第64卷第5期 数学学报中文版 Vol.64, No.5
2021年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)05-0747-14 **文献标识码: A**

变量各向异性的 非齐次拟微分象征类

杨娅娟 余安康 李宝德

新疆大学数学与系统科学学院 乌鲁木齐 830046
E-mail: 1909322378@qq.com; 1107102484@qq.com;
baodeli@xju.edu.cn

摘 要 设 $\widetilde{\Theta}_0$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续多尺度椭球覆盖 Θ 的中心正则子覆盖. 本文引入了一类适应于椭球子覆盖 $\widetilde{\Theta}_0$ 的非齐次拟微分象征类 $S^0_{\delta,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$, $0 \leq \delta < 1$. 此象征类推广了经典的各向齐性非齐次象征类 $S^0_{\delta,\delta}(I_n)$, 其中 I_n 是 $n \times n$ 的单位矩阵. 然后本文将一个经典的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界性结果推广到了此象征类 $S^0_{\delta,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$ 的情形下.

关键词 拟微分算子; 各向异性; 有界性; 椭球
MR(2010) 主题分类 42B35, 47G30, 52A20
中图分类 O174.2

Variable Anisotropic Class of Inhomogeneous Pseudo-differential Symbols

Ya Juan YANG An Kang YU Bao De LI

College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830046*, P. R. China*
E-mail: 1909322378*@qq.com*; 1107102484*@qq.com*;
baodeli@xju.edu.cn

Abstract Let $\widetilde{\Theta}_0$ be a central regular ellipsoid subcover of a continuous multi-level ellipsoid cover Θ of $\mathbb{R}^n$. We introduce a class of inhomogeneous pseudo-differential symbols $S^0_{\delta,\,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$ adapted to $\widetilde{\Theta}_0$, which generalizes the classical isotropic inhomogeneous class $S^0_{\delta,\,\delta}(I_n)$, where $0 \leq \delta < 1$ and I_n is an identity $n \times n$ matrix. We extend a well-known $L^2(\mathbb{R}^n)$-boundedness result to the variable anisotropic inhomogeneous class $S^0_{\delta,\,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$.

Keywords pseudo-differential operator; anisotropy; boundedness; ellipsoid
MR(2010) Subject Classification 42B35, 47G30, 52A20
Chinese Library Classification O174.2

收稿日期: 2020-06-28; 接受日期: 2020-08-17
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11861062);
新疆创新环境 (人才、基地) 建设专项 — 自然科学计划 (自然科学基金) 联合基金 (2020D01C048)
通讯作者: 李宝德

1 引言

拟微分算子的研究动机来源于偏微分方程的解的正则性及近似逆的适定性问题 [15]. 为了系统地研究这些算子, 人们引入了经典的非齐次各向同性象征类 $S^m_{\gamma,\,\delta}(I_n)$ (见文 [5, 6, 11, 14–16]). 在 $\mathbb{R}^n$ 中各向同性的情形下, 拟微分算子在 Schwartz 函数空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的预定义如下:

$$T_\sigma f(x) := \sigma(x,\,D)f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\,\xi)\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}d\xi,$$

其中称象征 $\sigma \in S^0_{\delta,\,\delta}(2I_n)$, $0 \le \delta < 1$, 如果对任意的多重指标 α, β 和 $(x,\,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 满足

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\,\xi)| \le C_{\alpha,\,\beta}(1+|\xi|)^{\delta(|\beta|-|\alpha|)}. \tag{1.1}$$

众所周知, T_σ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的 (见文 [15, 第七章, 定理 2]).

2013 年, Bényi 和 Bownik [2] 进一步引入了各向异性拟微分算子 T_σ 与非齐次各向异性象征类 $S^0_{\delta,\,\delta}(A)$, 其中 $0 \le \delta < 1$, A 是一个 $n \times n$ 的实矩阵且其所有特征值 λ 均满足 $|\lambda| > 1$. 在这种情况下, 称 $\sigma \in S^0_{\delta,\,\delta}(A)$, 如果对任意的多重指标 α, β 和 $(x,\,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 满足

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\sigma(A^{-k'}\cdot,\,(A^*)^{k'}\cdot)](A^{k'}x,\,(A^*)^{-k'}\xi)| \le C_{\alpha,\,\beta}, \tag{1.2}$$

其中 A^* 是 A 的转置, $k' = \lfloor k\delta \rfloor$, 这里 $k \in \mathbb{N}_0$ 且满足 $1 + \rho_{A^*}(\xi) \sim |\det A|^k$, $\rho_{A^*}(\xi)$ 是 A^* 的拟范数 (见文 [2, 第 157 页]), $\lfloor k\delta \rfloor$ 是不超过 $k\delta$ 的最大整数. Bényi 和 Bownik (见文 [2, 定理 1.1]) 也得到了 T_σ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性.

2010 年, Dekel 等人 [7] 进一步推广了 Bownik 的上述结果, 引入了一类关于 $\mathbb{R}^n$ 的连续椭球覆盖 Θ. 这种关于 Θ 的各向异性会从点到点以及从水平到水平发生迅速变化. 此外, 连续椭球覆盖 Θ 是一种更一般的框架, 其中包括了经典的各向同性框架, Calderón 和 Torchinsky [4] 的非各向同性框架以及 Bownik [3] 的各向异性框架. 因此, 有许多关于 Θ 的研究文献, 例如文 [1, 7–10].

受 Dekel [7] 和 Bownik [2] 的启发, 本文得到一类适应于连续椭球覆盖 Θ 的非齐次拟微分象征. 实际上, 这可以通过 Θ 的一个中心正则椭球覆盖来完成. 准确地说, 设 $\widetilde{\Theta}_0$ 是由一类中心在原点, 尺度为 t 的 $\theta(0,t)$ 组成的正则椭球子覆盖, 具体形式为 $\theta(0,\,t) := M_{0,\,t}(\mathbb{B}^n)$, 其中 $M_{0,\,t}$ 是可逆矩阵, $\mathbb{B}^n$ 是单位球. 称象征 σ 属于变量各向异性非齐次象征类 $S^0_{\delta,\,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$, 如果对任意的多重指标 α, β 和 $(x,\,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, σ 满足一个类似于 (1.1) 和 (1.2) 的假设:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\sigma(M_{0,\,k'\gamma}\cdot,\,(M^*_{0,\,k'\gamma})^{-1}\cdot)](M^{-1}_{0,\,k'\gamma}x,\,M^*_{0,\,k'\gamma}\xi)| \le C_{\alpha,\,\beta},$$

其中 $k' = \lfloor k\delta \rfloor$, 这里 $k \in \mathbb{N}_0$ 且满足

$$1 + \rho^*(0,\,\xi) \sim 2^{k\gamma} = |\det M_{0,\,-k\gamma}|,$$

参数 $\gamma > 0$ 的选取见命题 2.4, 拟距离 $\rho^*(0,\,\xi)$ 的定义见 (2.8). 本文的主要结果是相关于变量各向异性象征类 $S^0_{\delta,\,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$ 的拟微分算子的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界性 (见定理 3.2). 证明借鉴了 Stein 文 [15, 第 7.2 章, 定理 2] 及 Bényi 和 Bownik 文 [2, 定理 1.1] 的证明方法. 值得指出的是, 这个变量各向异性非齐次类 $S^0_{\delta,\,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$ 不仅包含了众所周知的各向同性象征类 $S^0_{\delta,\,\delta}(2I_n)$,而且包含了 Leopold [13] 和 Garello [12] (见注 2.2) 研究的各向异性象征类 $S^m_{a;\gamma,\delta}$, 还包含了 Bényi 和 Bownik [2] 的各向异性象征类 $S^0_{\delta,\,\delta}(A)$.

