第64卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.64, No.5
2021年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)05-0773-14 **文献标识码:** A

完备随机赋范模上的连续模同态半群

张 霞 刘 明

天津工业大学数学科学学院 天津 300387
E-mail: zhangxia@tiangong.edu.cn; liuming@tiangong.edu.cn

摘 要 本文首先利用完备随机赋范模的层次结构研究了一致连续模同态半群与其无穷小生成元之间的关系, 并进一步给出几乎处处有界半群的指数刻画. 在此基础上, 建立几乎处处有界半群的微分和积分公式, 推广了经典的结论. 同时, 用反例说明要求上述半群几乎处处有界的条件是必要的.

关键词 L^0-Lipschitz; 随机赋范模; 连续模同态半群; 指数刻画
MR(2010) 主题分类 46H25, 46B09
中图分类 O177.2

On Semigroups of Continuous Module Homomorphisms on Complete Random Normed Modules

Xia ZHANG Ming LIU

School of Mathematical Sciences, Tiangong University,
Tianjin 300387, *P. R. China*
E-mail: *zhangxia@tiangong.edu.cn*; *liuming@tiangong.edu.cn*

Abstract In this paper, using the stratification structures of complete random normed modules, we first study some relations between the uniformly continuous semigroups of continuous module homomorphisms and their infinitesimal generators, and further give an exponential characterization of such almost surely bounded semigroups. Then, based on this, we establish the differential and integral formulas for such almost surely bounded semigroups, which generalize the classical case. Meantime, the counterexample also shows that it is necessary to require the almost surely bounded assumption for such semigroups.

Keywords L^0-Lipschitz; random normed module; semigroup of continuous module homomorphisms; exponential characterization
MR(2010) Subject Classification 46H25, 46B09
Chinese Library Classification O177.2

收稿日期: 2020-06-12; 接受日期: 2020-09-03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11301380);
教育部人文社科基金资助项目 (20YJC790174); 天津市自然科学基金资助项目 (18JCYBJC18900)
通讯作者: 刘明

1 引言

1942 年, 几何与拓扑学家 Menger 提出概率度量空间概念, 其基本思想是将两点间距离的随机性用分布函数来描述. 随后, 概率论学家 Schweizer、Sklar [13]于 1962 年相继提出概率赋范空间概念, 成功将 Menger 距离随机化的思想传递到线性空间. 30 年前, 受文 [13] 中空间随机化思想的启发, 郭铁信教授在文 [2–4] 中倡导了随机泛函分析的新途径. 具体地, 随机泛函分析是随机度量空间、随机赋范模 (简记为 RN 模)、随机内积模以及随机局部凸模 (它们都是各自经典空间的随机推广) 上的泛函分析. 关于随机泛函分析的发展历史, 请见文 [5, 9, 10]. 现在, 随机泛函分析理论及其应用已获得深入而系统的发展 [5, 6, 8, 9, 14–19, 24, 25]. 近年来, 完备随机赋范模上连续模同态半群的研究也取得了一些进展, 请见文 [11, 20–23]. 基于上述工作, 本文主要致力于建立这类连续模同态半群的微分和积分基本公式.

从文 [11] 中我们知道从有限实闭区间到完备 RN 模的连续函数可能不是几乎处处有界的, 这也意味着 Banach 空间中算子半群中一些基本技巧在随机情形下普遍失效. 因此在本文中被迫给出几乎处处有界连续模同态半群所特有的性质. 具体地讲, 从有限实闭区间到完备随机赋范模的连续函数未必是可积的且微积分基本公式对这类连续可微的函数也不再适用. 幸运的是, 文 [11] 给出了满足 L^0-Lipschitz 条件此类连续函数的微积分基本公式. 而 L^0-Lipschitz 条件与几乎处处有界性紧密相关, 因此如何验证一些可测集的几乎处处有界性将是本文的难点之一. 另外, 本文还将处理连续模同态半群的几乎处处有界性和几乎处处一致有界性之间的关系.

本文第 2 节将回顾一些必要的概念和事实, 第 3 节致力于研究连续模同态的一致连续半群.

2 准备工作

本文中, $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 表示概率空间, $\mathbb{N}$ 表示正整数集, K 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$, $\mathscr{L}^0(\mathscr{F},\mathbb{R})$ 表示 Ω 上所有实值 $\mathscr{F}$- 可测随机变量所构成的集合, $\bar{L}^0(\mathscr{F},\mathbb{R})$ 表示 Ω 上的所有广义实值 $\mathscr{F}$- 可测随机变量等价类所构成的集合, $L^0(\mathscr{F},K)$ 表示 Ω 上所有 K 值 $\mathscr{F}$- 可测随机变量的等价类在通常的点式加法、乘法和数乘运算下所构成的集合.

命题 2.1 [1] $\bar{L}^0(\mathscr{F},\mathbb{R})$ 在序 $\leq$ 下是完备格: $\xi \leq \eta$ 当且仅当 $\xi^0(\omega) \leq \eta^0(\omega)$ 对几乎所有 $\omega\in\Omega$ (简记为 a.s.) 成立, 其中 ξ^0 和 η^0 分别是 ξ 与 η 的任一代表元且具有如下性质:

(1) 对任一子集 $A \subset \bar{L}^0(\mathscr{F},\mathbb{R})$, A 在 $\bar{L}^0(\mathscr{F},\mathbb{R})$ 中必有上确界 (记为 $\bigvee A$) 及下确界 (记为 $\bigwedge A$), 而且在 A 中分别存在两个序列 $\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ 和 $\{b_n, n\in\mathbb{N}\}$, 使得 $\bigvee_{n\geq 1} a_n = \bigvee A$ 和 $\bigwedge_{n\geq 1} b_n = \bigwedge A$;

(2) 如果 A 是上定向 (相应地, 下定向) 的, 那么上述 $\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ (相应地, $\{b_n, n\in\mathbb{N}\}$) 可以选为非降 (相应地, 非增) 的;

(3) $L^0(\mathscr{F},\mathbb{R})$ 作为 $\bar{L}^0(\mathscr{F},\mathbb{R})$ 的子格在下述意义下是完备的: 每一个有上界的子集有上确界 (等价地, 每一个有下界的子集有下确界).

特别地, $L^0_+(\mathscr{F}) := \{\xi\in L^0(\mathscr{F},\mathbb{R}) \,|\, \xi\geq 0\}$.

