第64卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.64, No.5
2021年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)05-0857-08 **文献标识码: A**

对角线传递蕴含按序列对角线分布混沌

钟兴富

广东外语外贸大学数学与统计学院 广州 510006
E-mail: xfzhong@gdufs.edu.cn

陈志景

广东技术师范大学数学与系统科学学院 广州 510665
E-mail: chzhjing@mail2.sysu.edu.cn

摘 要 本文介绍了按序列对角线分布混沌的概念. 运用 Kuratowski–Mycielski 定理, 证明了对角线传递系统有稠密的 Mycielski 按序列对角线分布混沌集.

关键词 对角线传递; 按序列对角线分布混沌; 分布混沌
MR(2010) 主题分类 37B05, 37B20, 54H20
中图分类 O193

Delta Transitivity Implies Delta Distributional Chaos in a Sequence

Xing Fu ZHONG

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou 510006*, P. R. China*
E-mail: *xfzhong@gdufs.edu.cn*

Zhi Jing CHEN

School of Mathematics and Systems Science, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou 510665*, P. R. China*
E-mail: *chzhjing@mail2.sysu.edu.cn*

Abstract We introduce the notion of Δ-distributional chaos with respect to a sequence. Using Kuratowski–Mycielski's Theorem, we show that Δ-transitivity implies the existence of a dense Mycielski's set which is Δ-distributional chaotic in some sequence.

Keywords Δ-transitivity; Δ-distributional chaos; distributional chaos
MR(2010) Subject Classification 37B05, 37B20, 54H20
Chinese Library Classification O193

收稿日期: 2020-04-25; 接受日期: 2020-10-19
基金项目: 国家自然科学基金 (11771459, 11701584, 11871228); 广东外语外贸大学研究基金 (299-X5218165, 299-X5219222); 广东省普通高校特色创新类项目 (2018KTSCX122) 和广东省基础与应用基础研究基金区域联合基金 (青年基金项目: 2019A1515110932)
通讯作者: 陈志景

1 引言

混沌理论是动力系统研究的一个热点. 自从李天岩和 Yorke 在 1975 年发表了《周期三蕴含混沌》[7] 以来, 学者们提出了各种各样的混沌: 如 Devaney 混沌、分布混沌、正拓扑熵、弱混合集和敏感等等. 关于这些混沌之间的关系见综述文章 [6].

Schweizer 和 Smítal 在文 [10] 中从概率论的观点出发对区间自映射介绍了分布混沌, 且证明了系统有正拓扑熵等价于系统是分布混沌的. 之后, 熊金城等人在文 [14] 中引入 Furstenberg 族混沌, 并且揭示了分布混沌就是某种 Furstenberg 族混沌. 与此同时, 王立东等人在文 [13] 中把分布混沌推广到按序列分布混沌. 分布混沌不仅是经典系统, 同时也是非自治系统和线性系统的研究热点, 见文 [2, 5, 11] 及其参考文献.

Oprocha 在文 [9] 中证明了弱混合系统存在按某种序列分布混沌的子集. 王立东等人在文 [12] 中也证明了同样的结论. 虽然对角线传递是一种比弱混合更强的性质, 但是近期的研究表明它们具有很多相似的性质 [4]. 自然地, 这就产生了一个问题: 如果一个系统是对角线传递的, 那么该系统是否具有某种分布混沌性质?

本文运用 Kuratowski–Mycielski 定理来正面回答这个问题.

本节剩余部分将回顾拓扑动力系统中的一些基本概念. 第 2 节引入按序列对角线分布混沌的概念并给出本文主要定理 (见定理 2.6). 第 3 节给出定理 2.6 的证明.

设 (X,d) 是一个紧致度量空间, f 是 X 上的连续自映射. 称偶对 (X,f) 是一个拓扑动力系统 (简称为系统).

本文用 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}_+$ 分别表示正整数集和非负整数集. 对任意的 $d\geq 2$ 和 X 的子集 $U_1,\ldots,U_d$. 定义 $U_1,\ldots,U_d$ 的碰撞时间集为

$$N(U_1,\ldots,U_d)=\left\{n\in\mathbb{N}:\bigcap_{i=1}^{d}f^{-(i-1)n}(U_i)\neq\emptyset\right\}.$$

如果对任意的两个非空开子集 $U,V\subset X$, 有 $N(U,V)\neq\emptyset$, 则称系统 (X,f) 是传递的; 如果 $(X\times X,T\times T)$ 是传递的, 则称系统是弱混合的. 由 Furstenberg 相交引理 (文 [15, 定理 1.4.4]) 可知, 系统 (X,f) 是弱混合的当且仅当对任意的 $n\geq 2$ 和非空开子集 $U_i,V_i\in X$, $i=1,2,\ldots,n$, 有 $\bigcap_{i=1}^{n}N(U_i,V_i)\neq\emptyset$.