本文第 2 节回顾了连续椭球覆盖 Θ 的一些符号, 定义及相关性质, 并得到了关于中心正则椭球覆盖 $\widetilde{\Theta}_0$ 的一些性质. 第 3 节将介绍各向异性非齐次象征类 $S^0_{\delta,\,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$, $0 \le \delta < 1$ (见定义 3.1), 并得到了相关于 $S^0_{\delta,\,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$ 的拟微分算子的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界性.

为方便起见, 对全文做如下约定: 对任意集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, 记 E 在 $\mathbb{R}^n$ 中的补集为 $E^{\complement}$.

$$\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}, \quad \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

对任意的多重指标 $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, 设

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad \text{和} \quad \partial^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

设 C 是与变量无关的常量, 它在不同行可表示不同的值. 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的任意函数空间 $\mathscr{X}(\mathbb{R}^n)$ 简记为 $\mathscr{X}$. 记 $\mathscr{S}$ 为 Schwartz 函数空间.

2 $\mathbb{R}^n$ 上的各向异性连续椭球覆盖

$\mathbb{R}^n$ 中的椭球 ξ 是指欧几里得单位球 $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ 在仿射变换下的像集, 即

$$\xi := M_\xi(\mathbb{B}^n) + c_\xi,$$

其中 M_ξ 是一个可逆矩阵, $c_\xi \in \mathbb{R}^n$ 是椭球 ξ 的中心.

定义 2.1 (文 [7, 定义 2.4]) 称 $\Theta := \{\theta(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续椭球覆盖, 或简称为椭球覆盖, 如果存在正常数 $p(\Theta) := \{a_1, \ldots, a_6\}$ 满足如下条件:

(i) 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $t \in \mathbb{R}$, 存在椭球 $\theta(x,t) := M_{x,t}(\mathbb{B}^n) + x$ 满足

$$a_1 2^{-t} \le |\theta(x,t)| \le a_2 2^{-t}; \tag{2.1}$$

(ii) Θ 中任意两个相交的椭球满足 "形状控制条件", 即对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ 和 $s \ge 0$, 若 $\theta(x,t) \cap \theta(y, t+s) \ne \emptyset$, 则

$$a_3 2^{-a_4 s} \le \frac{1}{\|(M_{y,t+s})^{-1} M_{x,t}\|} \le \|(M_{x,t})^{-1} M_{y,t+s}\| \le a_5 2^{-a_6 s}, \tag{2.2}$$

其中 $\|\cdot\|$ 指矩阵范数, 即对任意的一个 $n \times n$ 实矩阵 M, $\|M\| := \max_{|x|=1} |Mx|$.

本文称 Θ 是正则的, 记作 $\widetilde{\Theta}$, 如果对于任意的两个椭球 $\theta(0,s)$ 和 $\theta(0,t)$, $s, t \in \mathbb{R}$ 满足

$$M_{0,s} M_{0,t} = M_{0,s+t}. \tag{2.3}$$

记 $\widetilde{\Theta}_0 := \{\theta(0,t) : t \in \mathbb{R}\}$ 是正则椭球覆盖 $\widetilde{\Theta}$ 的中心正则椭球覆盖.

注 2.2 定义 2.1 中的假设 (2.3) 是一个很弱的条件. 当椭球覆盖 Θ 退化为以下典型的椭球覆盖时, 假设 (2.3) 自动成立.

(i) 欧氏球族组成 $\mathbb{R}^n$ 的常规覆盖:

$$\Theta := \{\theta(x,t) = M_{x,t}(\mathbb{B}^n) + x : t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\},$$

其中 $M_{x,t} = 2^{-\frac{t}{n}} \mathrm{I}_n$. 显然, $M_{0,s} M_{0,t} = M_{0,s+t}$.

(ii) 一族单参数型的对角扩张矩阵

$$D_t := \operatorname{diag}(2^{-tb_1}, 2^{-tb_2}, \ldots, 2^{-tb_n}), \quad b_j > 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^n b_j = 1$$

诱导了一个 $\mathbb{R}^n$ 上的连续椭球覆盖, 其中 $M_{x,t} = D_t$. 显然, $M_{0,s} M_{0,t} = M_{0,s+t}$, 并且这种椭球覆盖可以生成一种新的各向异性象征类 $S^m_{a;\gamma,\delta}$, 最先被 Leopold [13] 和 Garello [12] 研究.

(iii) 设 $\mathbb{R}^n$ 上线性群的单参数连续线性子群 $\{A_t : 0 < t < \infty\}$ 满足 $A_t A_s = A_{ts}$ 和

$$t^\alpha |x| < |A_t x| < t^\beta |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \ge 1,$$

其中 $1 \le \alpha \le \beta < \infty$. $A_t := \exp(P\ln t)$ 中的 P 是无穷小生成元且满足 $(Px, x) \ge (x, x)$, $\det A_t = t^a$, 其中 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准内积, a 是 P 的迹, 则可定义 Calderón 和 Torchinsky [4] 的连续椭球覆盖如下:

$$\Theta := \{x + A_t(\mathbb{B}^n) : x \in \mathbb{R}^n,\, t \in (0,\infty)\} := \{x + A_{2^{-t'/a}}(\mathbb{B}^n) : x \in \mathbb{R}^n,\, t' \in \mathbb{R}\}.$$

显然, $M_{0,\,t'}M_{0,\,s'} = A_{2^{-t'/a}}A_{2^{-s'/a}} = A_{2^{-(t'+s')/a}} = M_{0,\,t'+s'}$.

(iv) 考虑 A 是一个 $n \times n$ 实矩阵且其特征值 λ 均满足 $|\lambda| > 1$, 由文 [3, 引理 2.2] 可知存在一个开椭球 $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : |Px| < 1\}$, 其中 P 是可逆的 $n \times n$ 矩阵. 对任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 令 $B_k := A^k\Delta$, 则 $B_k \subset B_{k+1}$. 然后可以定义一个在文 [7, 定义 2.5] 情形下的 Bownik 的半连续椭球覆盖, 即

$$\Theta := \{x + B_k : x \in \mathbb{R}^n,\, k \in \mathbb{Z}\} = \{x + A^k\Delta : x \in \mathbb{R}^n,\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

显然, $A^sA^t = A^{s+t}$, $s, t \in \mathbb{Z}$, 这与假设 (2.3) 的形式相吻合.

