$, L_1 和 L_2 可被控制器 C 同时稳定.

证明 应用定理 4.4, 如果

$$\arcsin r_1+\arcsin r_2<\arcsin b(L_{10},C_0),$$

那么 $C \in \mathscr{B}(C_0,r_2)$ 稳定 $L_1 \in \mathscr{B}(L_{10},r_1)$; 如果

$$\arcsin r_1+\arcsin r_2<\arcsin b(L_{20},C_0),$$

那么 $C \in \mathscr{B}(C_0,r_2)$ 稳定 $L_2 \in \mathscr{B}(L_{20},r_1)$.

因此, 当 $\arcsin r_1+\arcsin r_2<s$ 时, $L_1 \in \mathscr{B}(L_{10},r_1)$ 和 $L_2 \in \mathscr{B}(L_{20},r_1)$ 可被控制器 $C \in \mathscr{B}(C_0,r_2)$ 同时稳定. 证毕.

当系统多于两个时, 上述定理的结论可以推广如下.

定理 5.2 设 n 个系统 $L_{10},L_{20},\ldots,L_{n0}$ 可被控制器 C_0 同时稳定, 且 $r_i \in [0,1)$, $i=1,2$. 记

$$s=\min\{\arcsin b(L_{10},C_0),\arcsin b(L_{20},C_0),\ldots,\arcsin b(L_{n0},C_0)\},$$

如果

$$\arcsin r_1+\arcsin r_2<s, \tag{5.2}$$

那么对所有的 $L_i \in \mathscr{B}(L_{i0},r_1)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 和 $C \in \mathscr{B}(C_0,r_2)$, n 个系统 $L_1,L_2,\ldots,L_n$ 可被控制器 C 同时稳定.

6 数值例子

本节将通过下面的例子说明定理 4.4 中结论的有效性和可行性.

例 6.1 考虑如下的线性时变系统:

$$L_0=\begin{bmatrix} 4 & & & & & \\ & 4 & & & & \\ & & 4 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

易知 L_0 有正规右素分解
$$L_0 = N_0 M_0^{-1},$$
其中
$$N_0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & & & & & \\ & \frac{4}{\sqrt{17}} & & & & \\ & & \frac{4}{\sqrt{17}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{4}{\sqrt{17}} & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{17}} & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{17}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{17}} & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$
选择
$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$
那么 C_0 有正规左素分解
$$C_0 = \hat{V}_0^{-1} \hat{U}_0,$$
其中
$$\hat{U}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \hat{V}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$
应用定理 3.6, 有
$$b(L_0, C_0) = \mu(\hat{V}_0 M_0 + \hat{U}_0 N_0) = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

记
$$\mathscr{M} = G(L), \quad \mathscr{M}_0 = G(L_0), \quad \mathscr{N} = G^{-1}(-C), \quad \mathscr{N}_0 = G^{-1}(-C_0),$$
通过计算知
$$\theta_{\min}(\mathscr{M}_0, \mathscr{N}_0) = \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}} > 0, \quad \theta_{\max}(\mathscr{M}_0, \mathscr{N}_0^{\perp}) = \arccos \frac{5}{\sqrt{34}} < \frac{\pi}{2}.$$

选取 $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{3}$, 对于系统

$$L = \begin{bmatrix} 4+\delta_{11} & & & & & \\ \delta_{21} & 4+\delta_{22} & & & & \\ \delta_{31} & \delta_{32} & 4+\delta_{33} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \cdots & 4+\delta_{nn} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1+\eta_{11} & & & & & \\ \eta_{21} & 1+\eta_{22} & & & & \\ \eta_{31} & \eta_{32} & 1+\eta_{33} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \eta_{n3} & \cdots & 1+\eta_{nn} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix},$$

其中 $|\delta_{ij}| < \frac{1}{2}, |\eta_{ij}| < \frac{1}{3}$, 通过计算可知 $L \in \mathscr{B}(L_0, \frac{1}{2}), C \in \mathscr{B}(C_0, \frac{1}{3})$, 并且

$$\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{3} < \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}.$$

应用定理 4.4 可知, 系统 $\{L, C\}$ 是稳定的.

7 结论

在套代数的框架下, 我们主要应用 gap 度量研究了线性时变系统的鲁棒稳定性问题. 当系统 L 和控制器 C 分别具有 gap 度量下的扰动时, 即 $L \in \mathscr{B}(L_0, r_1)$ 和 $C \in \mathscr{B}(C_0, r_2)$ 时, 我们研究了系统 $\{L, C\}$ 的鲁棒稳定性, 应用系统图和控制器图的三角形式, 给出了系统鲁棒稳定的一个充分条件. 进一步地, 当系统和控制器都具有扰动时, 对于两个系统 $L_1 \in \mathscr{B}(L_{10}, r_1)$ 和 $L_2 \in \mathscr{B}(L_{20}, r_1)$, 以及控制器 $C \in \mathscr{B}(C_0, r_2)$, 我们给出了 L_1 和 L_2 可被控制器 C 同时鲁棒稳定的充分条件. 并且将两个系统同时鲁棒稳定的结论推广到了 n 个系统.