如果对任意的 $m\geq 2$, 存在稠密的 G_δ 子集 $Y\subset X$, 使得对任意的 $x\in Y$, 都有

$$\{(T^n(x),T^{2n}(x),\ldots,T^{mn}(x)):n\in\mathbb{N}\}$$

在 X^m 中稠, 则称系统 (X,f) 是对角线传递的. 由文 [4, 命题 3.1] 知, 系统 (X,f) 是对角线传递的当且仅当对任意的 $d\geq 2$ 和 X 的非空开子集 $U_1,\ldots,U_d$, 有 $N(U_1,\ldots,U_d)\neq\emptyset$.

设 $F\subset\mathbb{N}$. 如果对任意 $N\geq 1$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $\{n,n+1,\ldots,n+N\}\subset F$, 则称 F 为 thick 集. 设 $\mathscr{F}$ 由 $\mathbb{N}$ 的一些子集构成的集族. 如果对任意的 $F_1,F_2\in\mathscr{F}$, 存在非空集合 $F\in\mathscr{F}$, 使得 $F\subset F_1\cap F_2$, 则称 $\mathscr{F}$ 是一个滤子基 (filter base). 由文 [4, 命题 2.4 和 3.2] 知, 弱混合和对角线传递系统有如下刻画.

命题 1.1 设 (X,f) 是一个系统, 则下列条件等价:

(1) (X,f) 是弱混合的;

(2) 碰撞时间集构成的集族 $\{N(U,V):U,V$ 为 X 的非空开子集$\}$ 是一个滤子基;

(3) 对任意的两个非空开子集 $U, V \subset X$, 碰撞时间集 $N(U,V)$ 是 thick 集.

命题 1.2 设 (X,f) 是一个系统, 则下列条件等价:

(1) (X,f) 是对角线传递的;

(2) 碰撞时间集构成的集族 $\{N(U_1,\dots,U_d) : d \geq 2$ 且 $U_1,\dots,U_d$为 X 的非空开子集$\}$ 是一个滤子基;

(3) 对任意的 $d \geq 2$ 和非空开子集 $U_1,\dots,U_d \subset X$, 碰撞时间集 $N(U_1,\dots,U_d)$ 是 thick 集.

2 对角线弱混合和按序列对角线分布混沌

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$. 对任意的 $k \geq 1$ 和 X 的子集 $U_0,\dots,U_k$, 定义 $U_0,\dots,U_k$ 相对于 $\mathbf{a}$ 的碰撞时间集为

$$N_{\mathbf{a}}(U_0,\dots,U_k) = \left\{ n \in \mathbb{N} : U_0 \cap \bigcap_{i=1}^{k} f^{-a_i n}(U_i) \neq \emptyset \right\}.$$

记 $\mathrm{FAT}\triangle_k(\mathbb{N}) := \{(a_1,a_2,\dots,a_k) \in \mathbb{N}^k:$ 存在 $1 \leq i < j \leq k$, 使得 $a_i = a_j\}$.

定义 2.1 设 (X,f) 是一个系统, $\mathbf{a} = (a_1,a_2,\dots,a_k) \in \mathbb{N}^k \setminus \mathrm{FAT}\triangle_k(\mathbb{N})$. 称 (X,f) 是 **a-** 弱混合的. 如果对任意 $n \in \mathbb{N}$ 和非空开子集 U_{ij}, $i = 1,\dots,n$, $j = 0,\dots,k$, 有

$$\bigcap_{i=1}^{n} N_{\mathbf{a}}(U_{i,0},\dots,U_{i,k}) \neq \emptyset.$$

给定 $k \geq 1$, 记 $\alpha_k = (1,2,\dots,k)$. 称 (X,f) 是对角线弱混合的, 如果对任意的 $k \geq 1$, 它是 α_k-弱混合的.

