

DOI: 10.12386/A20210064

文献标识码: A

# 具有 Robin 边界条件的 Schrödinger 算子传输特征值密度

马利杰 徐小川

南京信息工程大学数学与统计学院 南京 210044  
E-mail: lijie@nuist.edu.cn; xcxu@nuist.edu.cn

**摘 要** 本文研究具有 Robin 边界条件的传输特征值问题, 运用指数型整函数的相关性刻画特征值密度与势函数支撑区间长度的关系. 同时, 证明传输特征值问题等价于一类边界条件带有谱参数的 Sturm–Liouville 问题.

**关键词** 传输特征值; 零点密度; 指数型整函数; 指示函数; Sturm–Liouville 问题  
**MR(2010) 主题分类** 34B09, 34L20, 34L40  
**中图分类** O175.7

## On the Density of Transmission Eigenvalue for the Schrödinger Operator with the Robin Boundary Condition

Li Jie MA Xiao Chuan XU

*School of Mathematics and Statistics,  
Nanjing University of Information Science and Technology,  
Nanjing 210044, P. R. China  
E-mail: lijie@nuist.edu.cn; xcxu@nuist.edu.cn*

**Abstract** In this paper, we study the transmission eigenvalue problem with the Robin boundary condition. Applying the related properties of entire function of exponential type, we show the relationship between the density of eigenvalues and the length of the support interval of the potential function. Meanwhile, we prove that the transmission eigenvalue problem is equivalent to a kind of Sturm–Liouville problem with spectral parameter in the boundary condition.

**Keywords** transmission eigenvalue; density of zeros; entire function of exponential type; indicator function; Sturm–Liouville problem

**MR(2010) Subject Classification** 34B09, 34L20, 34L40

**Chinese Library Classification** O175.3

---

收稿日期: 2021-04-18; 接受日期: 2021-07-14  
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11901304)  
通讯作者: 徐小川

## 1 引言

本文研究如下传输特征值问题  $H(q, h)$ :

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = k^2\varphi, \quad 0 < x < 1, \quad (1.1)$$

$$-\varphi_0'' = k^2\varphi_0, \quad 0 < x < 1, \quad (1.2)$$

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$\varphi_0'(0) - h\varphi_0(0) = 0, \quad (1.4)$$

$$\varphi(1) = \varphi_0(1), \quad \varphi'(1) = \varphi_0'(1), \quad (1.5)$$

其中势函数  $q(x)$  是实值函数,  $q \in L^2(0, 1)$  且  $h \in \mathbb{R}$ . 若问题  $H(q, h)$  能找到一对非平凡的解  $\{\varphi, \varphi_0\}$ , 则满足上式方程的  $k^2$  被称为传输特征值, 从物理上解释就是在“扰动”系统和“非扰动”系统的散射中相一致的能量<sup>[3]</sup>. 由文献[3]知传输特征值等价于函数  $D(k)$  (由(2.5)式定义)零点的平方, 称  $D(k)$  为边值问题  $H(q, h)$  的示性函数.

近年来, 传输特征值问题的正谱和逆谱问题引起了人们的广泛关注<sup>[1, 3, 5, 7, 8, 10, 12–19]</sup>. 研究最多的是具有 Dirichlet 边界条件的传输特征值问题<sup>[1, 5, 7, 8, 10, 12–14, 17, 19]</sup>, 其中文献[1, 10]将传输特征值问题转化为右边界条件带有谱参数的 Sturm–Liouville 问题. 在此基础上, 更多的学者运用 Sturm–Liouville 理论来研究了这一问题<sup>[5–7, 13, 14, 19]</sup>. Yang 和 Buterin<sup>[19]</sup> 以及 Wang 和 Shieh<sup>[12]</sup> 分别运用 Gesztesy–Simon 方法和 Horváth 方法研究了基于混合数据的逆谱问题. Buterin 及其合作者<sup>[5, 6]</sup> 运用 Sturm–Liouville 理论中的 Borg 定理给出了传输特征值问题的逆谱局部可解性和稳定性研究. 2016 年, Colton 和 Leung<sup>[8]</sup> 刻画了传输特征值的密度, 给出了特定密度的充分条件, 然而却没有研究其必要性.