命题 2.3 设 $\widetilde{\Theta}_0$ 是中心正则椭球覆盖, 取其共轭椭球覆盖为

$$\widetilde{\Theta}_0^* := \{\theta^*(0,\,t) := M_{0,\,t}^*(\mathbb{B}^n) : t \in \mathbb{R}\},$$

其中 $M_{0,\,t}^*$ 是 $M_{0,\,t}$ 的转置矩阵.

(i) 对任意的 $t \in \mathbb{R}$,

$$a_1 2^{-t} \le |\theta^*(0,\,t)| \le a_2 2^{-t}. \tag{2.4}$$

(ii) 对任意的 $t \in \mathbb{R}$ 和 $s \ge 0$,

$$\|M_{0,\,0}^{-1}\|^{-1}a_3 2^{-a_4 s} \le \frac{1}{\|(M_{0,\,t+s}^*)^{-1}M_{0,\,t}^*\|} \le \|(M_{0,\,t}^*)^{-1}M_{0,\,t+s}^*\| \le \|M_{0,\,0}\|a_5 2^{-a_6 s}. \tag{2.5}$$

证明 (i) 由 $|\det M_{0,\,t}| = |\det M_{0,\,t}^*|$ 可得 (2.4).

(ii) 由 (2.3), (2.2) 和 $s \ge 0$, 有

$$\|(M_{0,\,t}^*)^{-1}M_{0,\,s+t}^*\| = \|M_{0,\,s}^*\| = \|M_{0,\,s}\| \le \|M_{0,\,0}\|\,\|M_{0,\,0}^{-1}M_{0,\,s}\| \le \|M_{0,\,0}\|a_5 2^{-a_6 s} \tag{2.6}$$

和

$$\|(M_{0,\,s+t}^*)^{-1}M_{0,\,t}^*\| = \|(M_{0,\,s}^*)^{-1}\| = \|M_{0,\,s}^{-1}\| \le \|M_{0,\,0}^{-1}\|\,\|M_{0,\,s}^{-1}M_{0,\,0}\| \le \|M_{0,\,0}^{-1}\|a_3^{-1}2^{a_4 s}.$$

因此

$$\|M_{0,\,0}^{-1}\|^{-1}a_3 2^{-a_4 s} \le \frac{1}{\|(M_{0,\,s+t}^*)^{-1}M_{0,\,t}^*\|}.$$

结合此式和 (2.6) 可得 (2.5). 证毕.

由命题 2.3 知, 椭球族 $\widetilde{\Theta}_0^*$ 也是正则的, 并且满足与 Θ 相同的条件 (2.1) 和 (2.2). 因此关于 Θ 的性质对 $\widetilde{\Theta}_0^*$ 也成立. 从而由文 [7, 引理 2.8] 也可得如下命题.

命题 2.4 设 $\widetilde{\Theta}_0^*$ 是如命题 2.3 所示的中心正则椭球覆盖. 那么存在常数 $\gamma > 0$, 使得对任意 $t, l \in \mathbb{R}$ 且 $t \le l$,

$$\theta^*(0,\,l) \subseteq \theta^*(0,\,t-\gamma). \tag{2.7}$$

在下文中, 令 $\gamma > 0$ 总是如命题 2.4 所示.

定义 2.5 称集合 X 上的映射 $\rho: X\times X\to[0,\infty)$ 是拟距离, 若对所有的 $x,y,z\in X$ 满足如下条件:

(i) $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(iii) 存在常数 $\kappa\geq 1$, 使得

$$\rho(x,y)\leq\kappa(\rho(x,z)+\rho(y,z)).$$

命题 2.6 设 $\widetilde{\Theta}_0^*$ 是如命题 2.3 所示的中心正则椭球覆盖.

(i) 若函数 $\rho^*:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ 定义为

$$\rho^*(x,y):=\rho_{\widetilde{\Theta}_0^*}(0,x-y):=\inf_{\theta^*\in\widetilde{\Theta}_0^*}\{|\theta^*|:x-y\in\theta^*\},\tag{2.8}$$

则 $\rho^*(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的拟距离.

(ii) 设

$$B_{\rho^*}(x,r):=\{y\in\mathbb{R}^n:\rho^*(x,y)<r\},$$

则有

$$|B_{\rho^*}(x,r)|\sim r,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad r>0,$$

其中等价常数只依赖于 $p(\Theta)$.

证明 (i) 显而易见 $\rho^*(x,\,y)$ 满足定义 2.5 中的性质 (i) 和 (ii). 只需要证明

$$\rho^*(x,\,y)\leq\kappa[\rho^*(x,\,z)+\rho^*(z,\,y)].\tag{2.9}$$

注意到 (2.9) 式等价于

$$\rho_{\widetilde{\Theta}_0^*}(0,x-y)\leq\kappa[\rho_{\widetilde{\Theta}_0^*}(0,x-z)+\rho_{\widetilde{\Theta}_0^*}(0,z-y)].$$

设 $x,\,y,\,z\in\mathbb{R}^n$, 由命题 2.6 (i) 知存在 $\theta^*(0,\,t)$ 和 $\theta^*(0,\,s)$, 使得 $x-z\in\theta^*(0,\,t)$, $z-y\in\theta^*(0,\,s)$,

$$|\theta^*(0,\,t)|/2\leq\rho_{\widetilde{\Theta}_0^*}(0,x-z)\leq|\theta^*(0,\,t)|$$

和

$$|\theta^*(0,\,s)|/2\leq\rho_{\widetilde{\Theta}_0^*}(0,z-y)\leq|\theta^*(0,\,s)|,$$

其中 $\theta^*(0,\,t),\ \theta^*(0,\,s)\in\widetilde{\Theta}_0^*$. 不失一般性假设 $t\geq s$. 由 (2.7) 知 $\theta^*(0,\,t)\subset\theta^*(0,\,s-\gamma)$. 再由

$$x-z\in\theta^*(0,\,t)\ \text{ 和 }\ z-y\in\theta^*(0,\,s),$$

进一步可得

$$\begin{aligned}x-y&\in\theta^*(0,\,t)+\theta^*(0,\,s)\subset\theta^*(0,\,s-\gamma)+\theta^*(0,\,s-\gamma)\\&=M^*_{0,\,s-\gamma}(\mathbb{B}^n+\mathbb{B}^n)\subset 2M^*_{0,\,s-\gamma}(\mathbb{B}^n)=2\theta^*(0,\,s-\gamma).\end{aligned}$$

故由此和 (2.4) 知

$$\begin{aligned}\rho_{\widetilde{\Theta}_0^*}(0,x-y)&\leq|2\theta^*(0,\,s-\gamma)|\leq 2^n a_2 2^{\gamma-s}\\&\leq 2^n2^\gamma\frac{a_2}{a_1}(|\theta^*(0,\,s)|+|\theta^*(0,\,t)|)\\&\leq\kappa(\rho_{\widetilde{\Theta}_0^*}(0,z-y)+\rho_{\widetilde{\Theta}_0^*}(0,x-z)),\end{aligned}$$

其中 $\kappa := 2^{n+1+\gamma}\frac{a_2}{a_1}$.