注 2.2 (1) 由命题 1.2 知, 对角线弱混合等价于对角线传递;

(2) 由文 [3, 注记 5.2] 知, 定义 **a-** 弱混合时要求 "$\mathbf{a} = (a_1,a_2,\dots,a_k) \in \mathbb{N}^k \setminus \mathrm{FAT}\triangle_k(\mathbb{N})$" 是合理的. 例如, 若一个系统是 $(1,1)$- 弱混合的, 则存在一个点 $x \in X$, 使得集合 $A := \{(f^n(x), f^n(x)) : n \in \mathbb{N}\}$ 在积空间 $X \times X$ 中稠密. 但是, 集合 A 是积空间 $X \times X$ 的对角线的子集. 这将导致底空间 X 是一个单点集. 从而, 此时系统 (X,f) 是一个平凡系统.

命题 2.3 设 (X,f) 是一个系统, $\mathbf{a} = (a_1,a_2,\dots,a_k) \in \mathbb{N}^k \setminus \mathrm{FAT}\triangle_k(\mathbb{N})$. 如果 (X,f) 是 **a-** 弱混合的, 则

(1) 对任意的非空开子集 $U_0,\dots,U_k \subset X$, 碰撞时间集 $N_{\mathbf{a}}(U_0,\dots,U_k)$ 是 thick 集;

(2) 碰撞时间集构成的集族$\{N_{\mathbf{a}}(U_0,\dots,U_k) : U_0,\dots,U_k$为 X 的非空开子集$\}$是一个滤子基.

证明 (1) 假设 (X,f) 是 **a-** 弱混合的, 则 (X,f) 是弱混合的. 因此 f 是满射. 对任意的 $N \in \mathbb{N}$ 和 $k+1$ 个非空开子集 $U_0,\dots,U_k \subset X$, 有

$$\bigcap_{i=0}^{N} N_{\mathbf{a}}(U_0, f^{-a_1 i}(U_1), \dots, f^{-a_k i}(U_k)) \neq \emptyset.$$

在此时间集中取一点 n, 则对任意的 $i \in \{0,\dots,N\}$, 有

$$U_0 \cap \bigcap_{j=1}^{k} f^{-a_j(n+i)}(U_j) \neq \emptyset. \quad n+i \in N_{\mathbf{a}}(U_0,\dots,U_k).$$

因此 $\{n, n+1, \dots, n+N\} \subset N_{\mathbf{a}}(U_0,\dots,U_k)$. 这意味着它是 thick 集.

(2) 因为 (X,f) 是弱混合的, 由 Furstenberg 相交引理知, 对任意非空开子集 $U_0,\dots,U_k$ 和 $V_0,\dots,V_k$, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $W_i=U_i\cap f^{-m}(V_i)\neq\emptyset$, $i=0,\dots,k$. 如果 $n\in N_{\mathbf{a}}(W_0,\dots,W_k)$, 则

$$(U_0\cap f^{-m}(V_0))\cap\bigcap_{i=1}^k f^{-a_in}\big(U_i\cap f^{-m}(V_i)\big)\neq\emptyset.$$

因此

$$\left(U_0\cap\bigcap_{i=1}^k f^{-a_in}(U_i)\right)\bigcap f^{-m}\left(V_0\cap\bigcap_{i=1}^k f^{-a_in}(V_i)\right)\neq\emptyset.$$

故

$$n\in N_{\mathbf{a}}(U_0,\dots,U_k)\cap N_{\mathbf{a}}(V_0,\dots,V_k).$$

这就完成了证明.

设 $\mathbf{p}=\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列递增的正整数序列, $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\dots,a_k)\in\mathbb{N}^k\setminus\mathrm{FAT}\triangle_k(\mathbb{N})$. 对任意的 $x,y\in X$ 和 $n\geq 1$, 定义 $\Phi^n_{xy}(\cdot,\mathbf{p},\mathbf{a})$ 和 $\Psi^n_{xy}(\cdot,\mathbf{p},\mathbf{a})$ 如下:

$$\Phi^n_{xy}(t,\mathbf{p},\mathbf{a})=\frac{1}{n}\#\Big\{0\leq j\leq n-1:\max_{1\leq i\leq k}d(f^{a_ip_j}(x),f^{a_ip_j}(y))<t\Big\},$$
$$\Psi^n_{xy}(t,\mathbf{p},\mathbf{a})=\frac{1}{n}\#\Big\{0\leq j\leq n-1:\min_{1\leq i\leq k}d(f^{a_ip_j}(x),f^{a_ip_j}(y))>t\Big\},$$