注意到, 在  $x = 0$  处为 Robin 边界条件 (1.3) 时, 相关研究工作相对较少. 这类边界条件与确定人体声道内部结构的逆散射问题有关<sup>[2]</sup>. 最早开始研究传输特征值问题  $H(q, h)$  的学者是 Aktosun 和 Papanicolaou<sup>[3]</sup>, 他们研究了逆谱问题, 证明了所有特征值、边界条件中的参数  $h$  和额外的常数  $\gamma$  可以唯一地确定势函数. 因为常数  $\gamma$  没有物理意义, 所以他们提出了一个公开问题: 逆谱唯一性定理中, 常数  $\gamma$  是否必要? 2019 年, Xu 和 Yang<sup>[18]</sup> 解决了这一公开问题, 证明了若常数  $\gamma$  缺失, 则存在无穷多个势函数对应相同的特征值集. 后来, Xu<sup>[16]</sup> 证明了在唯一性定理中, 常数  $\gamma$  可以由势函数  $q(x)$  在  $x = 1$  的邻域内信息代替.

最近, 文献[15]进一步给出了势函数在更大的子区间  $[b, 1]$  ( $0 < b < 1$ ) 上已知时的逆谱问题, 并给出了唯一性定理. 特别地, 在其定理 3.1 的讨论中需要用到示性函数零点密度为  $\frac{4}{\pi}$  的条件, 文献[15]给出了满足这一条件的势函数要求

$$q \in W_2^{m+1}(\delta, 1], \quad q^{(j)}(1) = 0, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad q^{(m)}(1) \neq 0, \quad \delta \in (0, 1), \quad m \geq 0.$$

该条件对势函数的要求太高. 本文的主要工作之一就是将该条件削弱为:  $q(x)$  在  $x = 1$  的任意左邻域内几乎处处不为 0. 同时我们证明这一条件的必要性, 即证明: 若示性函数的零点密度为  $\frac{4}{\pi}$ , 则势函数  $q(x)$  在  $x = 1$  的任意左邻域内几乎处处不为 0, 这完善了 Colton 和 Leung<sup>[8]</sup> 的结果. 本文另一个主要结果是, 运用文献[1]的方法, 将传输特征值问题  $H(q, h)$  转化为右边界条件带有超越谱参数的 Sturm–Liouville 问题, 这将为更多研究 Sturm–Liouville 问题的学者提供研究这一问题的可能性.

## 2 预备知识

本节做一些准备工作, 主要介绍方程 (1.2) 初值解的相关结论以及指数型整函数的有关性质. 设  $y_0(k, x)$  是 (1.2) 式带有以下初值条件的解:

$$y_0(k, 0) = 1, \quad y'_0(k, 0) = h,$$

则

$$y_0(k, x) = \cos(kx) + h \frac{\sin(kx)}{k}. \quad (2.1)$$

设  $C(k, x)$ ,  $S(k, x)$  和  $y(k, x)$  满足 (1.1) 式及初始条件

$$C(k, 0) = 1 = S'(k, 0) = y(k, 0), \quad C'(k, 0) = 0 = S(k, 0), \quad y'(k, 0) = h,$$

则

$$y(k, x) = C(k, x) + hS(k, x),$$

且  $y(k, x)$  具有如下的积分表示<sup>[11]</sup>:

$$y(k, x) = \cos(kx) + \int_0^x K(x, t) \cos(kt) dt, \quad (2.2)$$

其中  $K(x, t)$  满足

$$K_{tt} - K_{xx} + q(x)K = 0, \quad 0 \leq |t| \leq x \leq 1, \quad (2.3)$$

$$K(x, \pm x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.4)$$

定义传输特征值问题  $H(q, h)$  的示性函数

$$D(k) := y'(k, 1)y_0(k, 1) - y(k, 1)y'_0(k, 1). \quad (2.5)$$

显然, 从 (2.5) 式中我们可以看出

$$D(-k) = -D(k), \quad \overline{D(k)} = D(-\bar{k}).$$

因此  $D(k)$  的零点分布是关于实轴和虚轴对称的.