致谢 感谢审稿人和编辑的建议和帮助.

参 考 文 献

[1] Dale W. N., Smith M. C., Stabilizability and existence of system representations for discrete-time time-varying systems, *SIAM J. Control Optim.*, 1993, **31**(b): 1538–1557.
[2] Davidson K. R., Nest Algebras, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 191, Longman Scientific and Technical Pub. Co., UK, 1988.
[3] Djouadi S. M., On robustness in the gap metric and coprime factor uncertainty for LTV systems, *Syst. Control Lett.*, 2015, **80**: 16–22.
[4] Doyle J., Francis B. A., Tannenbaum A. R., Feedback Control Theory, Macmillan Publishing Co., New York, 1990.
[5] Feintuch A., On strong stabilization for linear time-varying systems, *Syst. Control Lett.*, 2005, **54**: 1091–1095.
[6] Feintuch A., Robust Control Theory in Hilbert Space, Springer, 1998.
[7] Feintuch A., Robustness for time-varying systems, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1993, **6**: 247–263.

[8] Feintuch A., The gap metric for time-varying systems, *Syst. Control Lett.*, 1991, **16**: 277–279.
[9] Foias C., Georgiou T. T., Smith M. C., Geometric techniques for robust stabilization of linear time-varying systems, In: Proc. of the 29th CDC, December, 1990: 2868–2873.
[10] Foias C., Georgiou T. T., Smith M. C., Robust stability of feedback systems: A geometric approach using the gap metric, *SIAM J. Control Optim.*, 1993, **31**: 1518–1537.
[11] Georgiou T. T., Smith M. C., Optimal robustness in the gap metric, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1990, **35**: 673–685.
[12] Georgiou T. T., On the computation of the gap metric, *Syst. Control Lett.*, 1988, **11**: 253–257.
[13] Liu L., Lu Y. F., Coprime representations and feedback stabilization of discrete time-varying linear systems, *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2019, **17**(2): 425–434.
[14] Liu L., Lu Y. F., Necessary and sufficient conditions to the transitivity in simultaneous stabilisation of time-varying systems, *IET Control Theory Appl.*, 2013, **7**(14): 1834–1842.
[15] Liu L., Lu Y. F., Transitivity in simultaneous stabilization for a family of time-varying systems, *Syst. Control Lett.*, 2015, **78**: 55–62.
[16] Lu Y. F., Gong T., On stabilization for discrete linear time-varying systems, *Syst. Control Lett.*, 2011, **60**: 1024–1031.
[17] Lu Y. F., Xu X. P., The stabilization problem for discrete time-varying linear systems, *Syst. Control Lett.*, 2008, **57**(11): 936–939.
[18] Quadrat A., The fractional representation approach to synthesis problems: An algebraic analysis viewpoint, Part II: Internal stabilization, *SIAM J. Control Optim*, 2003, **42**: 300–320.
[19] Qiu L., Davison E. J., Feedback stability under simultaneous gap metric uncertainties in plant and controller, *Syst. Control Lett.*, 1992, **18**: 9–22.
[20] Smith M. C., On stabilization and existence of coprime factorizations, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1989, **34**: 1005–1007.
[21] Vidyasagar M., Control System Synthesis: A Factorization Approach, MIT Press, Cambridge, 1985.
[22] Vidyasagar M., The graph metric for unstable plants and robustness estimates for feedback stability, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1984, **29**(5): 403–418.
[23] Xu X. P., Liu L., Robust stability analysis for linear systems subjected to time-varying uncertainties within the framework of nest algebra, *Science Asia*, 2018, **44**: 46–53.
[24] Yu T. Q., Bicoprime factor stability criteria for linear time-varying systems in the nest algebra, *International Journal of Control*, https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1634287, 2019.
[25] Yu T. Q., Chi W., Sufficient conditions for simultaneous stabilization of three linear systems within the framework of nest algebras, *Journal of the Franklin Institute*, 2014, **351**: 5310–5325.
[26] Yu T. Q., The transitivity in simultaneous stabilization, *Syst. Control Lett.*, 2011, **60**: 1–6.
[27] Yu T. Q., Yan H., Simultaneous controller design for time-varying linear systems, *Syst. Control Lett.*, 2011, **60**: 1032–1037.
[28] Zames G., El-Sakkary A. K., Unstable systems and feedback: the gap metric, In: Proc. 16th Allerton Conf., 1980, 380–385.