其中 $\#A$ 表示集合 A 的基数. 令

$$\Phi_{xy}(t,\mathbf{p},\mathbf{a})=\limsup_{n\to\infty}\Phi^n_{xy}(t,\mathbf{p},\mathbf{a}),\quad \Psi_{xy}(t,\mathbf{p},\mathbf{a})=\limsup_{n\to\infty}\Psi^n_{xy}(t,\mathbf{p},\mathbf{a}).$$

定义 2.4 给定 $\mathbf{p}=\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\mathbf{a}\in\mathbb{N}^k\setminus\mathrm{FAT}\triangle_k(\mathbb{N})$, 称点对 $(x,y)\in X\times X$ 是 $(\mathbf{p},\mathbf{a})$-分布混沌的, 如果存在 $s>0$, 有 $\Psi_{xy}(s,\mathbf{p},\mathbf{a})=1$ 且对任意的 $t>0$, 有 $\Phi_{xy}(t,\mathbf{p},\mathbf{a})=1$. 称 S 是 $(\mathbf{p},\mathbf{a})$-分布混沌的, 如果 S 中任意两个不同的点构成的点对是 $(\mathbf{p},\mathbf{a})$-分布混沌的. 称系统 (X,f) 是 $(\mathbf{p},\mathbf{a})$-分布混沌的, 如果它有一个不可数的子集是 $(\mathbf{p},\mathbf{a})$-分布混沌的. 称 S 是 $\Delta_{\mathbf{p}}$-分布混沌的 (按序列 $\mathbf{p}$ 对角线分布混沌), 如果对任意的 $k\geq 1$, S 是 $(\mathbf{p},\alpha_k)$-分布混沌的. 称系统 (X,f) 是 $\Delta_{\mathbf{p}}$-分布混沌的 (按序列 $\mathbf{p}$ 对角线分布混沌), 如果它有一个不可数的子集是 $\Delta_{\mathbf{p}}$-分布混沌的.

注 2.5 由定义易知, 文 [10] 中的分布混沌是 $(\mathbb{N},(1))$-分布混沌.

本节的主要定理是:

定理 2.6 设 (X,f) 是一个系统. 如果 (X,f) 是对角线传递的, 则 X 至少包含一个稠密的 Mycielski 集 $M=\bigcup_{i=1}^\infty C_i$ 满足下列性质:

(1) $C_1\subset C_2\subset\dots$;

(2) 存在 $\mathbf{p}$, 使得 M 是 $\Delta_{\mathbf{p}}$-分布混沌的.

3 定理 2.6 的证明

本节将采用文 [9] 中的方法证明定理 2.6, 因此需要做一些准备. 设 (K,d) 是一个紧致度量空间, A 是 K 的非空子集. 称 A 是完全不连通的 (totally disconnected), 如果它的连通子集是单点集; 自密的 (perfect), 如果它是闭的且没有孤立点; 康托尔的 (Cantor's), 如果它是完全不连通的自密紧集; 剩余的 (residual), 如果它包含一个稠密的 G_δ 集; Mycielski 集, 如果 $A=\bigcup_{i=1}^\infty C_i$,

其中 C_i 是康托尔集, $i=1,\ldots$. 记 $B(x,\varepsilon)=\{y\in K,\ d(x,y)<\varepsilon\}$, $d(x,A)=\inf\{d(x,a),\ a\in A\}$, $B(A,\varepsilon)=\{x\in K: d(x,A)<\varepsilon\}$. 用 $\overline{B}(A,\varepsilon)$ 表示 $B(A,\varepsilon)$ 的闭包.

在 K 的所有非空闭子集构成的集合 2^K 上赋予 Hausdorff 度量 d_H:

$$d_H(A,B)=\inf\{\varepsilon>0:\overline{B}(A,\varepsilon)\supseteq B \text{ 且 } \overline{B}(B,\varepsilon)\supseteq A\},$$

则得到空间 $(2^K,d_H)$, 称之为 K 的超空间. 集族

$$\{\langle U_1,\ldots,U_n\rangle : U_1,\ldots,U_n \text{ 是 } K \text{ 的非空开子集}, \ n\in\mathbb{N}\}$$

构成了 2^K 的一个拓扑基, 它生成的拓扑被称为 Vietoris 拓扑, 其中

$$\langle U_1,\ldots,U_n\rangle := \left\{A\in 2^K : A\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i \text{ 且 } U_i\cap A\neq\emptyset,\ i=1,\ldots,n\right\}.$$

从文 [8] 中可知, Hausdorff 度量 d_H 和 Vietoris 拓扑兼容. 称 $\mathscr{Q}\subset 2^K$ 是可遗传的 (hereditary) 如果对任意的 $A\in\mathscr{Q}$, 有 $2^A\subset\mathscr{Q}$.