本文将随机变量与其等价类用如下符号区分. 例如, I_A 表示 $\mathscr{F}$- 可测集 A 的特征函数, 则 $\tilde{I}_A$ 表示其等价类. 另外, 如果 $\xi,\eta\in L^0(\mathscr{F},\mathbb{R})$, 令 ξ^0、η^0 分别为 ξ 和 η 所任意选取的等价类, 且 $A=\{\omega\in\Omega \,|\, \xi^0(\omega) > \eta^0(\omega)\}$, 则我们总是采用 $I_{[\xi>\eta]}$ 表示 A 的等价类且 $I_{[\xi>\eta]}$ 也可记作 $\tilde{I}_A$. 类

似地, 我们可以理解如下记号 $I_{[\xi\leq\eta]}$, $I_{[\xi\neq\eta]}$ 和 $I_{[\xi=\eta]}$. 进一步, 对 $\xi\in L^0(\mathscr{F},K)$, ξ^0 为 ξ 的任一选定的代表元, 定义 $(\xi^0)^{-1}$ 为:

$$(\xi^0)^{-1}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{\xi^0(\omega)}, & \xi^0(\omega)\neq 0,\\ 0, & 0,\end{cases}$$

则 $(\xi^0)^{-1}$ 的等价类 $(\xi)^{-1}$ 称为 ξ 的广义逆.

定义 2.2 [2] 称有序对 $(S,\|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为基的随机赋范模 (简记为 RN 模), 如果 S 是代数 $L^0(\mathscr{F},K)$ 上的左模, $\|\cdot\|$ 是从 S 到 $L^0_+(\mathscr{F})$ 的映射, 满足如下三条公理:

(RN-1) $\|\xi x\|=|\xi|\|x\|$, $\forall\,\xi\in L^0(\mathscr{F},K)$ 及 $x\in S$;

(RN-2) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, $\forall\,x,y\in S$;

(RN-3) $\|x\|=0$ 蕴含 $x=\theta$ (S 中的零向量), 其中 $\|\cdot\|$ 称为 S 的 L^0- 范数且 $\|x\|$ 称为向量 x 的 L^0- 范数.

设 $(S,\|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为基的 RN 模. 对任意的正实数 ε, λ 且 $0<\lambda<1$, 设

$$\mathbb{N}_\theta(\varepsilon,\lambda)=\{x\in S\,|\,P\{\omega\in\Omega\,|\,\|x\|(\omega)<\varepsilon\}>\lambda\},$$

那么集族

$$\{\mathbb{N}_\theta(\varepsilon,\lambda)\,|\,\varepsilon>0,\ 0<\lambda<1\}$$

构成 S 上某个可度量化线性拓扑在 θ 点的局部基, 该拓扑称为 S 的 (ε,λ)- 拓扑. 在本文中, 给定 RN 模 $(S,\|\cdot\|)$, 总假定 $(S,\|\cdot\|)$ 赋予上述的 (ε,λ)- 拓扑. 另外, 还需注意的是 S 中的序列 $\{x_n,n\in\mathbb{N}\}$ 依 (ε,λ)- 拓扑收敛于 $x\in S$ 当且仅当序列 $\{\|x_n-x\|,n\in\mathbb{N}\}$ 依概率 P 收敛于 0.

例 2.3 模数 $|\cdot|:L^0(\mathscr{F},K)\to L^0_+(\mathscr{F})$ 可视为模 $L^0(\mathscr{F},K)$ 上的唯一 L^0- 模, 容易验证 $(L^0(\mathscr{F},K),|\cdot|)$ 为 RN 模.

定义 2.4 [7] 设 $(S^1,\|\cdot\|_1)$ 和 $(S^2,\|\cdot\|_2)$ 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为基的 RN 模. 从 S^1 到 S^2 的线性算子 T 称为广义随机线性算子 (简称随机线性算子). 进一步, 随机线性算子 T 称为几乎处处 (简称 a.s.) 有界的, 如果存在 $\xi\in L^0_+(\mathscr{F})$ 满足

$$\|Tx\|_2\leq\xi\cdot\|x\|_1,\quad x\in S^1.$$

将从 S^1 到 S^2 的所有 a.s. 有界的随机线性算子所构成的线性空间记作 $B(S^1,S^2)$, 定义映射

$$\|\cdot\|:B(S^1,S^2)\to L^0_+(\mathscr{F})$$

为

$$\|T\|:=\bigwedge\{\xi\in L^0_+(\mathscr{F})\,|\,\|Tx\|_2\leq\xi\cdot\|x\|_1,\ \forall\,x\in S^1\},\quad\forall\,T\in B(S^1,S^2),$$

则容易验证 $(B(S^1,S^2),\|\cdot\|)$ 是数域 K 上以 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为基的 RN 模.

下面的命题说明 RN 模 S 上 a.s. 有界的随机线性算子刚好是 S 上的连续模同态.

命题 2.5 [7] 设 $(S^1,\|\cdot\|_1)$ 和 $(S^2,\|\cdot\|_2)$ 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为基的 RN 模, 则

(1) $T\in B(S^1,S^2)$, 即 T 是从 S^1 到 S^2 的 a.s. 有界随机线性算子当且仅当 T 是连续模同态;

(2) 如果 $T\in B(S^1,S^2)$, 则

$$\|T\|=\bigvee\{\|Tx\|_2:x\in S^1\text{ 且 }\|x\|_1\leq 1\},$$

其中 1 为 $L^0(\mathscr{F},\mathbb{R})$ 中的单位元.

定义 2.6 设 $(S, \|\cdot\|)$ 是数域 K 上以 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为基的 RN 模, $B(S)$ 为 S 上所有连续模同态所构成的集合, 则

(1) 称 $\{T(t) : t \geq 0\} \subset B(S)$ 为 S 上的连续模同态半群, 如果 $T(0) = I$ 且 $T(s)T(t) = T(s+t)$ 对任意的 $s, t \geq 0$ 成立, 其中 I 为 S 上的恒同算子;

(2) 称半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ 为一致连续的 (简记为 u.c.), 如果从 $[0, \infty)$ 到 $B(S)$ 的映射 $t \to T(t)$ 关于 (ε, λ)- 拓扑是连续的;

(3) 称半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ 为几乎处处 (简记为 a.s.) 有界的, 如果对任意 $L > 0$,

$$\bigvee_{t \in [0, L]} \|T(t)\| \in L^0_+(\mathscr{F});$$

(4) 称半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ 为几乎处处一致 (简记为 a.s.u.) 有界的, 如果

$$\bigvee_{t \geq 0} \|T(t)\| \in L^0_+(\mathscr{F}).$$

应当指出的是, 对于上面的概念 (1), (3), (4), 可参照文 [16, 20, 23].