**定义 2.1** <sup>[4]</sup> (1) 若整函数  $f(k)$  满足

$$|f(k)| \leq c_1 e^{c_2 |k|}, \quad \forall k \in \mathbb{C},$$

其中  $c_1, c_2 > 0$  为常数, 则称  $f(k)$  为指数型整函数.

(2) 指数型整函数  $f(k)$  的型为

$$\tau = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(M(f, r))}{r},$$

其中  $M(f, r)$  是  $f(k)$  在  $|k| = r$  上的最大模

$$M(f, r) = \max\{|f(k)| : |k| = r\}.$$

(3) 指数型整函数  $f(k)$  的指示函数为

$$h_f(\theta) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r}.$$

由文献 [4, 定理 6.9.1 及推论 6.9.4], 有如下结论.

**命题 2.2** 设  $\zeta(t)$  是  $[-a, a]$  上的可积函数. 若  $\zeta(t)$  在  $a$  和  $-a$  处的任意邻域内都几乎处处不为 0, 则 Fourier 变换

$$g_0(k) = \int_{-a}^a e^{ikt} \zeta(t) dt$$

是型为  $a$  的指数型整函数, 且  $h_{g_0}(\theta) = a|\sin \theta|$ .

由该命题, 我们来证明下面的引理.

**引理 2.3** 设  $\zeta_i(t)$  是  $[0, a_i]$  ( $i = 1, 2$ ) 上的可积函数. 记

$$g(k) := \int_0^{a_1} \zeta_1(t) y_0(k, t) dt + \int_0^{a_2} \zeta_2(t) y_0(k, t) dt + C, \quad (2.6)$$

其中  $y_0(k, t)$  由 (2.1) 式定义,  $C$  为常数. 若  $a_1 > a_2$  且  $\zeta_1(t)$  在  $a_1$  的任意左邻域内都几乎处处不为 0, 则函数  $g(k)$  是型为  $a_1$  的指数型整函数, 且  $h_g(\theta) = a_1|\sin \theta|$ .

**证明** 由 (2.1) 式, 记

$$g_i(k) := \int_0^{a_i} \zeta_i(t) y_0(k, t) dt = \int_0^{a_i} \zeta_i(t) \cos(kt) dt + h \int_0^{a_i} \zeta_i(t) \frac{\sin(kt)}{k} dt, \quad i = 1, 2. \quad (2.7)$$

记

$$F_i(t) = \int_t^{a_i} \zeta_i(s) ds, \quad i = 1, 2.$$

分部积分得

$$\int_0^{a_i} \zeta_i(t) \frac{\sin(kt)}{k} dt = \int_0^{a_i} F_i(t) \cos(kt) dt, \quad i = 1, 2,$$

因此

$$g_i(k) = \int_0^{a_1} [\zeta_i(t) + hF_i(t)] \cos(kt) dt, \quad i = 1, 2. \quad (2.8)$$

首先说明, 若  $\zeta_1(t)$  在  $t = a_1$  任意左邻域内几乎处处不为 0, 则  $\zeta_1(t) + hF_1(t)$  在  $t = a_1$  的相同左邻域内也几乎处处不为 0. 事实上, 若存在区间  $(\delta, a_1)$ , 使得

$$\zeta_1(t) + h \int_t^{a_1} \zeta_1(s) ds = 0, \quad \forall t \in (\delta, a_1),$$

则由齐次 Volterra 积分方程只有零解知  $\zeta_1(t)$  在区间  $(\delta, a_1)$  上也几乎处处为 0, 这与题设条件矛盾. 由命题 2.1 得  $g_1(k)$  的型为  $a_1$  的指数型整函数, 且  $h_{g_1}(\theta) = a_1|\sin \theta|$ .