下面的结果是 Kuratowski–Mycielski 定理的一种形式 (见文 [1, 定理 5.10]), 它在定理 2.6 的证明中扮演着重要的角色.

引理 3.1 设 K 是自密紧空间. 如果 $\mathscr{Q}\subset 2^K$ 是可遗传的剩余集, 则存在一列递增的康托尔集 $C_1\subset C_2\subset\ldots\subset K$, 使得对任意 $i\geq 1$, 都有 $C_i\in\mathscr{Q}$ 且 $C=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$ 在 K 中稠.

定理 2.6 的证明 对任意 $N\geq 1$ 和 $k\in\mathbb{N}$, 定义 $Q_{\alpha_k}^N, P_{\alpha_k}^N\subset 2^X$ 如下:

(I) $E\in Q_{\alpha_k}^N$, 如果存在长度为 N 的严格递增的正整数序列 $N<q_1<\cdots<q_N$ 和实数 $\varepsilon>0$, 使得对任意的 $x,y\in E$, $d(f^{iq_j}(x),f^{iq_j}(y))+\varepsilon<\frac{1}{N}$, $i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,N$.

(II) $F\in P_{\alpha_k}^N$, 如果存在长度为 N 的严格递增的正整数序列 $N<p_1<\cdots<p_N$ 和实数 $\varepsilon>0$, 使得对任意的 $x\in F$, $d(f^{ip_j}(x),x)+\varepsilon<\frac{1}{N}$, $i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,N$. 令

$$\mathscr{Q}=\bigcap_{k\geq 1}\bigcap_{N\geq 1}(Q_{\alpha_k}^N\cap P_{\alpha_k}^N).$$

由定义知 $Q_{\alpha_k}^N$ 和 $P_{\alpha_k}^N$ 是可遗传的. 因此 $\mathscr{Q}\subset 2^X$ 是可遗传的.

为了让陈述更清晰, 我们将之后的证明过程分成三步.

第一步 $\mathscr{Q}\subset 2^X$ 是剩余集, 且在 X 中存在一列康托尔集 $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $C_i\in\mathscr{Q}$, $i\geq 1$, $C_1\subset C_2\subset\cdots$, $C=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$ 在 X 中稠.

根据引理 3.1 和 Baire 纲定理, 只需证明对任意的 $N\geq 1$ 和 $k\geq 1$, $Q_{\alpha_k}^N$ 和 $P_{\alpha_k}^N$ 是 2^X 的可遗传的稠密开子集.

$Q_{\alpha_k}^N$ 的开性. 任意固定一个元素 $E\in Q_{\alpha_k}^N$. 由 $Q_{\alpha_k}^N$ 的定义, 取正整数序列 $q_1,\ldots,q_N$ 和实数 $\varepsilon>0$, 使得对任意的 $x,y\in E$, 有

$$d(f^{iq_j}(x),f^{iq_j}(y))+\varepsilon<\frac{1}{N},\quad i=1,\ldots,k,\quad j=1,\ldots,N.$$

由映射 $f:X\to X$ 的一致连续性知, 对上述 ε 存在 $\delta>0$, 使得如果 $d(x,y)<\delta$, 就有 $d(f^{iq_j}(x),f^{iq_j}(y))<\frac{\varepsilon}{4}$, $i=1,\ldots,k, j=1,\ldots,N$. 由 E 的紧致性知, 存在有限个直径小于 δ 的开子集 $U_1,\ldots,U_m\subset X$, $i=1,\ldots,m$, 使得 $\bigcup_{i=1}^{m}U_i\supset E$. 于是, 对任意 $x',y'\in\bigcup_{i=1}^{m}U_i$ 存在 $x,y\in E$, 使得

$$\max\{d(x,x'),d(y,y')\}<\delta.$$

因此

$$d(f^{iq_j}(x'),f^{iq_j}(y'))+\frac{\varepsilon}{2}\le d(f^{iq_j}(x'),f^{iq_j}(x))+d(f^{iq_j}(x),f^{iq_j}(y))+d(f^{iq_j}(y),f^{iq_j}(y'))+\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\le d(f^{iq_j}(x),f^{iq_j}(y))+\varepsilon<\frac{1}{N}.$$

这说明 $\langle U_1,\dots,U_m\rangle\subset Q^N_{\alpha_k}$, 即 E 是 $Q^N_{\alpha_k}$ 的内点. 由 E 的任意性知, $Q^N_{\alpha_k}$ 是开集.