定义 2.7[11, 22] 设 $\{T(t) : t \geq 0\}$ 为 RN 模 S 上的连续模同态半群. 定义

$$D(A) = \left\{x \in S : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ 存在}\right\} \text{ 和 } Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall\, x \in D(A),$$

则映射 $A : D(A) \to S$ 为半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ 的无穷小生成元.

3 连续模同态半群的一致连续半群

本节基于完备 RN 模的层次结构, 首先研究连续模同态的一致连续半群与其无穷小生成元之间的关系, 进一步给出 a.s. 有界一致连续半群的指数刻画, 并在上述两个工作的基础上, 建立这类 a.s. 有界一致连续半群的微分和积分公式. 本节的难点在于引理 3.13 和定理 3.14, 在这两处我们被迫研究一些 a.s. 有界连续模同态半群在随机情形下所特有的性质.

本节的第一个主要结果是定理 3.1.

定理 3.1 模同态 A 是 a.s. 有界 u.c. 半群的无穷小生成元当且仅当 A 是连续模同态.

为了证明定理 3.1, 我们需要一些引理. 为方便读者, 首先回顾一些基本事实. 在本节中, $[a, b]$ 表示有限实闭区间, S 表示数域 K 上以 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为基的 RN 模.

命题 3.2[11] 设 f 是从 $[a, b]$ 到 S 的连续函数且 $\bigvee_{t \in [a, b]} \|f(t)\| \in L^0_+(\mathscr{F})$, 则 f 在 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的.

例 3.3[11] 设 $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{F} = \mathfrak{B}[0, 1]$, $P = m$, 其中 $\mathfrak{B}[0, 1]$ 表示 $[0, 1]$ 上的 Borel σ- 代数, m 表示 Lesbegue 测度. 定义映射 $f^0 : [0, 1] \to \mathscr{L}^0(\mathscr{F}, \mathbb{R})$ 为

$$f^0(t)(\omega) = \frac{1}{\omega - t} \cdot I_{(t, 1]}(\omega), \quad \forall\, t \in [0, 1] \text{ 且 } \omega \in \Omega,$$

对任意固定的 $t \in [0, 1]$, $f(t)$ 表示由 $f^0(t)$ 所决定的等价类, 则 f 在 $[0, 1]$ 连续但

$$\bigvee_{t \in [0, 1]} |f(t)| = \infty.$$

由文 [16] 知, 称映射 $f : [a, b] \to S$ 在 $[a, b]$ 上是 L^0-Lipschitz 的, 如果存在 $\xi \in L^0_+(\mathscr{F})$ 满足 $\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \xi |t_1 - t_2|$, $\forall\, t_1, t_2 \in [a, b]$. 进一步, 容易验证映射 $f : [a, b] \to S$ 在 $[a, b]$ 上是

L^0-Lipschitz 的当且仅当 f 满足条件

$$\bigvee\left\{\left\|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\Big|\, t_1,\, t_2\in[a,b] \text{ 且 } t_1<t_2\right\}\in L^0_+(\mathscr{F}).$$

命题 3.4[11] (微积分基本定理) 设 $f:[a,b]\to S$ 是连续可微的. 如果 f 在 $[a,b]$ 是 L^0-Lipschitz 的, 则 f' 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的, 且

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)dt.$$

受例子 3.3 的启发, 例子 3.5 说明命题 3.4 中的 L^0-Lipschitz 假定是必要的, 也可见文 [23].

例 3.5 设 $\Omega=[0,1]$, $\mathscr{F}=\mathfrak{B}[0,1]$, $P=m$, 其中 $\mathfrak{B}[0,1]$ 表示 $[0,1]$ 上的 Borel σ- 代数, m 表示 Lesbegue 测度. 定义映射 $f^0:[0,1]\to\mathscr{L}^0(\mathscr{F},\mathbb{R})$ 为

$$f^0(t)(\omega)=I_{(t,1]}(\omega),\quad \forall\, t\in[0,1] \quad \text{且 } \omega\in\Omega.$$

对固定的 $t\in[0,1]$, $f(t)$ 表示由 $f^0(t)$ 所决定的等价类, 则 f 在 $[0,1]$ 上可微, 且

$$f'(t)=0,\quad \forall\, t\in[0,1].$$

命题 3.6[22] 设 f 是从 $[a,b]$ 到 $L^0(\mathscr{F},\mathbb{R})$ 的连续函数, 且

$$\bigvee_{t\in[a,b]}|f(t)|\in L^0_+(\mathscr{F}),$$

则

$$\int_\Omega\left[\int_a^b f(t)dt\right]dp=\int_a^b\left[\int_\Omega f(t)dp\right]dt.$$

接下来, 假定 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 S 上 a.s. 有界的 u.c. 连续模同态半群, 即 $\exists\, L>0$, 使得

$$\bigvee_{t\in[0,L]}\|T(t)\|\in L^0_+(\mathscr{F}).$$

固定 $0<r<L$, 令

$$\widehat{T}(r)=\frac{1}{r}\int_0^r T(s)ds,$$

由于映射 $T(\cdot):[0,r]\to B(S)$ 是连续的, 且

$$\bigvee_{s\in[0,r]}\|T(s)\|\leq\bigvee_{s\in[0,L]}\|T(s)\|\in L^0_+(\mathscr{F}).$$

根据命题 3.2 可知, $\widehat{T}(r)$ 定义合理且 $\widehat{T}(r)\in B(S)$. 进一步, 引理 3.7 成立.

引理 3.7 $\lim_{r\downarrow 0}\widehat{T}(r)=I$.