由 (2.6), (2.7) 和 (2.8) 得

$$g(k) = g_3(k) + C, \quad g_3(k) := \int_0^{a_1} \xi(t) \cos(kt) dt,$$

其中

$$\xi(t) = \begin{cases} \zeta_1(t) + \zeta_2(t) + h[F_1(t) + F_2(t)], & t \in [0, a_2], \\ \zeta_1(t) + hF_1(t), & t \in (a_2, a_1]. \end{cases}$$

由此知  $\xi(t)$  在  $t = a_1$  的任意充分小邻域内几乎处处不为零. 因此,  $g_3(k)$  是型为  $a_1$  的指数型整函数, 且  $h_{g_3}(\theta) = a_1|\sin \theta|$ . 因为

$$\frac{|g_3(re^{i\theta})| - |C|}{r} \leq \frac{|g_3(re^{i\theta}) + C|}{r} \leq \frac{|g_3(re^{i\theta})| + |C|}{r},$$

令  $r \rightarrow \infty$  得, 指数型整函数  $g(k)$  为型为  $a_1$ , 且  $h_g(\theta) = h_{g_3}(\theta) = a_1|\sin \theta|$ . 证毕.

**定义 2.4** 设  $n_f(r)$  是指数型整函数  $f(k)$  在圆盘  $|k| \leq r$  ( $r > 0$ ) 中的零点个数, 则称极限值  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r}$  为整函数  $f(k)$  的零点密度.

下面的 Cartwright–Levison 定理<sup>[9]</sup> 是计算指数型整函数零点密度的一个有力工具.

**定理 2.5** 若指数型整函数  $f(z)$  满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty, \quad (2.9)$$

其中  $\ln^+ |f(x)| = \max\{0, \ln |f(x)|\}$ , 则  $f(z)$  的零点密度是  $\frac{d}{\pi}$ , 其中

$$d = h_f\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

### 3 主要定理及其证明

本节将刻画示性函数零点密度的充要条件, 揭示特征值密度与势函数支撑区间长度之间的关系, 并且将传输特征值问题  $H(q, h)$  转化为右边界条件中带有谱参数的 Sturm–Liouville 问题.

**定理 3.1** 边值问题  $H(q, h)$  示性函数的零点密度为  $\frac{4}{\pi}$  的充要条件为  $q(x)$  在  $x = 1$  的任意左邻域内几乎处处不为 0.

**证明** 充分性: 由 (2.2) 式知

$$y(k, 1) = \cos k + K(1, 1) \frac{\sin k}{k} - \frac{1}{k} \int_0^1 K_t(1, t) \sin(kt) dt, \quad (3.1)$$

$$y'(k, 1) = -k \sin k + K(1, 1) \cos k + \int_0^1 K_x(1, t) \cos(kt) dt. \quad (3.2)$$

将 (2.1), (3.1) 和 (3.2) 式代入 (2.5) 式中, 有

$$\begin{aligned} D(k) &= y'(k, 1)y_0(k, 1) - y(k, 1)y'_0(k, 1) \\ &= -h + K(1, 1) \cos^2 k + \frac{h \sin k \cos k}{k} K(1, 1) + \int_0^1 K_x(1, t) \cos k \cos(kt) dt \\ &\quad + \frac{h}{k} \int_0^1 K_x(1, t) \sin k \cos(kt) dt + \sin^2 k K(1, 1) - \int_0^1 K_t(1, t) \sin k \sin(kt) dt \\ &\quad - \frac{h \sin k \cos k}{k} K(1, 1) + \frac{h}{k} \int_0^1 K_t(1, t) \cos k \sin(kt) dt. \end{aligned}$$

由积化和差公式及 (2.2) 式, 可得

$$\begin{aligned} D(k) &= -h + K(1, 1) + \frac{1}{2} \int_0^1 (K_x(1, t) + K_t(1, t)) y_0(k, 1+t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 (K_x(1, t) - K_t(1, t)) y_0(k, 1-t) dt. \end{aligned}$$

记

$$F(t) := K_x(1, t) + K_t(1, t), \quad T(k) := \int_0^1 F(t) \varphi_0(k, 1+t) dt.$$

由引理 2.3 和定理 2.5 知, 只要证明  $F(t)$  在 1 的任意充分小的邻域内几乎处处不为 0, 即可得示性函数  $D(k)$  的零点密度为  $\frac{4}{\pi}$ .