$P^N_{\alpha_k}$ 的开性. 任意固定 $F\in P^N_{\alpha_k}$. 在 (II) 中选取正整数序列 $p_1,\dots,p_N$ 和实数 $\varepsilon>0$. 类似 Q^N 开性的证明, 取 $0<\delta<\frac{\varepsilon}{4}$ 为 $\frac{\varepsilon}{4}$ 的连续常数. 取 F 的开覆盖 $U'_1,\dots,U'_l$, 使得 $\operatorname{diam}(U'_i)<\delta$ 且 $U'_i\cap F\neq\emptyset$, $i=1,\dots,l$. 那么, 对任意 $x'\in\bigcup_{i=1}^l U'_i$, 存在 $x\in F$, 使得 $d(x,x')<\delta$. 因此

$$d(x',f^{iq_j}(x'))+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{1}{N},\quad i=1,\dots,k,\quad j=1,\dots,N.$$

故 $\langle U_1,\dots,U_m\rangle\subset P^N_{\alpha_k}$, 即 F 是 $P^N_{\alpha_k}$ 的内点. 由 F 的任意性知 $P^N_{\alpha_k}$ 是开集.

$Q^N_{\alpha_k}$ 的稠密性. 对任意的 $m\in\mathbb{N}$ 和 X 的开子集 $U_1,\dots,U_m$, 将证明 $Q^N_{\alpha_k}\cap\langle U_1,\dots,U_m\rangle\neq\emptyset$. 令 $V^0_j=U_j$, $j=1,\dots,m$. 取 X 中的非空开子集 U 满足 $\operatorname{diam}(U)<\frac{1}{2N}$. 由命题 1.2, 有

$$\bigcap_{j=1}^m N(V^0_j,\underbrace{U,\dots,U}_{k\text{个}U})\neq\emptyset.$$

选取开子集 $V^1_j\subset V^0_j$ 和 $q_1>N$, 使得

$$f^{iq_1}(V^1_j)\subset U,\quad i=1,\dots,k,\quad j=1,\dots,m.$$

重复上述做法 N 次, 我们得到开子集列 V^r_j, $j=1,\dots,m$, $r=1,\dots,N$, 以及一个长度为 N 的严格递增的正整数数列 $q_1<\cdots<q_N$, 使得下述条件成立:

(1) $q_1>N$;

(2) $V^N_j\subset V^{N-1}_j\subset\cdots\subset V^0_j$, $j=1,\dots,m$;

(3) $f^{iq_l}(V^l_j)\subset U$, $i=1,\dots,k$, $l=1,\dots,N$, $j=1,\dots,m$.

取 $x_j\in V^N_j$, 则集合 $E=\{x_1,\dots,x_m\}$ 满足 (I) 的条件.

$P^N_{\alpha_k}$ 的稠密性. 任意固定 $m\in\mathbb{N}$ 和 X 中的开子集 $U_1,\dots,U_m$. 类似 $Q^N_{\alpha_k}$ 稠密性的证明. 取 $x_j\in U_j$ 和 $\delta>0$, 使得 $B(x_j,\delta)\subset U_j$, $j=1,\dots,m$, $\delta<\frac{1}{4N}$. 令 $V^0_j=B(x_j,\delta)$, $j=1,\dots,m$. 由命题 1.2 可得

$$\bigcap_{j=1}^m N(V^0_j,\underbrace{V^0_j,\dots,V^0_j}_{k\text{个}V^0_j})\neq\emptyset.$$

取开集 $V^1_j\subset V^0_j$ 和 $p_1>N$, 使得

$$f^{ip_1}(V^1_j)\subset V^0_j,\quad i=1,\dots,k,\quad j=1,\dots,m.$$

重复上述做法 N 次, 我们得到开子集列: V^r_j, $j=1,\dots,m$, $r=1,\dots,N$, 以及一个长度为 N 的严格递增的正整数列 $p_1<\cdots<p_N$, 使得下述条件成立:

(1) $p_1>N$;

(2) $V^N_j\subset V^{N-1}_j\subset\cdots\subset V^0_j$, $j=1,\dots,m$;

(3) $f^{ip_l}(V^l_j)\subset V^0_j$, $i=1,\dots,k$, $l=1,\dots,N$, $j=1,\dots,m$.

