第64卷第5期 数学学报中文版 Vol.64, No.5
2021年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)05-0737-10 **文献标识码:** A

穿孔度量空间 Gromov 双曲性的几何特征

周青山

佛山科学技术学院数学与大数据学院 佛山 528000
E-mail: qszhou1989@163.com

李浏兰

衡阳师范学院数学与统计学院 衡阳 421001
E-mail: lanlimail2012@sina.cn

李希宁

中山大学数学学院 (珠海) 珠海 519082
E-mail: lixining3@mail.sysu.edu.cn

摘　要　本文讨论穿孔度量空间 Gromov 双曲性的几何特征. 对该类空间, 我们证明了一致性, 关于穿孔点的环拟凸性和拟双曲度量的 Gromov 双曲性是互相等价的. 应用这一结果, 给出了一致度量空间中的一个内点可去的充分必要条件.

关键词　穿孔空间; Gromov 双曲空间; 一致空间; 环拟凸性; Gehring–Hayman 不等式
MR(2010) 主题分类　30C65, 30F45, 30C20
中图分类　O177.2

Geometric Characterizations of Gromov Hyperbolicity for Punctured Metric Spaces

Qing Shan ZHOU

School of Mathematics and Big Data, Foshan University, Foshan 528000, *P. R. China*
E-mail: *qszhou*1989*@*163*.com*

Liu Lan LI

College of Mathematics and Statistics, Hengyang Normal University, Hengyang 421001, *P. R. China*
E-mail: *lanlimail*2012*@sina.cn*

收稿日期: 2020-04-16; 接受日期: 2020-08-17
基金项目: 国家自然科学基金青年项目 (11901090); 广东省教育厅项目 (2018KQNCX285, 2018KTSCX245); 湖南省双一流应用特色学科 (湘教通 2018469) 及省重点实验室 (智能信息处理与应用 2016TP1020); 湖南省自然科学基金 (2020JJ6038); 高校基本科研业务费 — 青年教师培育项目 (20lgpy148)
通讯作者: 李希宁

Xi Ning LI

Sun Yat-sen University, School of Mathematics (Zhuhai), Zhuhai 519082, P. R. China
E-mail: *lixining3@mail.sysu.edu.cn*

Abstract We investigate certain geometric characterizations of Gromov hyperbolicity for punctured metric spaces. We show that for such spaces, uniformity, annular quasiconvexity with respect to the punctured point, and Gromov hyperbolicity respecting the quasihyperbolic metric are mutually quantitatively equivalent. As an application, we obtain a sufficient and necessary condition for an interior point in a uniform metric space to be removable.

Keywords punctured spaces; Gromov hyperbolic spaces; uniform spaces; annular quasiconvexity; Gehring–Hayman inequality

MR(2010) Subject Classification 30C65, 30F45, 30C20

Chinese Library Classification O177.2

1 引言

Bonk, Heinonen 和 Koskela [3] 证明了欧氏空间的一致域关于拟双曲度量是 Gromov 双曲的, 这一结论建立了几何函数论和 Gromov 双曲空间的联系; 此外还证明了: 对于一个 Gromov 双曲区域, 局部线性连通性或欧氏边界与 Gromov 边界的拟对称等价性都可推出该区域的一致性, 见文 [3, 定理 1.11 和定理 7.11]. Väisälä [14] 把结论推广到无限维的 Banach 空间. Herron, Shanmugalingam 和 Xie [9] 进一步推广文 [3, 14] 中的结论到预紧度量空间, 并证明: 在环拟凸的前提条件下, Gromov 双曲区域满足度量边界与 Gromov 边界拟莫比乌斯等价一定是一致区域.

此外, Balogh 和 Buckley [1] 证明对于 Ahlfors 正则 Loewner 空间的一个区域, Gehring–Hayman 不等式结合 Bonk, Heinonen 和 Koskela [3] 引进的球分离条件等价于 Gromov 双曲性. 而 Lammi [12] 证明 Gromov 双曲性与 Gehring–Hayman 不等式蕴含内度量边界与 Gromov 边界是互相同胚对应的. 最近, Koskela, Lammi 和 Manojlović [11] 去掉了 Loewner 条件, 并证明 Gehring–Hayman 不等式是 Ahlfors 正则空间 Gromov 双曲性的一个必要条件. 本文的主要目标是探索穿孔空间 Gromov 双曲性的几何特征. 对于这类只有一个边界点的空间, 得到下述结论.