由 d'Alembert 公式可知方程 (2.3) 的解满足<sup>[11]</sup>

$$K(x, x) = \frac{1}{2}[K(1, 2x-1) + K(1, 1)] + \frac{1}{2} \int_1^{2x-1} K_x(1, s) ds - \frac{1}{2} \int_x^1 \int_y^{2x-y} q(y) K(y, s) ds dy. \quad (3.3)$$

对 (3.3) 式两边关于  $x$  求导, 结合 (2.4) 式有

$$\frac{1}{2}q(x) = K_t(1, 2x-1) + K_x(1, 2x-1) - \int_x^1 q(y) K(y, 2x-y) dy,$$

即

$$q(x) = 2F(2x-1) - 2 \int_x^1 q(y) K(y, 2x-y) dy. \quad (3.4)$$

如果  $F(t)$  在  $t=1$  的某个左邻域  $(\delta, 1)$  上几乎处处为 0, 则  $F(2x-1)$  将在  $x=1$  的左邻域  $(2\delta-1, 1)$  上几乎处处为 0, 那么这就说明了 (3.4) 式在区间  $(2\delta-1, 1)$  上是齐次的 Volterra 型积分方程. 又因为齐次的 Volterra 积分方程只有零解, 所以在区间  $(2\delta-1, 1)$  上有  $q(x) \equiv 0$ , 这与题设中  $q(x)$  在 1 的任意左邻域内几乎处处不为 0 矛盾, 故  $F(t)$  在  $t=1$  的充分小邻域内几乎处处不为 0. 充分性得证.

必要性. 用反证法. 假设  $q(x)$  在区间  $(b, 1)$  ( $0 < b < 1$ ) 上几乎处处等于 0, 记

$$C_b(k, x) = \cos(k(x-b)), \quad S_b(k, x) = \frac{\sin(k(x-b))}{k},$$

容易可以看出  $C_b(k, x)$  和  $S_b(k, x)$  是方程 (1.1) 为势函数等于零时的基本解, 所以

$$y(k, x) = y'(k, b)S_b(k, x) + y(k, b)C_b(k, x), \quad x \in [b, 1].$$

由 (2.5) 式可知

$$\begin{aligned} D(k) &= \begin{vmatrix} y'(k, b)S'_b(k, 1) + y(k, b)C'_b(k, 1) & -k \sin k + h \cos k \\ y'(k, b)S_b(k, 1) + y(k, b)C_b(k, 1) & \cos k + h \frac{\sin k}{k} \end{vmatrix} \\ &= y'(k, b) \begin{vmatrix} \cos(k(1-b)) & -k \sin k + h \cos k \\ \frac{\sin(k(1-b))}{k} & \cos k + h \frac{\sin k}{k} \end{vmatrix} \\ &\quad + y(k, b) \begin{vmatrix} -k \sin(k(1-b)) & -k \sin k + h \cos k \\ \cos(k(1-b)) & \cos k + h \frac{\sin k}{k} \end{vmatrix} \\ &= y'(k, b)y_0(k, b) - y(k, b)y'_0(k, b). \end{aligned}$$

由 (2.1) 和 (2.2) 式进而可求得

$$|D(k)| \leq ce^{2|\operatorname{Im} k|b}, \quad c > 0, \quad \forall k \in \mathbb{C},$$

所以示性函数  $D(k)$  的指示函数满足

$$\left| h_D \left( \pm \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq 2b < 2,$$

因此,  $D(k)$  的零点密度  $\leq \frac{4b}{\pi} < \frac{4}{\pi}$ , 这与题设条件  $D(k)$  的零点密度为  $\frac{4}{\pi}$  矛盾. 证毕.