证明 令 $\xi_L=\bigvee_{t\in[0,L]}\|T(t)-I\|$, 则 $\xi_L\in L^0_+(\mathscr{F})$. 令 $H_{n,L}=[n-1\leq\xi_L<n]$, $\forall\, n\geq 1$, 则 $\{H_{n,L},n\geq 1\}$ 是一列两两不相交的 $\mathscr{F}$- 可测集且 $\sum_{n=1}^\infty H_{n,L}=\Omega$. 由于对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 有 $\int_{H_{n,L}}\|T(s)-I\|dp$ 在 $[0,r]$ 上关于 s 是连续的, 则由命题 3.6 知, 当 $r\downarrow 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left[\frac{1}{r}\int_0^r\|T(s)\cdot I_{H_{n,L}}-I_{H_{n,L}}\|ds\right]dp&=\frac{1}{r}\int_0^r\left[\int_\Omega\|T(s)\cdot I_{H_{n,L}}-I_{H_{n,L}}\|dp\right]ds\\&=\frac{1}{r}\int_0^r\left[\int_{H_{n,L}}\|T(s)-I\|dp\right]ds\to 0,\end{aligned}$$

从而对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 当 $s\downarrow 0$ 时, $\frac{1}{r}\int_0^r\|T(s)I_{H_{n,L}}-I_{H_{n,L}}\|ds$ 依概率 P 收敛于 0. 显然

$$\begin{aligned}\|I_{H_{n,L}}\widehat{T}(r)-I_{H_{n,L}}\| &= \left\|\frac{1}{r}\int_0^r T(s)I_{H_{n,L}}ds-I_{H_{n,L}}\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{r}\int_0^r [T(s)I_{H_{n,L}}-I_{H_{n,L}}]ds\right\| \\ &\le \frac{1}{r}\int_0^r\|T(s)I_{H_{n,L}}-I_{H_{n,L}}\|ds,\end{aligned}$$

这意味着, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 当 $r\downarrow 0$ 时, $\|I_{H_{n,L}}\widehat{T}(r)-I_{H_{n,L}}\|$ 依概率 P 收敛于 0. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(H_{n,L})=P\bigg(\sum_{n=1}^{\infty}H_{n,L}\bigg)=P(\Omega),$$

故 $\lim_{r\downarrow 0}\widehat{T}(r)=I$. 证毕.

根据引理 3.7, 可得引理 3.8.

引理 3.8 对任意的 $h>0$, 有

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{r}\int_h^{h+r}T(s)ds=T(h).$$

证明 由于对任意的 $h>0$, 有

$$\frac{1}{r}\int_h^{h+r}T(s)ds=\frac{1}{r}\int_0^r T(s+h)ds=T(h)\cdot\frac{1}{r}\int_0^r T(s)ds,$$

根据引理 3.7, 对任意的 $h>0$,

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{r}\int_h^{h+r}T(s)ds=T(h).$$

证毕.

接下来, 设 $(S,\|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为基的完备随机赋范模, 令

$$L^2(S)=\left\{x\in S\ \middle|\ \left[\int_\Omega\|x\|^2dP\right]^{\frac{1}{2}}<+\infty\right\},$$

定义映射 $\|\cdot\|_2:L^2(S)\to[0,+\infty)$ 为

$$\|x\|_2=\left[\int_\Omega\|x\|^2dP\right]^{\frac{1}{2}},\quad \forall\, x\in L^2(S),$$

则容易验证 $(L^2(S),\|\cdot\|_2)$ 是 Banach 空间, 细节请见文 [5].

命题 3.9[11] 设 f 是从 $[a,b]$ 到 S 的连续函数且 $\bigvee_{t\in[a,b]}\|f(t)\|\in L^2(\mathscr{F},\mathbb{R})$, 则 f 在 $[a,b]$ 上按 $\|\cdot\|_2$ 是 Riemann 可积的, 其 Riemann 积分记作 $\|\cdot\|_2-\int_a^b f(t)dt$.

在引理 3.7 和 3.8 以及命题 3.9 的基础上, 我们给出定理 3.1 的证明.

定理 3.1 的证明 "$\Leftarrow$" 设 A 是 S 上的连续模同态, 令

$$T(t)=\exp(tA):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}. \tag{3.1}$$

由于

$$\|T(t)\|=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}\right\|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\|A\|)^n}{n!}=\exp(t\|A\|),$$

故对每一个 $t\geq 0$, 序列 $\{\sum_{n=0}^{k}\frac{(tA)^n}{n!}, k\geq 0\}$ 依 (ε,λ)- 拓扑收敛到 $T(t)$ 且 $T(t)$ 是连续模同态. 容易验证, $T(0)=I$ 且 $T(t+s)=T(t)T(s)$, 这说明 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是连续模同态半群. 进一步,

$$\begin{aligned}\|T(t)-I\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\|A\|^n}{n!}\\ &= t\|A\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}\|A\|^{n-1}}{n!} \leq t\|A\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}\|A\|^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= t\|A\|\cdot\exp(t\|A\|)\end{aligned}$$

且

$$\left\|\frac{T(t)-I}{t}-A\right\|\leq \|A\|\cdot\bigvee_{0\leq s\leq t}\|T(s)-I\|,$$

故 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 S 上的 u.c. 连续模同态半群且 A 是其无穷小生成元.

接下来证明 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 a.s. 有界的. 由于 $\|T(t)\|\leq\exp(t\|A\|)$, 故对任意的 $L>0$, 有

$$\bigvee_{t\in[0,L]}\|T(t)\|\leq\exp(L\|A\|),$$

即

$$\bigvee_{t\in[0,L]}\|T(t)\|\in L^0_+(\mathscr{F}).$$

“ $\Rightarrow$” 设 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 a.s.有界的 u.c.连续模同态半群, 即 $\exists\, L>0$, 使得 $\bigvee_{t\in[0,L]}\|T(t)\|\in L^0_+(\mathscr{F})$. 令

$$\xi_L=\bigvee_{t\in[0,L]}\|T(t)\|,$$

则 $\xi_L\in L^0_+(\mathscr{F})$. 令 $A_{n,L}=[n-1\leq\xi_L<n]$, $\forall\, n\geq 1$, 则 $\{A_{n,L}, n\geq 1\}$ 是一列两两不相交的 $\mathscr{F}$- 可测集且 $\sum_{n=1}^{\infty}A_{n,L}=\Omega$. 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $\tilde{T}_n:[0,r]\to S$ 为

$$\tilde{T}_n(t)=I_{A_{n,L}}\cdot T(t).$$

显然

$$\bigvee_{t\in[0,r]}\|\tilde{T}_n(t)\|\in L^2(\mathscr{F},\mathbb{R}),$$

故由命题 3.9 可知 $\|\cdot\|_2-\int_0^r\tilde{T}_n(s)ds$ 存在. 进一步, $\int_0^r\tilde{T}_n(s)ds$ 存在且刚好为 $\|\cdot\|_2-\int_0^r\tilde{T}_n(s)ds$. 接下来, 由引理 3.7 可知