取 $y_j\in V^N_j$, 则集合 $F=\{y_1,\dots,y_m\}$ 满足 (II) 的条件. 这说明 $P^N_{\alpha_k}\cap\langle U_1,\dots,U_m\rangle\neq\emptyset$.

第二步 构造所需的序列 $\mathbf{p}=\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$. 首先, 按如下方式归纳地选取序列 $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ 和 $\{L_m\}_{m=1}^{\infty}$:

$$K_1=2,\quad L_1=4,\quad L_m=(2^m+1)K_m,\quad K_{m+1}=(2^m+1)L_m,\quad m>1.$$

显然

$$\lim_{m\to\infty}\frac{K_m}{L_m}=0,\quad \lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{K_{m+1}}=0.$$

接着, 令 $p_1=1$, $p_{K_1}=2$. 因为 $C_1\in Q_{\alpha_1}^{L_1+p_{K_1}}$, 所以存在严格递增的正整数序列 $q_{L_1+p_{K_1}}^{(1)}>\cdots>q_1^{(1)}>L_1+p_{K_1}$, 使得对任意的 $x,y\in C_1$,

$$d(f^{iq_j^{(1)}}(x),f^{iq_j^{(1)}}(y))<\frac{1}{L_1+p_{K_1}},\quad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,L_1+p_{K_1}.$$

令 $p_{K_1+i}=q_i^{(1)}$, $i=1,\dots,L_1-K_1$. 由于 $C_1\in P_{\alpha_1}^{p_{L_1}+K_2}$, 故我们可以选取 $K_2+p_{L_1}<p_1^{(1)}<\cdots<p_{p_{L_1}+K_2}^{(1)}$, 使得对任意的 $x\in C_1$,

$$d(f^{ip_j^{(1)}}(x),x)<\frac{1}{K_2+p_{L_1}},\quad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,p_{L_1}+K_2.$$

令 $p_{L_1+i}=p_i^{(1)}$, $i=1,\dots,K_2-L_1$.

最后, 一般地, 当 $m=n$, 因为 $C_n\in Q_{\alpha_n}^{L_n+P_{K_n}}$, 故存在 $q_{L_n+p_{K_n}}^{(n)}>\cdots>q_1^{(n)}>L_n+p_{K_n}$, 使得对任意的 $x,y\in C_n$,

$$d(f^{iq_j^{(n)}}(x),f^{iq_j^{(n)}}(y))<\frac{1}{L_n+p_{K_n}},\quad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,L_n+p_{K_n}.$$

令 $p_{K_n+i}=q_i^{(n)}$, $i=1,\dots,L_n-K_n$. 又因为 $C_n\in P_{\alpha_n}^{p_{L_n}+K_{n+1}}$, 故可以选取 $K_{n+1}+p_{L_n}<p_1^{(n)}<\cdots<p_{p_{L_n}+K_{n+1}}^{(n)}$, 使得对任意的 $x\in C_n$, 有

$$d(f^{ip_j^{(n)}}(x),x)<\frac{1}{K_{n+1}+p_{L_n}},\quad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,p_{L_n}+K_{n+1}.$$

令 $p_{L_n+i}=p_i^{(n)}$, $i=1,\dots,K_{n+1}-L_n$.

由归纳法知, 序列 $\mathbf{p}=\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足下列性质:

(1) 对任意的 $m\ge 1$ 及任意的 $x,y\in C_m$, 有

$$d(f^{ip_j}(x),f^{ip_j}(y))<\frac{1}{m},\quad i=1,\dots,m,\quad K_m<j\le L_m.$$

(2) 对任意的 $m\ge 1$ 及任意的 $x\in C_m$, 有

$$d(f^{ip_j}(x),x)<\frac{1}{m},\quad i=1,\dots,m,\quad L_m<i\le K_{m+1}.$$

第三步 证明集合 C 按序列 $\mathbf{p}$ 对角线分布混沌.