**推论 3.2** 若势函数  $q(x)$  在区间  $[b, 1]$  上几乎处处为零, 且在  $x = b$  的任意左邻域内几乎处处不为零, 则示性函数  $D(k)$  的零点密度为  $\frac{4b}{\pi}$ .

**定理 3.3**  $H(q, h)$  的传输特征值与如下边值问题的特征值是等价的:

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = k^2\varphi, \quad 0 < x < 1, \quad (3.5)$$

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0, \quad (3.6)$$

$$\varphi'(1) \left( \cos k + h \frac{\sin k}{k} \right) + \varphi(1) (k \sin k - h \cos k) = 0. \quad (3.7)$$

**证明** 先证边值问题  $H(q, h)$  的特征值也是 (3.5)–(3.7) 的特征值. 首先证明满足方程 (1.2) 和 (1.4) 的非零解一定是  $y_0(k, x)$  的常数倍. 事实上, 满足方程 (1.2) 的通解有如下形式

$$\varphi_0(k, x) = a_1 \cos(kx) + a_2 \sin(kx), \quad (3.8)$$

其中  $a_1, a_2$  为常数. 由 (1.4) 式知  $(\varphi'_0 - h\varphi_0)|_{x=0} = 0$ , 结合 (3.8) 式得

$$ka_2 - ha_1 = 0,$$

解得  $a_2 = \frac{h}{k}a_1$ , 故

$$\varphi_0(k, x) = a_1 \left( \cos(kx) + h \frac{\sin(kx)}{k} \right) = a_1 y_0(k, x).$$

同理, 可以证明满足方程 (1.1) 和 (1.3) 的非零解一定是  $y(k, x)$  的常数倍. 事实上, 因为  $C(k, x)$  和  $S(k, x)$  为方程 (1.1) 的线性无关解, 所以方程 (1.1) 的通解可表示为

$$\varphi(k, x) = b_1 C(k, x) + b_2 S(k, x), \quad (3.9)$$

其中  $b_1, b_2$  为常数. 由 (1.3) 式知  $(\varphi' - h\varphi)|_{x=0} = 0$ . 结合 (3.9) 式可得

$$b_1 C'(k, 0) + b_2 S'(k, 0) - hb_1 C(k, 0) - hb_2 S(k, 0) = 0,$$

解之得  $b_2 = hb_1$ , 故

$$\varphi(k, x) = b_1 (C(k, x) + hS(k, x)) = b_1 y(k, x).$$

综上所述有

$$\varphi_0 = a_1 y_0, \quad \varphi = b_1 y.$$

再结合 (1.5) 式可得下面的方程组

$$\begin{cases} b_1 y(1) - a_1 y_0(1) = 0, \\ b_1 y'(1) - a_1 y'_0(1) = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

因为边值问题  $H(q, h)$  的特征值  $k^2$  所对应的特征函数为非零解, 所以  $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ . 因此方程组 (3.10) 有非零解, 故  $D(k) = 0$ , 即

$$y(k, 1)(k \sin k - h \cos k) + y'(k, 1) \left( \cos k + h \frac{\sin k}{k} \right) = 0.$$

然后, 由  $\varphi = b_1 y$  可以得到满足边值问题  $H(q, h)$  的非零解也满足 (3.5)–(3.7) 式.

再证 (3.5)–(3.7) 的特征值也是边值问题  $H(q, h)$  的特征值. 由方程 (3.5)、(3.6) 与方程 (1.1)、(1.3) 相一致可得  $\varphi = b_1 y$  ( $b_1 \neq 0$ ), 由 (3.7) 式可得向量  $[\varphi(1), \varphi'(1)]$  与向量  $[y_0(1), y'_0(1)]$  成比例, 所以存在  $c_1 \neq 0$ , 使得  $\varphi(1) = c_1 y_0(1)$ ,  $\varphi'(1) = c_1 y'_0(1)$ . 令  $\varphi_0 = c_1 y_0$ , 则有  $\varphi(1) = \varphi_0(1)$ ,  $\varphi'(1) = \varphi'_0(1)$ . 证毕.