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{r}\int_0^r T(s)ds=I,$$

故当 $r\downarrow 0$ 时, $\frac{1}{r}\int_0^r[I_{A_{n,L}}\cdot T(s)]ds$ 依 (ε,λ)- 拓扑收敛于 $I_{A_{n,L}}$. 因此当 $r\downarrow 0$ 时, 由 Lebesgue 控制收敛定理得 $\frac{1}{r}\int_0^r[I_{A_{n,L}}\cdot T(s)]ds$ 依 $\|\cdot\|_2$ 收敛于 $I_{A_{n,L}}$. 进一步, 我们观察到当 r 充分小时, $\frac{1}{r}\int_0^r[I_{A_{n,L}}\cdot T(s)]ds$ 在 $A_{n,L}$ 上是可逆的, 而且对任意的 $h>0$, 有

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^r[I_{A_{n,L}}\cdot T(s)]ds &= \frac{1}{h}\left(\int_0^r[I_{A_{n,L}}\cdot T(h+s)]ds-\int_0^r[I_{A_{n,L}}\cdot T(s)]ds\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_r^{r+h}[I_{A_{n,L}}\cdot T(s)]ds-\int_0^h[I_{A_{n,L}}\cdot T(s)]ds\right),\end{aligned}$$

故

$$I_{A_{n,L}} \cdot \frac{T(h)-I}{h} = \left[\frac{1}{h}\left(\int_r^{r+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\right)\right]\left[\int_0^r I_{A_{n,L}} \cdot T(s)ds\right]^{-1}. \tag{3.2}$$

在上式中令 $h \downarrow 0$, 则由引理 3.7 和 3.8 可得 $I_{A_{n,L}} \cdot \frac{T(h)-I}{h}$ 依 (ε,λ)- 拓扑收敛于 $(T(r)-I)[\int_0^r \tilde{T}_n(s)ds]^{-1}$. 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 令

$$T_k = (T(r)-I) \cdot \sum_{n=1}^{k} I_{A_{n,L}} \cdot \left[\int_0^r \tilde{T}_n(s)ds\right]^{-1}, \ \ \forall k \in \mathbb{N},$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{n,L}) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{n,L}\right) = P(\Omega) = 1,$$

从而 $\{T_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ 在 $B(S)$ 中依 (ε,λ)- 拓扑是 Caucly 列. 又由于 $B(S)$ 完备, 因此 $\{T_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ 收敛于 $B(S)$ 中的一点 A 且 A 是 $\{T(t): t \geq 0\}$ 的无穷小生成元. 证毕.

引理 3.10 设 $\{T(t): t \geq 0\}$ 和 $\{S(t): t \geq 0\}$ 是 a.s. 有界的半群. 如果

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)-I}{t} = A = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)-I}{t}, \tag{3.3}$$

则对任意的 $t \geq 0$, 有 $T(t) = S(t)$.

证明 往证对任意固定的 $T > 0$, 有 $S(t) = T(t), \forall 0 \leq t \leq T$. 固定 $T > 0$, 由于 $\{T(t): t \geq 0\}$ 与 $\{S(t): t \geq 0\}$ 均 a.s. 有界, 故 $\bigvee_{t\in[0,T]} \|T(t)\| \in L^0_+(\mathscr{F})$ 且 $\bigvee_{t\in[0,T]} \|S(t)\| \in L^0_+(\mathscr{F})$, 从而 $\exists M_T \in L^0_+(\mathscr{F})$, 使得

$$\|T(t)\|\,\|S(s)\| \leq M_T, \ \ \forall 0 \leq s, \ \ t \leq T.$$

给定 $\varepsilon > 0$, $r > 0$, 由式 (3.3) 可知 $\exists \delta > 0$, 使得

$$P\left[TM_T \frac{\|T(h)-S(h)\|}{h} \geq r\right] < \varepsilon, \ \ \forall 0 < h \leq \delta.$$

令 $0 < t \leq T$, 选取 $n \geq 1$, 使得 $\frac{t}{n} < \delta$, 且

$$\begin{aligned}
\|T(t)-S(t)\| &= \left\|T\left(n \cdot \frac{t}{n}\right) - S\left(n \cdot \frac{t}{n}\right)\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\|T\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right)\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\|T(n-k-1)\frac{t}{n}\right\| \left\|T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)\right\| \left\|S\left(\frac{kt}{n}\right)\right\| \\
&\leq nM_T \left\|T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)\right\| = tM_T \left\|\frac{T(\frac{t}{n}) - S(\frac{t}{n})}{\frac{t}{n}}\right\| \\
&\leq TM_T \left\|\frac{T(\frac{t}{n}) - S(\frac{t}{n})}{\frac{t}{n}}\right\|,
\end{aligned}$$

从而

$$[\|T(t)-S(t)\| \geq r] \subset \left[TM_T \left\|\frac{T(\frac{t}{n}) - S(\frac{t}{n})}{\frac{t}{n}}\right\| \geq r\right].$$

因此, 当 $\frac{t}{n}<\delta$ 时, 有

$$P[\|T(t)-S(t)\|\geq r]\leq P\left[TM_T\left\|\frac{T(\frac{t}{n})-S(\frac{t}{n})}{\frac{t}{n}}\right\|\geq r\right]<\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 及 $r>0$ 是任意选取的, 故 $T(t)=S(t)$, $\forall\, 0\leq t\leq T$. 进一步对任意 $t\geq 0$, 有 $T(t)=S(t)$. 证毕.

定理 3.11　设 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 a.s. 有界的 u.c. 半群, 则

(a) 存在唯一的连续模同态 A, 使得 $T(t)=\exp(tA)$.

(b) 存在 $\tau\in L^0_+(\mathscr{F})$, 使得 $\|T(t)\|\leq\exp(\tau t)$.

(c) (a) 中的模同态 A 是 $\{T(t):t\geq 0\}$ 的无穷小生成元.

证明　(a) 设模同态 A 是 $\{T(t):t\geq 0\}$ 的无穷小生成元, 由定理 3.1 可知, A 是连续模同态. 再由定理 3.1 的证明可知, A 是半群 $\{\exp(tA):t\geq 0\}$ 的无穷小生成元. 因此, 根据引理 3.10, $T(t)=\exp(tA)$, 即唯一性得证.

(b) 由于 $T(t)=\exp(tA)$, 故 $\|T(t)\|=\|\exp(tA)\|\leq\exp(t\|A\|)$. 令 $\omega=\|A\|$, 则 $\omega\in L^0_+(\mathscr{F})$ 且 $\|T(t)\|\leq\exp(\omega t)$.

(c) 从 (a) 的证明可得出. 证毕.