(ii) 通过常规修改文 [7, 性质 2.10] 的证明, 可以得到 (ii). 证毕.

通过类似于文 [10, 定理 2.9] 的证明, 可得到如下性质.

命题 2.7 设 $\widetilde{\Theta}_0^*$ 是如命题 2.3 所示的中心正则椭球覆盖, 存在正常数 C_0 和 C_1, 使得对任意的 $x, z \in \mathbb{R}^n$, 有

$$C_0|x-z|^{1/a_4} \le |\rho^*(z,x)| \le C_1|x-z|^{1/a_6}, \quad \rho^*(z,x) \ge 1. \tag{2.10}$$

命题 2.8 设 Θ 是连续的椭球覆盖.

(i) (文 [7, 命题 2.7]) 若函数 $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ 定义为

$$\rho(x, y) := \rho_\Theta(x,y) := \inf_{\theta\in\Theta}\{|\theta| : x, y \in \theta\}, \tag{2.11}$$

则 $\rho(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的拟距离.

(ii) (文 [7, 命题 2.10]) 设

$$B_\rho(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) < r\}, \tag{2.12}$$

则

$$|B_\rho(x,r)| \sim r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r > 0,$$

其中等价常数只依赖于 $p(\Theta)$.

命题 2.9 给定 $z \in \mathbb{R}^n$ 和 $l > 0$, 则存在常数 C_l, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\max\{1, \rho(z,x)\}^{1+l}} dx \le C_l.$$

证明 由命题 2.8 (ii) 和 $l > 0$, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\max\{1, \rho(z,x)\}^{1+l}} dx &= \int_{B_\rho(z,1)} \frac{1}{\max\{1, \rho(z,x)\}^{1+l}} dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_\rho(z,\,2^k)\setminus B_\rho(z,\,2^{k-1})} \frac{1}{\max\{1, \rho(z,x)\}^{1+l}} dx \\ &\le |B_\rho(z,1)| + \sum_{k=1}^{\infty} |B_\rho(z,\,2^k)| \cdot 2^{-k(1+l)} \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kl} \\ &=: C_l.\end{aligned}$$

证毕.

3 主要结果及其证明

受 Bownik 文 [2, 第 157 页] 的启发, 本文引进了关于各向异性非齐次象征类的拟微分算子, 该算子适用于中心正则椭球覆盖 $\widetilde{\Theta}_0$.

定义 3.1 对任意的多重指标 α, β 和 $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, 如果 $\sigma(x, \xi)$ 满足估计

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\sigma(M_{0,\,k'\gamma}\cdot,\, (M^*_{0,\,k'\gamma})^{-1}\cdot)](M^{-1}_{0,\,k'\gamma}x,\, M^*_{0,\,k'\gamma}\xi)| \le C_{\alpha,\,\beta}, \tag{3.1}$$

则称 $\sigma(x, \xi)$ 属于各向异性非齐次象征类 $S^0_{\delta,\,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$, $0 \le \delta < 1$, 其中

$$k' = \lfloor k\delta \rfloor,$$

$k \in \mathbb{N}_0$ 且满足 $1+\rho^*(0,\xi) \sim 2^{k\gamma} = |\det M_{0,-k\gamma}|$.

上述偏导数可以进一步表示为

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{\sigma}(M_{0,k'\gamma}^{-1}x,\, M_{0,k'\gamma}^*\xi),$$

其中

$$\tilde{\sigma}(x,\xi) := \sigma(M_{0,k'\gamma}x,\, (M_{0,k'\gamma}^*)^{-1}\xi).$$

相关于象征 $\sigma(x,\xi)$ 的拟微分算子可以预定义在 $\mathscr{S}$ 上:

$$T_\sigma f(x) := \sigma(x,D)f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}d\xi.$$

定理 3.2 将 Bényi 和 Bownik 的各向异性象征类 $S^0_{\delta,\delta}(A)$ 上的有界性 (文 [2, 定理 1.1]) 推广到了当前情况下.

定理 3.2 设 $\sigma \in S^0_{\delta,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$, $0 \le \delta < 1$, 则拟微分算子 T_σ 在 L^2 上是有界的.

为了证明定理 3.2, 需要如下引理.

引理 3.3 假设 $x-y \in \theta^*(0,-k\gamma) \setminus \theta^*(0,-(k-2)\gamma)$, $k \in \mathbb{Z}$, 则

$$C_1 2^{k\gamma} \le \rho^*(x,y) \le C_2 2^{k\gamma},$$

其中 $C_1 := a_1 2^{-2\gamma}$ 和 $C_2 := a_2$.

证明 由 $\rho^*(x,y)$ 的定义知

$$\rho^*(x,y) \le |\theta^*(0,-k\gamma)| \le a_2 2^{k\gamma}. \tag{3.2}$$

对任意的 $s \ge -(k-3)\gamma$, 通过 (2.7) 可知

$$\theta^*(0,s) \subset \theta^*(0,-(k-2)\gamma). \tag{3.3}$$

当 $|\theta^*(0,s)| \le a_1 2^{(k-3)\gamma}$ 时, 由 (2.4) 可得

$$a_1 2^{-s} \le |\theta^*(0,s)| \le a_1 2^{(k-3)\gamma}, \quad s \ge -(k-3)\gamma.$$

通过此式和 (3.3) 可知

$$B_{\rho^*}(0,\, a_1 2^{(k-3)\gamma}) = \bigcup_{|\theta^*(0,s)| < a_1 2^{(k-3)\gamma}} \theta^*(0,s) \subset \bigcup_{s \ge -(k-3)\gamma} \theta^*(0,s) \subset \theta^*(0,-(k-2)\gamma).$$

由此及 $x-y \in (\theta(0,-(k-2)\gamma))^\complement$, 进一步可得

$$x-y \in B_{\rho^*}(0,\, a_1 2^{(k-3)\gamma})^\complement,$$

此式蕴含

$$\rho^*(x,y) \ge a_1 2^{(k-3)\gamma}.$$

结合此式及 (3.2) 便完成了命题 3.3 的证明.

引理 3.4 设 a_6 是定义 2.1 中的一个正常数. 如果 $N > 1/(2a_6)$, 那么存在一个正常数 $C>0$, 使得对任意 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|M_{0,t}z|^2)^{-N}\, dz \le C 2^t.$$

证明 当 $\rho(z,x)\ge 1$ 时, 由文 [10, 定理 2.9] 可知

$$1+|M_{0,\,t}z|\ge C[1+\rho(0,\,M_{0,\,t}z)^{a_6}].$$

由此不等式, 积分变量替换, 命题 2.9 及 $2a_6N>1$, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|M_{0,\,t}z|^2)^{-N}\,dz\le\int_{\mathbb{R}^n}C[1+\rho(0,\,M_{0,\,t}z)]^{-2a_6N}\,dz\le C2^t.$$

当 $\rho(z,x)<1$ 时, 由文 [10, 定理 2.9], $2a_4N\ge 2a_6N>1$, 用同上的方法可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|M_{0,\,t}z|^2)^{-N}\,dz\le\int_{\mathbb{R}^n}C[1+\rho(0,\,M_{0,\,t}z)]^{-2a_4N}\,dz\le C2^t.$$

证毕.