对任意两个互异点 $x,y\in C$, $k\ge 1$, $t>0$. 记 $s:=\frac{d(x,y)}{2}$, 则对任意大于 $\max\{\frac{1}{t},\frac{s}{2},k\}$ 的正整数 m, 根据序列 $\mathbf{p}=\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的性质 (1) 和 (2), 分别有

$$\begin{aligned}\Phi_{xy}^{L_m}(t,\mathbf{p},\alpha_k)&=\frac{1}{L_m}\#\Big\{0\le j<L_m:\max_{1\le i\le k}d(f^{ip_j}(x),\,f^{ip_j}(y))<t\Big\}\\&\ge\frac{L_m-K_m-1}{L_m}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\Psi_{xy}^{K_{m+1}}(s,\mathbf{p},\alpha_k)&=\frac{1}{K_{m+1}}\#\Big\{0\le j<K_{m+1}:\min_{1\le i\le k}d(f^{ip_j}(x),\,f^{ip_j}(y))>s\Big\}\\&\ge\frac{K_{m+1}-L_m-1}{K_{m+1}}.\end{aligned}$$

由序列 $\{K_m\}$ 和 $\{L_m\}$ 的构造, 有 $\Phi_{xy}(t,\mathbf{p},\alpha_k)=1$ 和 $\Psi_{xy}(s,\mathbf{p},\alpha_k)=1$, 即 x,y 是按序列 $\mathbf{p}$ 对角线分布的混沌对. 由 x,y 的任意性得, 集合 C 按序列 $\mathbf{p}$ 对角线分布混沌. 证毕.

在定理 2.6 的证明过程中, 将 α_k 替换成向量 $(a_1,\ldots,a_k)$, 则可得到下述命题.

命题 3.2 设 (X,f) 是一个系统, $\mathbf{a}\in\mathbb{N}^k\setminus\mathrm{FAT}\triangle_k(\mathbb{N})$. 如果 (X,f) 是 $\mathbf{a}$- 弱混合的, 则 X 至少包含一个稠密 Mycielski 集 $M=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$ 满足下列性质:

(1) $C_1\subset C_2\subset\cdots$;

(2) 存在 $\mathbf{p}$, 使得 M 是 $(\mathbf{p},\mathbf{a})$- 分布混沌集.

致谢 对审稿人表示衷心的感谢. 审稿人中肯的意见使本文得以进一步完善.

参考文献

[1] Akin E., Lectures on Cantor and Mycielski Sets for Dynamical Systems, In: Chapel Hill Ergodic Theory Workshops, Amer. Math. Soc. Providece, RI, 2004, 21–79.

[2] Bernardes N. C., Bonilla A., Peris A., et al., Distributional chaos for operators on banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, **459**: 797–821.

[3] Chen Z. J., Li J., Lü J., Point transitivity, Δ-transitivity and multi-minimality, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2015, **35**: 1423–1442.

[4] Huang W., Li J., Ye X. D., et al., Positive topological entropy and Δ-weakly mixing sets, *Advances in Mathematics*, 2017, **306**: 653–683.

[5] Li J., Li J., Tu S. M., Devaney chaos plus shadowing implies distributional chaos, *Chaos*, 2016, **26**(9): 093103, 6 pp.

[6] Li J., Ye X. D., Recent development of chaos theory in topological dynamics, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2016, **32**(1): 83–114.

[7] Li T. Y., Yorke J. A., Period three implies chaos, *American Mathematical Monthly*, 1975, **82**(10): 985–992.

[8] Nadler S. B. Jr., Hyperspaces of Sets, Marcel Dekker, New York, 1978, 10–11.

[9] Oprocha P., A note on distributional chaos with respect to a sequence, *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, 2009, **71**(11): 5835–5839.

[10] Schweizer B., Smítal J., Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1994, **344**(2): 737–754.

[11] Shao H., Shi Y. M., Zhu H., On distributional chaos in non-autonomous discrete systems, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, **107**: 234–243.

[12] Wang L. P., Yang Y. E., Chu Z. Y., et al., Weakly mixing implies distributional chaos in a sequence, *Modern Physics Letters B*, 2010, **24**(14): 1595–1660.

[13] Wang L. P., Huang G. F., Huan D. M., Distributional chaos in a sequence, *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, 2007, **67**(7): 2131–2136.

[14] Xiong J. C., Lü J., Tan F., Furstenberg family and chaos, *Science in China*, 2007, **50**(9): 1325–1333.

[15] Ye X. D., Huang W., Shao S., An Introduction to Topological Dynamical Systems (in Chinese), Science Press, Beijing, 2008, 18.