## 参 考 文 献

- [1] Aktosun T., Gintides D., Papanicolaou V. G., The uniqueness in the inverse problem for transmission eigenvalues for the spherically symmetric variable speed wave equation, *Inverse Problems*, 2011, **27**(11): 115004, 17 pp.
- [2] Aktosun T., Machuca A., Sacks P., Determining the shape of a human vocal tract from pressure measurements at the lips, *Inverse Problems*, 2017, **33**(11): 115002, 33 pp.
- [3] Aktosun T., Papanicolaou V. G., Transmission eigenvalues for the self-adjoint Schrödinger operator on the half line, *Inverse Problems*, 2014, **30**(7): 075001, 23 pp.
- [4] Boas R. P., Entire Functions, Academic Press Inc. Publisher, New York, 1954.
- [5] Bondarenko N., Buterin S., On a local solvability and stability of the inverse transmission eigenvalue problem, *Inverse Problems*, 2017, **33**(11): 115010, 19 pp.
- [6] Buterin S. A., Choque-Rivero A. E., Kuznetsova M. A., On a regularization approach to the inverse transmission eigenvalue problem, *Inverse Problems*, 2020, **36**(10): 105002, 20 pp.
- [7] Buterin S. A., Yang C. F., On an inverse transmission problem from complex eigenvalues, *Results Math.*, 2017, **71**(3): 859–866.
- [8] Colton D., Leung Y. J., The existence of complex transmission eigenvalues for spherically stratified media, *Applicable Analysis*, 2016, **96**(1): 39–47.
- [9] Levin B. Ya., Lectures on Entire Functions, Transl. Math. Monographs, Vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [10] McLaughlin J. R., Polyakov P. L., On the uniqueness of a spherically symmetric speed of sound from transmission eigenvalues, *J. Differential Equations*, 1994, **107**(2): 351–382.
- [11] Rundell W., Sacks P., Reconstruction techniques for classical inverse Sturm–Liouville problems, *Math. Comput.*, 1992, **58**(197): 161–183.
- [12] Wang Y. P., Shieh C. T., The inverse interior transmission eigenvalue problem with mixed spectral data, *Appl. Math. Comput.*, 2019, **343**(15): 285–298.
- [13] Wei G., Xu H. K., Inverse spectral analysis for the transmission eigenvalue problem, *Inverse Problems*, 2013, **29**(11): 115012, 24 pp.
- [14] Wei Z. Y., Wei G. S., Unique reconstruction of the potential for the interior transmission eigenvalue problem for spherically stratified media, *Inverse Problems*, 2020, **36**(3): 035017, 20 pp.
- [15] Xu Q. Q., Xu X. C., On the partial inverse problems for the transmission eigenvalue problem of the Schrödinger operator, *Results Math.*, 2021, **71**(2): 79, 12 pp.
- [16] Xu X. C., On the direct and inverse transmission eigenvalue problems for the Schrödinger operator on the half line, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2020, **43**(15): 8434–8448.
- [17] Xu X. C., Yang C. F., On the inverse spectral stability for the transmission eigenvalue problem with finite data, *Inverse Problems*, 2020, **36**(8): 085006, 17 pp.
- [18] Xu X. C., Yang C. F., On a non-uniqueness theorem of the inverse transmission eigenvalues problem for the Schrödinger operator on the half line, *Results Math.*, 2019, **74**(3): 103, 7 pp.
- [19] Yang C. F., Buterin S. A., Uniqueness of the interior transmission problem with partial information on the potential and eigenvalues, *J. Differential Equations*, 2016, **260**(6): 4871–4887.