接下来开始定理 3.2 的证明.

定理 3.2 的证明 定理的证明分为六个步骤.

步骤 1 首先, 可将 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 中的象征 σ 简化为具有紧支集的函数. 事实上, 设 ϕ 是支在单位球 $\mathbb{B}^n$ 上的光滑函数且 $\phi(0,0)=1$. 对任意的 $j\in\mathbb{N}$, 定义

$$\ddot{\sigma}_j(x,\,\xi):=\sigma(x,\,\xi)\phi(2^{-j}x,\,2^{-j}\xi).$$

由支集条件和链式法则, 显然有 $\ddot{\sigma}_j\in S^0_{\delta,\,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$ 对 $j\in\mathbb{N}$ 一致成立. 而且, 对任意 $f\in\mathscr{S}$,

$$T_{\ddot{\sigma}_j}f\to T_\sigma f,\quad j\to\infty.$$

在 $\mathscr{S}$ 中, 当象征简化为具有紧支集的函数时, 将方便下文的证明, 如分部积分. 在接下来的证明中, 将假设 $\sigma\in S^0_{\delta,\,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$ 且具有紧支集.

步骤 2 分解算子 T_σ 如下:

$$T_\sigma=\sum_{j=0}^{\infty}T_{\sigma_j},\quad \sigma_j(x,\,\xi):=\begin{cases}\sigma(x,\,\xi)\psi((M^*_{0,\,-j\gamma})^{-1}\xi), & j\in\mathbb{N},\\ \sigma(x,\,\xi)\varphi(\xi), & j=0.\end{cases}\tag{3.4}$$

这里 $\varphi,\ \psi\in\mathscr{S}$ 满足 $\operatorname{supp}\varphi\subset\theta^*(0,\,0)$, $\operatorname{supp}\psi\subset\theta^*(0,\,0)\setminus\theta^*(0,\,2\gamma)$ 和

$$\varphi(\xi)+\sum_{j=1}^{\infty}\psi((M^*_{0,\,-j\gamma})^{-1}\xi)=1,\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

由 $\operatorname{supp}\psi\subset\theta^*(0,\,0)\setminus\theta^*(0,\,2\gamma)$ 及 (2.3) 知

$$\xi\in M^*_{0,\,-j\gamma}\theta^*(0,\,0)\setminus M^*_{0,\,-j\gamma}\theta^*(0,\,2\gamma)=\theta^*(0,\,-j\gamma)\setminus\theta^*(0,\,-(j-2)\gamma)=:U_j.\tag{3.5}$$

参照步骤 1 的讨论, 可以证明象征类 $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ 在 $S^0_{\delta,\,\delta}(\widetilde{\Theta}_0)$ 中, 且 (3.1) 是一致成立的.

步骤 3 验证 T_{σ_j} 是几乎处处正交的 (定义见文 [15, 第 7 章]). 固定充分大的 $\omega\in\mathbb{N}$ (ω 稍后被确定). 将 (3.4) 分解为无穷级数的有限和

$$T_\sigma=\sum_{r=1}^{\omega}\bigg(\sum_{j=0,\,j\equiv r\bmod\omega}^{\infty}T_{\sigma_j}\bigg).\tag{3.6}$$

对于某个固定的 $r=1,\ldots,\omega$, 这样比较容易证明每个级数是有界的. 由 (3.4), (3.5) 和命题 2.4 知, $T_{\sigma_j}=T_\sigma\Delta_j$, 其中 Δ_j 是一个乘子:

$$\widehat{\Delta_j f}(\xi):=\begin{cases}\widehat{f}(\xi)\psi((M^*_{0,\,-j\gamma})^{-1}\xi), & j>0,\\ \widehat{f}(\xi)\varphi(\xi), & j=0.\end{cases}$$

由 $\widehat{\Delta_j}$ 的支集条件可知

$$T_{\sigma_j}(T_{\sigma_k})^* = T_\sigma \Delta_j (\Delta_k)^* (T_\sigma)^* = 0, \quad |j-k| \geq 2, \tag{3.7}$$

则对任意 $j, k \in \{j : j \equiv r \bmod \omega\}$, 由上式可得 $T_{\sigma_j}(T_{\sigma_k})^* = 0$, 即 T_{σ_j} 是几乎处处正交的.

步骤 4 估计 $(T_{\sigma_j})^* T_{\sigma_k}$ 的核. 由文 [15, 第 7.2.5 章, 定理 2] 知

$$(T_{\sigma_j})^* T_{\sigma_k} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y)\, dy,$$

其中核

$$K(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \overline{\sigma_j}(z, \xi) \sigma_k(z, \eta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\xi \cdot (z-y) - \eta \cdot (z-x)]}\, dz\, d\xi\, d\eta. \tag{3.8}$$

以下将利用指数的振荡性质和象征 σ_k 和 σ_j 的相对光滑性来估计核 K. 这可以通过对三个变量 z, η, ξ 做分部积分来实现. 与各向同性的情况不同, 首先需要做变量替换. 这是必要的, 因为各向异性条件 (3.1) 涉及到带伸缩的象征的导数.

对于步骤 3 中同一个级数的指标: $j \equiv k \bmod \omega$, 不妨设 $j < k$. 另设 $k' := \lfloor k\delta \rfloor$, $j' := \lfloor j\delta \rfloor$. 通过对 (3.8) 做变量替换

$$x \to M_{0,\, k'\gamma} x, \quad y \to M_{0,\, k'\gamma} y, \quad z \to M_{0,\, k'\gamma} z, \quad \eta \to (M^*_{0,\, k'\gamma})^{-1} \eta, \quad \xi \to (M^*_{0,\, j'\gamma})^{-1} \xi,$$

且利用恒等式

$$\begin{aligned} &(M^*_{0,\, j'\gamma})^{-1} \xi \cdot (M_{0,\, k'\gamma} z - M_{0,\, k'\gamma} y) - (M^*_{0,\, k'\gamma})^{-1} \eta \cdot (M_{0,\, k'\gamma} z - M_{0,\, k'\gamma} x) \\ &\quad = (M^{-1}_{0,\, j'\gamma} M_{0, k'\gamma})^* \xi \cdot (z-y) - \eta \cdot (z-x), \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} &K\left(M_{0,\, k'\gamma} x,\, M_{0,\, k'\gamma} y\right) \\ &\quad = 2^{j'\gamma} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \overline{\sigma_j}(M_{0,\, k'\gamma} z,\, (M^*_{0,\, j'\gamma})^{-1} \xi) \sigma_k(M_{0,\, k'\gamma} z,\, (M^*_{0,\, k'\gamma})^{-1} \eta) \\ &\qquad \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(M^{-1}_{0,\, j'\gamma} M_{0, k'\gamma})^* \xi \cdot (z-y) - \eta \cdot (z-x)]}\, dz\, d\xi\, d\eta. \end{aligned} \tag{3.9}$$