令 $A_t=\frac{T(t)-I}{t}$ $(\forall\, t>0)$, A 表示 $\{T(t):t\geq 0\}$ 的无穷小生成元, 即对任意 $x\in D(A)$, 有

$$Ax=\lim_{t\downarrow 0}A_tx.$$

注 3.12　设 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 a.s. 有界 u.c. 半群, 则根据定理 3.11 可知, 存在唯一的连续模同态 A, 使得 $T(t)=\exp(tA)$. 而且由定理 3.1 的证明可得 $\lim_{t\downarrow 0}A_t=A$.

由注 3.12 可得出引理 3.13, 它在定理 3.14 的证明中起着重要的作用.

引理 3.13　设 $\{T(t):t\geq 0\}$是 a.s.u.有界的 u.c.半群且其无穷小生成元为 A, 则 $\bigvee_{t>0}\|A_t\|\in L^0_+(\mathscr{F})$.

证明　假定 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 a.s.u. 有界的, 即 $\bigvee_{t\geq 0}\|T(t)\|\in L^0_+(\mathscr{F})$, 令 $M=\bigvee_{t\geq 0}\|T(t)\|$, 则 $M\in L^0_+(\mathscr{F})$. 定义映射 $|||\cdot|||:S\to L^0_+(\mathscr{F})$ 为

$$|||x|||=\bigvee_{t\geq 0}\|T(t)x\|,\quad\forall\, x\in S,$$

则 $|||\cdot|||$ 定义合理且容易验证 $|||\cdot|||$ 是 S 上的 L^0- 范数. 而且对任意的 $s\geq 0$, 有

$$|||T(s)x|||=\bigvee_{t\geq 0}\|T(s)(T(t)x)\|=\bigvee_{t\geq 0}\|T(s+t)x\|\leq\bigvee_{t\geq 0}\|T(t)x\|=|||x|||,$$

即 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 $(S,|||\cdot|||)$ 上的随机压缩半群. 观察到

$$\|x\|\leq|||x|||\leq M\cdot\|x\|,\quad\forall\, x\in S,$$

故

$$\|A_tx\|\leq|||A_tx|||\leq M\cdot\|A_tx\|,\quad\forall\, t>0 \text{ 及 } x\in S,$$

即

$$\|A_t\|\leq|||A_t|||\leq M\cdot\|A_t\|,\quad\forall\, t>0.\tag{3.4}$$

因此, 对任意的 $s\geq 0$, 有

$$\begin{aligned}|||T(s)A_t||| &= \left|\left|\left|T(s)\frac{T(t)-I}{t}\right|\right|\right| = \left|\left|\left|\frac{T(s+t)-T(s)}{t}\right|\right|\right| \\ &= \left|\left|\left|\frac{T(s+\frac{t}{2})T(\frac{t}{2})-T(s+\frac{t}{2})+T(s)T(\frac{t}{2})-T(s)}{t}\right|\right|\right| \\ &\leq \left|\left|\left|\frac{T(s+\frac{t}{2})[T(\frac{t}{2})-T(0)]}{2\cdot\frac{t}{2}}\right|\right|\right| + \left|\left|\left|\frac{T(s)[T(\frac{t}{2})-T(0)]}{2\cdot\frac{t}{2}}\right|\right|\right| \\ &= \left|\left|\left|\frac{T(s+\frac{t}{2})}{2}A_{\frac{t}{2}}\right|\right|\right| + \left|\left|\left|\frac{T(s)}{2}A_{\frac{t}{2}}\right|\right|\right| \\ &\leq \frac{|||A_{\frac{t}{2}}|||+|||A_{\frac{t}{2}}|||}{2} = |||A_{\frac{t}{2}}|||,\end{aligned}$$

从而有 $|||A_t|||\leq |||A_{\frac{t}{2}}|||$, 即对任意 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$|||A_t|||\leq |||A_{\frac{t}{2^n}}|||. \tag{3.5}$$

由 (3.4) 和 (3.5) 可知, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$\|A_t\|\leq |||A_t|||\leq |||A_{\frac{t}{2^n}}|||\leq M\|A_{\frac{t}{2^n}}\|. \tag{3.6}$$

在不等式 (3.6) 中, 令 $n\to\infty$, 根据注 3.12 得出 $\|A_t\|\leq M\|A\|$, 从而

$$\bigvee_{t>0}\|A_t\|\in L^0_+(\mathscr{F}).$$

证毕.

定理 3.14 设 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 u.c. 半群且其无穷小生成元为 A. 令 $f(t)=T(t)$, $\forall t\geq 0$, 则 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 a.s. 有界的当且仅当 f 在任意有限区间 $[0,r]$ 上是 L^0-Lipschitz 的.

证明 "$\Rightarrow$" 显然.

"$\Leftarrow$" 下面将证明分为两部分.

第一步 假定 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 a.s.u. 有界的 u.c. 半群, 即 $\bigvee_{t\geq 0}\|T(t)\|\in L^0_+(\mathscr{F})$, 则根据引理 3.13 有 $\bigvee_{t>0}\|A_t\|\in L^0_+(\mathscr{F})$. 因此

$$\begin{aligned}&\bigvee\left\{\left\|\frac{T(t_1)-T(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\} \\ &\quad=\bigvee\left\{\left\|T(t_2)\right\|\cdot\left\|\frac{T(t_1-t_2)-T(0)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\} \\ &\quad\leq \bigvee_{t\geq 0}\|T(t)\|\cdot\bigvee\left\{\left\|\frac{T(t)-I}{t}\right\|\,\middle|\, t\in(0,r]\right\} \\ &\quad\leq \bigvee_{t\geq 0}\|T(t)\|\cdot\bigvee_{t>0}\|A_t\| \\ &\quad\in L^0_+(\mathscr{F}).\end{aligned}$$

第二步 设 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 a.s. 有界的 u.c. 半群, 则根据定理 3.11, $\exists\tau\in L^0_+(\mathscr{F})$, 使得 $\|T(t)\|\leq \mathrm{e}^{\tau t}$, $\forall t\geq 0$. 定义映射 $\widetilde{T}:[0,+\infty)\to B(S)$ 为

$$\widetilde{T}(t)=\mathrm{e}^{-\tau t}T(t),\quad \forall t\geq 0,$$

容易验证, $\{\widetilde{T}(t):t\geq 0\}$ 也为半群且 $D(\widetilde{A})=D(A)$, 其中 $\widetilde{A}$ 是 $\{\widetilde{T}(t):t\geq 0\}$ 的无穷小生成元. 显然

$$\|\widetilde{T}(t)\|=\|\mathrm{e}^{-\tau t}T(t)\|\leq \mathrm{e}^{-\tau t}\|T(t)\|\leq \mathrm{e}^{-\tau t}\cdot \mathrm{e}^{\tau t}=1.$$