定理 1.1 设 X 是一个局部紧, 可求长连通的有界度量空间且 $\partial X=\{c\}$, 设 k 是 X 的拟双曲度量, 则下列条件互相等价:

(1) X 是 A- 一致的;

(2) X 是 C_1- 拟凸的, 满足 C_2-Gehring–Hayman 不等式, (X,k) 是 δ- 双曲的且关于点 $w\in X$ 是 K- 粗星形的;

(3) X 关于 c 点是 C- 环拟凸的,

其中这些常数是互相依赖的.

注 1.2 (1) Balogh 和 Buckley 在文 [1, 定理 3.1] 中观察到 X 关于拟双曲度量的粗星形性与空间的环拟凸性是相关的, 其他讨论可见文 [2, 9, 14].

(2) 如果 X 是 Ahlfors 正则的, 我们使用文 [11, 定理 5.1] 可以去掉定理 1.1 (2) 中的 Gehring–

Hayman 不等式.

在文 [3, 9, 14] 中, 环拟凸性是许多结论成立的充分条件. 例如, 文 [3, 定理 1.13], 借助欧氏空间的环拟凸性可以证明具有完全不连通边界的区域, 其 Gromov 双曲性与一致性是等价的. 然而, 定理 1.1 说明在讨论只有一个边界点的度量空间情形, 环拟凸性还是必要条件.

定理 1.1 和这一节涉及的术语见本文第 2 节.

如果一致空间关于其上某点是环拟凸的, Buckley 等人在文 [5, 定理 6.6] 中证明去掉这点之后的空间仍然是一致的. 作为定理 1.1 的一个应用, 这种可去性可以特征化环拟凸性, 如下所述.

推论 1.3 设 X 是一个局部紧致、可求长连通的非完备空间且 $c \in X$, 则 $X \setminus \{c\}$ 是 A- 一致的当且仅当 X 是 B- 一致的以及 $\overline{X}$ 关于 c 点是 B- 环拟凸的, 其中常数 A 和 B 互相依赖.

人们非常自然地会考虑有两个边界点的有界空间和只有一个边界点的无界情形. 接下来给出两个例子分别说明, 即使类似于定理 1.1 的结论成立, 相关常数也不是定量的.

例 1.4 设 $\overline{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -n \le x_1 \le n,\ x_2 = 0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, 0 \le x_2 \le 1\}$, $c_1 = (0, 1)$, $c_2 = (n, 0)$, $w = (-n, 0)$ 且 $X = \overline{X} \setminus \{c_1, c_2\}$. 考虑 $\overline{X}$ 上由 $\mathbb{R}^2$ 的欧氏度量诱导的长度度量 d, 显然 (X, d) 是测地的且满足具有常数 $C = 1$ 的 Gehring–Hayman 不等式, (X, k) 是 0- 双曲的以及关于 $w \in X$ 是 0- 粗星形的. 然而, 对于任意的 $A < n$, X 是 n- 一致的但不是 A- 一致的.

例 1.5 设 $\overline{Y} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \ge 0,\ x_2 = 0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = n,\ 0 \le x_2 \le 1\}$, $c = (n, 1)$, $w = (0, 0)$ 且 $Y = \overline{Y} \setminus \{c\}$. 考虑 $\overline{Y}$ 上由 $\mathbb{R}^2$ 的欧氏度量诱导的长度度量 d, 那么 (Y, d) 是测地的且满足具有常数 $C = 1$ 的 Gehring–Hayman 不等式, (Y, k) 是 0- 双曲的以及关于 $w \in X$ 是 0- 粗星形的. 然而, 对于任意的 $A < n$, Y 是 n- 一致的但不是 A- 一致的.