定义

$$\tilde{\sigma}_j(z, \xi) := \sigma_j(M_{0,\, k'\gamma} z,\, (M^*_{0,\, j'\gamma})^{-1} \xi) \quad 和 \quad \tilde{\sigma}_k(z, \eta) := \sigma_k(M_{0,\, k'\gamma} z,\, (M^*_{0,\, k'\gamma})^{-1} \eta). \tag{3.10}$$

由此式及 $\operatorname{supp} \sigma_k \subset \mathbb{R}^n \times U_k$ 可知

$$(M^*_{0,\, k'\gamma})^{-1} \eta \in M^*_{0,\, -k\gamma}(\mathbb{B}^n) \setminus M^*_{0,\, -(k-2)\gamma}(\mathbb{B}^n).$$

利用此式和引理 3.3, 有

$$1 + \rho^*((M^*_{0,\, k'\gamma})^{-1} \eta,\, 0) \sim |\det M_{0,\, -k\gamma}| \sim 2^{k\gamma}.$$

因此, σ_k 满足 (3.1) 的条件. 故由 (3.1), 对任意的多重指标 α, β 和 $(z, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned} &|\partial_z^\alpha \partial_\eta^\beta [\tilde{\sigma}_k(\cdot, \cdot)](z, \eta)| \\ &\quad = |\partial_z^\alpha \partial_\eta^\beta [\sigma_k(M_{0,\, k'\gamma} \cdot,\, (M^*_{0,\, k'\gamma})^{-1} \cdot)](M^{-1}_{0,\, k'\gamma} M_{0,\, k'\gamma} z,\, M^*_{0,\, k'\gamma} (M^*_{0,\, k'\gamma})^{-1} \eta)| \\ &\quad \leq C_{\alpha,\, \beta}. \end{aligned}$$

根据此式, 对任意的多重指标 α,β, 有

$$\|\partial_z^\alpha\partial_\eta^\beta\tilde{\sigma}_k\|_\infty\le C_{\alpha,\,\beta}.\tag{3.11}$$

记

$$\sigma_1(x,\,\xi):=\sigma_j(M_{0,\,j'\gamma}x,(M_{0,\,j'\gamma}^*)^{-1}\xi).$$

对 $\tilde{\sigma}_j$ 使用链式法则, 可得

$$\begin{aligned}|\partial_z^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde{\sigma}_j(\cdot,\,\cdot)(x,\,\xi)|&=|\partial_z^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma_j(M_{0,\,k'\gamma}\cdot,(M_{0,\,j'\gamma}^*)^{-1}\cdot)(x,\,\xi)|\\&=|\partial_z^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma_j(M_{0,\,j'\gamma}M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,\,k'\gamma}\cdot,(M_{0,\,j'\gamma}^*)^{-1}\cdot)(x,\,\xi)|\\&=|\partial_z^\alpha\partial_\xi^\beta[\sigma_1(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,\,k'\gamma}\cdot,\cdot)(x,\,\xi)]|\\&\lesssim\|M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,\,k'\gamma}\|^{|\alpha|}|\partial_z^\alpha\partial_\xi^\beta[\sigma_1(\cdot,\cdot)](M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,\,k'\gamma}x,\,\xi)|\\&\lesssim\|M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,\,k'\gamma}\|^{|\alpha|}|\partial_z^\alpha\partial_\xi^\beta[\sigma_j(M_{0,\,j'\gamma}\cdot,(M_{0,\,j'\gamma}^*)^{-1}\cdot)]\\&\quad\times(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,\,k'\gamma}x,\,M_{0,\,j'\gamma}^*(M_{0,\,j'\gamma}^*)^{-1}\xi)|.\end{aligned}\tag{3.12}$$

根据 $\tilde{\sigma}_j$ 的定义和 $\operatorname{supp}\sigma_j\subset\mathbb{R}^n\times U_j$, 有 $(M_{0,\,j'\gamma}^*)^{-1}\xi\in U_j$. 再由引理 3.3, 进一步可得

$$1+\rho^*((M_{0,\,j'\gamma}^*)^{-1}\xi,\,0)\sim 2^{j\gamma}.$$

因此, σ_j 满足 (3.1) 的条件. 故由 (3.1), 对任意的多重指标 $\alpha,\,\beta$ 和 $(z,\,\eta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, 有

$$[\sigma_j(M_{0,\,j'\gamma}\cdot,(M_{0,\,j'\gamma}^*)^{-1}\cdot)](M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,\,k'\gamma}x,\,M_{0,\,j'\gamma}^*(M_{0,\,j'\gamma}^*)^{-1}\xi)\le C_{\alpha,\,\beta}.$$

根据此式和 (3.12) 可知

$$|\partial_z^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde{\sigma}_j(\cdot,\,\cdot)(x,\,\xi)|\le C_{\alpha,\,\beta}\big\|M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,\,k'\gamma}\big\|^{|\alpha|}.\tag{3.13}$$

另外, 通过 (2.2) 和 $j<k$, 可得

$$\big\|M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,\,k'\gamma}\big\|\le a_5 2^{-a_6(k'-j')\gamma}\le C.$$

由此式和 (3.13), 对任意的多重指标 α,β, 有

$$\|\partial_z^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde{\sigma}_j\|_\infty\le C_{\alpha,\,\beta}.\tag{3.14}$$

因为

$$\frac{(I-\Delta_z)^N}{[1+|(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi-\eta|^2]^N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[((M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi-\eta)\cdot z]}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[((M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi-\eta)\cdot z]},$$

其中 N 是一个整数 (N 稍后被确定). 根据此式并对 (3.9) 中的积分变量 z 做分部积分, 可得

$$\begin{aligned}&K(M_{0,\,k'\gamma}x,\,M_{0,\,k'\gamma}y)\\&=2^{j'\gamma}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}(I-\Delta_z)^N[\overline{\tilde{\sigma}_j}(z,\xi)\tilde{\sigma}_k(z,\eta)]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(M_{0,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi\cdot(z-y)-\eta\cdot(z-x)]}}{[1+|(M_{0,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi-\eta|^2]^N}dzd\xi d\eta.\end{aligned}\tag{3.15}$$

将

$$\frac{(I-\Delta_\eta)^N}{(1+|x-z|^2)^N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\eta\cdot(z-x)]}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\eta\cdot(z-x)]}$$

和

$$\frac{(I-\Delta_\xi)^N}{[1+|M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma}(z-y)|^2]^N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi\cdot(z-y)]}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi\cdot(z-y)]}$$

代入 (3.15), 并对积分变量 ξ 和 η 分别做分部积分, 可得

$$\begin{aligned} &K(M_{0,\,k'\gamma}x,\,M_{0,\,k'\gamma}y) \\ &= 2^{j'\gamma}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{(I-\Delta_\xi)^N}{[1+|M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma}(z-y)|^2]^N}\frac{(I-\Delta_\eta)^N}{(1+|x-z|^2)^N} \\ &\quad\times\frac{(I-\Delta_z)^N}{[1+|(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi-\eta|^2]^N}[\widetilde{\overline{\sigma}_j}(z,\xi)\tilde{\sigma}_k(z,\,\eta)] \\ &\quad\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi\cdot(z-y)-\eta\cdot(z-x)]}\,dz\,d\xi\,d\eta. \end{aligned} \tag{3.16}$$