因此, 由第一步可知

$$\bigvee\left\{\left\|\frac{\widetilde{T}(t_1)-\widetilde{T}(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\in L^0_+(\mathscr{F}).$$

对任意 $r>0$, 定义映射 $f:[0,r]\to B(s)$ 为

$$f(t)=T(t),\quad \forall\, t\in[0,r],$$

则 f 是可微的且对任意 $t\in[0,r]$ 有 $f'(t)=AT(t)=T(t)A$. 易证 f' 在 [0,r] 上是连续的且

$$\bigvee_{t\in[0,r]}\|f'(t)\|\leq \bigvee_{t\in[0,r]}\|T(t)\|\cdot\|A\|\in L^0_+(\mathscr{F}).$$

因此, 由命题 3.2 可知 f' 在 $[0,r]$ 上是 Riemann 可积的. 进一步

$$\begin{aligned}
&\bigvee\left\{\left\|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\\
&\quad=\bigvee\left\{\left\|\frac{T(t_1)-T(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\\
&\quad=\bigvee\left\{\left\|\frac{\mathrm{e}^{\tau t_1}\widetilde{T}(t_1)-\mathrm{e}^{\tau t_2}\widetilde{T}(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\\
&\quad=\bigvee\left\{\left\|\mathrm{e}^{\tau t_2}\frac{\mathrm{e}^{\tau(t_1-t_2)}\widetilde{T}(t_1)-\widetilde{T}(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\\
&\quad\leq \mathrm{e}^{\tau r}\bigvee\left\{\left\|\frac{\mathrm{e}^{\tau(t_1-t_2)}\widetilde{T}(t_1)-\widetilde{T}(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\\
&\quad= \mathrm{e}^{\tau r}\bigvee\left\{\left\|\frac{\mathrm{e}^{\tau(t_1-t_2)}\widetilde{T}(t_1)-\widetilde{T}(t_1)+\widetilde{T}(t_1)-\widetilde{T}(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\\
&\quad\leq \mathrm{e}^{\tau r}\Bigg\{\bigvee\left\{\left\|\frac{\mathrm{e}^{\tau(t_1-t_2)}\widetilde{T}(t_1)-\widetilde{T}(t_1)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\\
&\qquad+\bigvee\left\{\left\|\frac{\widetilde{T}(t_1)-\widetilde{T}(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\Bigg\}\\
&\quad= \mathrm{e}^{\tau r}\cdot\bigvee\left\{\left\|\frac{\mathrm{e}^{\tau(t_1-t_2)}\widetilde{T}(t_1)-\widetilde{T}(t_1)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\\
&\qquad+\mathrm{e}^{\tau r}\cdot\bigvee\left\{\left\|\frac{\widetilde{T}(t_1)-\widetilde{T}(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\\
&\quad\leq \mathrm{e}^{\tau r}\bigvee_{t\geq 0}\|\widetilde{T}(t)\|\cdot\bigvee_{t\geq 0}\left\{\left|\frac{\mathrm{e}^{\tau t}-1}{\tau t}\right|\cdot\tau\right\}+\mathrm{e}^{\tau r}\cdot\bigvee\left\{\left\|\frac{\widetilde{T}(t_1)-\widetilde{T}(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\, t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\\
&\quad\leq \mathrm{e}^{2\tau r}\cdot\tau\cdot\bigvee_{t\geq 0}\|\widetilde{T}(t)\|+\mathrm{e}^{\tau r}\cdot\bigvee\left\{\left\|\frac{\widetilde{T}(t_1)-\widetilde{T}(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\, t_1,\ t_2\in[0,r] \text{ 且 } t_1\neq t_2\right\}\\
&\quad\in L^0_+(\mathscr{F}),
\end{aligned}$$

这证明 f 在 $[0,r]$ 上是 L^0-Lipschitz 的. 证毕.

基于定理 3.14, 下面给出定理 3.15 的证明.

定理 3.15 设 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 a.s. 有界的 u.c. 半群且无穷小生成元是 A, 则

(a) $T(t)$ 是连续可微且 $\frac{dT(t)}{dt}=AT(t)=T(t)A$.

(b) $T(t)-T(0)=\int_0^t AT(s)ds=\int_0^t T(s)Ads$, $\forall\, t\geq 0$.

证明 (a) 固定 $t>0$, 由于 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 a.s. 有界的, 即

$$\bigvee_{s\in[0,t]}\|T(s)\|\in L^0_+(\mathscr{F}),$$

即 $\exists\xi_t\in L^0_+(\mathscr{F})$, 使得

$$\|T(s)\|\leq\xi_t,\quad \forall\, s\in[0,t].$$

显然

$$A_s=\frac{T(s)-I}{s},\quad \forall\, s>0,$$

且

$$A_sT(t)=\frac{T(s)T(t)-T(t)}{s}=\frac{T(s+t)-T(t)}{s}$$

和

$$T(t)A_s=\frac{T(t)T(s)-T(t)}{s}=\frac{T(t+s)-T(t)}{s}$$

成立, 根据注 3.12, 有 $\lim_{s\downarrow 0}As=A$. 因此

$$\lim_{s\to 0^+}A_sT(t)=\lim_{s\to 0^+}T(t)As=T(t)A,\quad \forall\, t\geq 0,$$

即

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{T(s+t)-T(t)}{s}=T(t)A=AT(t).$$

接下来, 由于

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t)-T(t-s)}{s}-T(t)A\right\|&=\left\|\frac{T(t-s)(T(s)-I)}{s}-T(t-s)A+T(t-s)A-T(t)A\right\|\\&\leq\left\|T(t-s)\left[\frac{T(s)-I}{s}-A\right]\right\|+\|T(t-s)[A-T(s)A]\|\\&\leq\xi_t\cdot\left\|\frac{T(s)-I}{s}-A\right\|+\xi_t\cdot\|T(s)A-A\|\end{aligned}$$

和 $\lim_{s\to 0^+}\|\frac{T(s)-I}{s}-A\|=0$, $\lim_{s\to 0^+}\|T(s)A-A\|=0$ 成立, 从而

$$\frac{dT(t)}{dt}=AT(t)=T(t)A.$$

(b) 由于 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 a.s. 有界的 u.c. 半群, 根据定理 3.14 有

$$\bigvee\left\{\left\|\frac{T(t_1)-T(t_2)}{t_1-t_2}\right\|\,\middle|\,t_1,t_2\in[0,r]\ \text{ 且 } t_1<t_2\right\}\in L^0_+(\mathscr{F}).$$

对任意的 $r>0$, 定义映射 $f:[0,r]\to B(s)$ 为

$$f(t)=T(t),\quad \forall\, t\in[0,r],$$

则根据定理 3.15 (a), f 是连续可微的且 $f'(t)=AT(t)=T(t)A,\ \forall\, t\in[0,r]$. 因此, 对任意 $t\geq 0$, 有

$$f(t)-f(0)=\int_0^t f'(s)ds,$$

即

$$T(t)-T(0)=\int_0^t AT(s)ds=\int_0^t T(s)Ads.$$

证毕.