由 $\operatorname{supp}\sigma_k\subset\mathbb{R}^n\times U_k$, $\operatorname{supp}\sigma_j\subset\mathbb{R}^n\times U_j$, $\tilde{\sigma}_j$ 和 $\tilde{\sigma}_k$ 的定义及 $M_{0,\,t}^*M_{0,\,s}^*=M_{0,\,s+t}^*$ (由 (2.3) 保证), 可得

$$\begin{aligned} \eta\in M_{0,\,k'\gamma}^*U_k &= M_{0,\,k'\gamma}^*[M_{0,\,-k\gamma}^*(\mathbb{B}^n)\setminus M_{0,\,-(k-2)\gamma}^*(\mathbb{B}^n)] \\ &= M_{0,\,(k'-k)\gamma}^*(\mathbb{B}^n)\setminus M_{0,\,(k'-k+2)\gamma}^*(\mathbb{B}^n)=U_{k-k'}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

同理有

$$\xi\in M_{0,\,j'\gamma}^*U_j=U_{j-j'} \tag{3.18}$$

和

$$(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi\in M_{0,k'\gamma}^*U_j=U_{j-k'}.$$

由此式和引理 3.3 知

$$\rho^*(\xi,\,0)\sim 2^{(j-j')\gamma},\quad \rho^*(\eta,\,0)\sim 2^{(k-k')\gamma}\quad 和\quad \rho^*((M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi,\,0)\sim 2^{(j-k')\gamma}.$$

根据 $j<k$ 和 $j\equiv k \mod \omega$, 有 $j+\omega\le k$, 于是存在常数 $c>0$, 使得

$$\rho^*(\eta,\,0)\ge c2^{(k-j)(1-\delta)\gamma}\rho^*((M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi,\,0). \tag{3.19}$$

选择 ω 使得 $2^{\omega\gamma(1-\delta)}\ge 2^{\omega_0\gamma}$, 其中 $\omega_0\in\mathbb{N}$ 且 $2^{-\omega_0\gamma}<1/\kappa$ (κ 见定义 2.5 (iii)). 通过此式和 (3.19), 有

$$\rho^*(\eta,\,0)\ge 2^{\omega_0\gamma}\rho^*((M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi,\,0). \tag{3.20}$$

一方面, 根据 (2.9) 和 (3.20), 可知

$$\begin{aligned} \rho^*((M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi,\,\eta) &\le \kappa[\rho^*((M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi,\,0)+\rho^*(\eta,\,0)] \\ &\le \kappa(2^{-\omega_0\gamma}+1)\rho^*(\eta,\,0); \end{aligned} \tag{3.21}$$

另一方面, 由

$$\rho^*(\eta,\,0)\le\kappa[\rho^*((M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi,\,\eta)+\rho^*((M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi,\,0)]$$

和 (3.20) 可得

$$\begin{aligned} \rho^*(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi,\,\eta) &\ge \frac{1}{\kappa}\rho^*(\eta,\,0)-\rho^*((M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi,\,0) \\ &\ge \left(\frac{1}{\kappa}-2^{-\omega_0\gamma}\right)\rho^*(\eta,\,0). \end{aligned}$$

结合此式和 (3.21), 有

$$\rho^*((M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi,\,\eta)\sim\rho^*(\eta,\,0)\sim 2^{(k-k')\gamma}\sim 2^{k\gamma(1-\delta)}.$$

通过此式和 (2.10), 进一步可得

$$|(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi-\eta|\geq C[\rho^*(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma})^*\xi,\,\eta)]^{a_6}\sim 2^{a_6(k-k')\gamma}\sim 2^{a_6k\gamma(1-\delta)}.$$

将上述估计 (3.11), (3.14), (3.17) 和 (3.18) 代到 (3.16) 中, 并对变量 ξ 和 η 进行积分可知

$$\begin{aligned}&|K(M_{0,\,k'\gamma}x,\,M_{0,\,k'\gamma}y)|\\&\quad\lesssim 2^{j'\gamma-2Na_6k\gamma(1-\delta)+(j+k)(1-\delta)\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}Q(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma}(z-y))Q(z-x)\,dz,\end{aligned}$$

其中 $Q(v):=(1+|v|^2)^{-N}$. 对上式做变量替换后可得

$$\begin{aligned}|K(x,y)|&\lesssim 2^{j'\gamma-2Na_6k\gamma(1-\delta)+(j+k)(1-\delta)\gamma}\\&\quad\times\int_{\mathbb{R}^n}Q(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma}(z-M_{0,\,k'\gamma}^{-1}y))Q(z-M_{0,\,k'\gamma}^{-1}x)\,dz.\end{aligned}\tag{3.22}$$

步骤 5 估计 $\|(T_{\sigma_j})^*T_{\sigma_k}\|$. 需要先估计

$$\int_{\mathbb{R}^n}|K(x,\,y)|\,dy\quad\text{和}\quad\int_{\mathbb{R}^n}|K(x,\,y)|\,dx.$$

取定 $N>1/(2a_6)$. 由引理 3.4 知

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}Q(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma}(z-M_{0,\,k'\gamma}^{-1}y))Q(z-M_{0,\,k'\gamma}^{-1}x)\,dy\,dz\\&\quad\lesssim 2^{-j'\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}Q(z-M_{0,\,-j'\gamma}^{-1}x)\,dz\lesssim 2^{-j'\gamma}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}Q(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma}(z-M_{0,\,k'\gamma}^{-1}y))Q(z-M_{0,\,k'\gamma}^{-1}x)\,dx\,dz\\&\quad\lesssim 2^{-k'\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}Q(M_{0,\,j'\gamma}^{-1}M_{0,k'\gamma}(z-M_{0,\,k'\gamma}^{-1}y))\,dz\lesssim 2^{-j'\gamma}.\end{aligned}$$

根据此式及 (3.22), 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|K(x,\,y)|\,dy\lesssim 2^{-2Na_6k\gamma(1-\delta)+(j+k)\gamma(1-\delta)}.$$

类似地, 对 $\int_{\mathbb{R}^n}|K(x,\,y)|\,dx$ 也有同样的上界. 因此, 由 Schur 引理 (见文 [15, 第 284 页]), 对任意的 $j<k-\omega$, 可得

$$\|(T_{\sigma_j})^*T_{\sigma_k}\|\lesssim 2^{-2Na_6k\gamma(1-\delta)+(j+k)\gamma(1-\delta)}.$$

进一步, 对 $|j-k|\geq\omega$, 同样有

$$\|(T_{\sigma_j})^*T_{\sigma_k}\|\lesssim 2^{2\max\{k,\,j\}(1-Na_6)\gamma(1-\delta)}.$$

步骤 6 从步骤 5 可以推断出

$$\|(T_{\sigma_j})^*T_{\sigma_k}\|\lesssim g(j)g(k),\quad |j-k|\geq\omega,\tag{3.23}$$

其中

$$g(j):=2^{-2j\varepsilon}\quad\text{及}\quad\varepsilon:=(Na_6-1)(1-\delta)\gamma>0,$$

这里, 取 N 足够大使得 $N>1/a_6$. 以下验证算子 T_{σ_k} 是一致有界的. 由 (3.11) 可知象征 $\tilde{\sigma}_k\in S_{0,\,0}^0(\widetilde{\Theta}_0)$ 关于 k 是一致成立的. 而各向异性象征类 $S_{0,\,0}^0(\widetilde{\Theta}_0)$ 与各向同性象征类 $S_{0,\,0}^0$ 是一致的.