注 3.16 例 3.5 和定理 3.14 表明定理 3.15 要求 u.c. 半群是 a.s. 有界的条件是必要的. 事实上, 如果定理 3.15 中 u.c. 半群不是 a.s. 有界的, 则根据定理 3.14, f 不是 L^0-Lipschitz 的. 故根据例 3.5, 微积分基本定理可能就不成立, 即定理 3.15 中 (b) 有可能不成立, 这说明了定理 3.15 中 u.c. 半群是 a.s. 有界的必要性.

如果取 $\mathscr{F}=\{\Omega,\Phi\}$, 那么完备 RN 模 S 退化为一个通常的 Banach 空间 X, a.s. 有界的 u.c. 半群 $\{T(t):t\geq 0\}$ 退化为 X 上一个通常的 u.c. 半群, 即为推论 3.17.

推论 3.17 [12] 设 $\{T(t):t\geq 0\}$ 是 Banach 空间 X 上 u.c. 半群且其无穷小生成元为 A, 则

(a) $T(t)$ 是连续可微的且

$$\frac{dT(t)}{dt}=AT(t)=T(t)A.$$

(b) $T(t)-T(0)=\int_0^t AT(s)ds=\int_0^t T(s)Ads,\ \forall\, t\geq 0$.

致谢 感谢审稿人所提出的宝贵意见和建议, 感谢郭铁信教授一直以来的鼓励与支持.

参 考 文 献

[1] Dunford N., Schwartz J. T., Linear Operators (I), Interscience, New York, 1957.

[2] Guo T. X., The Theory of Probabilistic Metric Spaces and Its Applications to Random Functional Analysis (in China), Master's thesis, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 1989.

[3] Guo T. X., Random Metric Theory and Its Applications (in China), Ph. D. thesis, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 1992.

[4] Guo T. X., A new approach to random functional analysis, In: Proceedings of the first China postdoctral academic conference, The China National Defense and Industry Press, 1993, Beijing, pp. 1150–1154.

[5] Guo T. X., Relations between some basic results derived from two kinds of topologies for a random locally convex module, *J. Funct. Anal.*, 2010, **258**: 3024–3047.

[6] Guo T. X., Recent progress in random metric theory and its applications to conditional risk measures, *Sci. China Ser. A*, 2010, **54**(4): 633–660.

[7] Guo T. X., On some basic theorems of continuous module homomorphisms between random normed modules, *J. Funct. Space. Appl.*, 2013, Article ID 989102, 13 pp.

[8] Guo T. X., Zhao S. E., Zeng X. L., The relations among the three kinds of conditional risk measures, *Sci. China Math.*, 2014, **57**(8): 1753–1764.

[9] Guo T. X., Zhang E. X., Wang Y. C., et al., Two fixed point theorems in complete random normed modules and their applications to backward stochastic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2020, **483**(2): 123644, 30 pp.

[10] Guo T. X., Zhang E. X., Wu M. Z., et al., On random convex analysis, *J. Nonlinear and Convex Anal.*, 2017, **18**(11): 1967–1996.

[11] Guo T. X., Zhang X., Stone's representation theorem of a group of strongly continuous unitary operators on complex complete random inner product modules, *Sci. Sin. Math.*, 2012, **42**: 181–202.

[12] Pazy A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, World Publishing Company, Beijing, 2006.

[13] Schweizer B., Sklar A., Probabilistic Metric Spaces, Elsevier, New York, 1983; Dover Publications, New York, 2005.

[14] Tang Y. H., Random spectral theorems of self-adjoint random linear operators on complete complex random inner product modules, *Linear and Multilinear Algebra*, 2013, **61**(3): 409–416.

[15] Tang Y. H., The Wintner theorem in unital complete random normed algebras, *Bull. Korean Math. Soc.*, 2013, **50**(6): 1973–1979.

[16] Thang D. H., Son T. C., Thinh Ng., Semigroups of continuous module homomorphisms on complex complete random normed modules, *Lith. Math. J.*, 2019, **59**(2): 229–250.

[17] Wu M. Z., The Bishops–Phelps theorem in complete random normed modules endowed with the (ε, λ)-topology, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, **391**: 648–652.

[18] Wu M. Z., Farkas' lemma in random locally convex modules and Minkowski–Weyl type results in $L^0(\mathscr{F}, R^n)$, *J. Math. Anal Appl.*, 2013, **404**: 300–309.

[19] Wu M. Z., Guo T. X., A counterexample shows that not every locally L^0-convex topology is necessarily induced by a family of L^0-seminorms, 2015, arXiv:1501.04400v1.

[20] Zhang X., On mean ergodic semigroups of random linear operators, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, 2012, **88**: 53–58.

[21] Zhang X., Liu M., A characterization for a complete random normed module to be mean ergodic, *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 2017, **33**(7): 899–910.

[22] Zhang X., Liu M., On almost surely bounded semigroups of random linear operators, *J. Math. Phy.*, 2013, **54**(5): 053517, 10 pp.

[23] Zhang X., Liu M., Guo T. X., The Hille-Yosida generation theorem for almost surely bounded C0-semigroups of continuous module homomorphisms, J. Nonlinear and Convex Anal., 2020, **18**(11): 1995–2009.

[24] Zhao S. E., Guo T. X., The random subreflexivity of complete random normed modules, *Internat. J. Math.*, 2012, **23**(3): 14 pp.

[25] Zhao S. E., Shi G., A geometric form of the Hahn–Banach extension theorem for L_0-linear functions and the Goldstine–Weston theorem in random normed modules, *Sci. Sin. Math.*, 2011, **41**(9): 827–836.