事实上, 如果象征 σ 属于经典的非齐次象征类 $S^0_{0,\,0}$ (见 (1.1)) 且 $1+\rho^*(\xi)\sim 2^{k\gamma}$, $k'=\lfloor k\times 0\rfloor=0$, 则对任意的 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma(x,\,\xi)|\le C_{\alpha,\,\beta}.$$

由此可知

$$\begin{aligned}&|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[\sigma(M_{0,\,0}\cdot,\,(M^*_{0,\,0})^{-1}\cdot)](M^{-1}_{0,\,0}x,\,M^*_{0,\,0}\xi)|\\ &\quad=|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde\sigma(M_{0,\,0}\cdot,\,(M^*_{0,\,0})^{-1}\cdot)(x,\,\xi)|\\ &\quad\le C\|M_{0,\,0}\|^{|\alpha|}\|(M^*_{0,\,0})^{-1}\|^{|\beta|}|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma(x,\,\xi)|\\ &\quad\le C_{\alpha,\,\beta},\end{aligned}$$

其中

$$\tilde\sigma(x,\,\xi):=\sigma(M^{-1}_{0,\,0}x,\,M^*_{0,\,0}\xi).$$

因此, 有 $\sigma\in S^0_{0,\,0}(\widetilde\Theta_0)$. 如果 $\sigma\in S^0_{0,\,0}(\widetilde\Theta_0)$, 可知

$$\begin{aligned}|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[\sigma(\cdot,\,\cdot)](x,\,\xi)|&=|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[\sigma(M_{0,\,0}M^{-1}_{0,\,0}\cdot,\,(M^*_{0,\,0})^{-1}M^*_{0,\,0}\cdot)](x,\,\xi)|\\ &=|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[\sigma_2(M^{-1}_{0,\,0}\cdot,\,M^*_{0,\,0}\cdot)](x,\,\xi)|\\ &\lesssim\|M^{-1}_{0,\,0}\|^\alpha\|M^*_{0,\,0}\|^\beta|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[\sigma_2(\cdot,\,\cdot)](M^{-1}_{0,\,0}x,\,M^*_{0,\,0}\xi)|\\ &\lesssim C|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[\sigma(M_{0,\,0}\cdot,(M^*_{0,\,0})^{-1}\cdot)](M^{-1}_{0,\,0}x,\,M^*_{0,\,0}\xi)|\\ &\lesssim C_{\alpha,\,\beta},\end{aligned}$$

其中

$$\sigma_2(x,\,\xi):=\sigma(M_{0,\,0}x,(M^*_{0,\,0})^{-1}\xi).$$

因此有 $\sigma\in S^0_{0,\,0}$. 于是, $S^0_{0,\,0}$ 的 L^2 有界性意味着拟微分算子 $T_{\tilde\sigma_k}$ 关于 k 是一致有界的. 另外, 通过一个伸缩运算, 有

$$T_{\sigma_k}=D_{M^{-1}_{0,\,k'\gamma}}T_{\tilde\sigma_k}D_{M_{0,\,k'\gamma}}.$$

$D_{M_{0,\,k'\gamma}}f(x):=|M_{0,\,k'\gamma}|^{1/2}f(M_{0,\,k'\gamma}x)$ 在 L^2 上是等距的. 因此, 算子 T_{σ_k} 关于 k 一致有界. 由此, (3.23) 及 (3.7), 使用 Cotlar 引理 (见文 [15, 第 280 页]), 可得每个算子

$$\sum_{k\equiv r\,\mathrm{mod}\omega}T_{\sigma_k},\quad r=1,\ldots,\omega$$

在 L^2 上是有界的. 由此及 (3.6) 便可得 T_σ 在 L^2 空间上的有界性. 证毕.

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参 考 文 献

[1] Almeida V., Betancor J., Rodríguez-Mesa L., Molecules associated to Hardy spaces with pointwise variable anisotropy, *Inter. Equ. Oper. Theory*, 2017, **89**: 301–313.

[2] Bényi Á., Bownik M., Anisotropic classes of inhomogeneous pseudo–differential symbols, *Collect. Math.*, 2013, **64**: 155–173.

[3] Bownik M., Anisotropic Hardy spaces and wavelets, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2003, **164**(781): 1–122.

[4] Calderón A. P., Torchinsky A., Parabolic maximal functions associated with a distribution, *Adv. Math.*, 1975, **16**(1): 1–64.

[5] Calderón A. P., Vaillancourt R., A class of bounded pseudo-differential operators, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1972, **69**(5): 1185–1187.

[6] Coifman R., Meyer Y., Au delá des opérateurs pseudo–différentiels, Astérisque, 1978, No. 57.

[7] Dahmen W., Dekel S., Petrushev P., Two-level-split decomposition of anisotropic Besov spaces, *Constr. Approx*, 2010, **31**(2): 149–194.

[8] Dekel S., On the analysis of anisotropic smoothness, *J. Approx. Theory*, 2012, **164**(8): 1143–1164.

[9] Dekel S., Han Y. S., Petrushev P., Anisotropic meshless frames on $\mathbb{R}^n$, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2009, **15**(5): 634–662.

[10] Dekel S., Petrushev P., Weissblat T., Hardy spaces on $\mathbb{R}^n$ with pointwise variable anisotropy, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2011, **17**(5): 1066–1107.

[11] Fefferman C., L^p bounds for pseudo-differential operators, *Isr. J. Math.*, 1973, **14**(4): 413–417.

[12] Garello G., Anisotropic pseudodifferential operators of type 1, 1, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1988 **174**(4): 135–160.

[13] Leopold H. G., Boundedness of anisotropic pseudo-differential operators in function spaces of Besov-Hardy-Sobolev type, *Z. Anal. Anwendungen*, 1986, **5**(5): 409–417.

[14] Lin Y., Lu S. Z., Pseudo-differential operators on sobolev and lipschitz spaces, *Acta Math. Sinica, English Series*, 2010, **26**(1): 131–142.

[15] Stein E. M., Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[16] Xiao J. W., Jiang Y. S., Gao W. H., Bilinear pseudo-differential operators on local Hardy spaces, *Acta Math. Sinica, English Series*, 2012, **28**(2): 255–266.