本文第 2 节介绍文章所需的概念和术语. 定理 1.1 和推论 1.3 的证明在第 3 节给出.

2 预备知识

2.1 度量几何

本节介绍度量空间的相关术语, 参考文 [1, 2, 5].

设 $(X, |\cdot|)$ 是一个度量空间, $\overline{X}$ 和 $\partial X := \overline{X} \setminus X$ 分别表示它的度量完备化和度量边界. 若 $\partial X \ne \emptyset$, X 是非完备的并对 $x \in X$, 我们记 $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial X)$. 一个有界集合 $A \subset X$ 的直径记为 $\operatorname{diam}(A)$. 以 x 为中心, 半径为 $r > 0$ 的开 (闭) 球记为

$$B(x, r) = \{z \in X : |z - x| < r\} \ \ (\overline{B}(x, r) = \{z \in X : |z - x| \le r\}),$$

以及度量球面记为

$$S(x, r) = \{z \in X : |z - x| = r\}.$$

而以 x 为中心, 内半径 r 和外半径 R 的环记为

$$A(x; r, R) = \overline{B}(x, R) \setminus B(x, r).$$

若 X 的每一个闭球都是紧的, 则称 X 是预紧的.

一条曲线, 指的是一个连续函数 $\gamma : I = [a, b] \to X$. γ 的长度定义如下:

$$\ell(\gamma) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|\right\},$$

其上确界是对 $[a,b]$ 的任意分解 $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$ 来取. 若 $\ell(\gamma)<\infty$, 则称 γ 是可求长的. γ 在 X 中的像集仍记为 γ, γ 以 x 和 y 为端点的子曲线记为 $\gamma[x,y]$. 若 $\ell(\gamma[x,y])=|x-y|$, 则称 γ 是一条连接 x 到 y 的测地线.

假设曲线 γ 是可求长的, 我们定义长度函数 $s_\gamma:[a,b]\to[0,\ell(\gamma)]$ 为 $s_\gamma(t)=\ell(\gamma[a,t])$. 对任意的可求长曲线 $\gamma:[a,b]\to X$, 存在一条唯一的曲线 $\gamma_s:[0,\ell(\gamma)]\to X$ 满足 $\gamma=\gamma_s\circ s_\gamma$. 显然, 对所有的 $t\in[0,\ell(\gamma)]$, 我们有 $\ell(\gamma_s[0,t])=t$. 这条曲线 γ_s 称为 γ 的弧长参数化. 给定一个 Borel 函数 $\varrho:X\to[0,\infty)$, γ 沿其上的曲线积分定义如下:

$$\int_\gamma \varrho ds=\int_0^{\ell(\gamma)}\varrho\circ\gamma_s(t)dt.$$

设 $A\ge 1$. 若以 x 和 y 为端点的曲线 γ 满足 $\ell(\gamma)\le A\,|x-y|$, 则称 γ 为 A- 拟凸的. 若对于 X 中的任意两点 x 和 y, 都存在一条 A- 拟凸曲线连接它们, 则称 X 是 A- 拟凸的.

若对于 X 中的任意两点 x 和 y, 都存在一条曲线 γ 连接它们, 并满足下述性质:

(1) 对所有的 $z\in\gamma$, $\min\{\ell(\gamma[x,z]),\ell(\gamma[z,y])\}\le A\,d(z)$;

(2) $\ell(\gamma)\le A\,|x-y|$,

则称 X 是 A- 一致的.

设 X 是一个度量空间且 $p\in X$, 并设 $A\ge 1$. 若对于所有的 $r>0$, 以及环 $A(p;r,2r)=\overline{B}(p,2r)\setminus B(p,r)$ 中任意两点 x 和 y, 都存在一条 A- 拟凸曲线 γ 连接它们并落在 $A(p;r/A,2Ar)$ 中, 则称 X 关于 p 点是环拟凸的.

设 X 是一个局部紧致, 可求长连通, 非完备的度量空间, 其上的拟双曲度量 k_X 定义为

$$k_X(x,y)=\inf\left\{\int_\gamma\frac{1}{d(z)}|dz|\right\},$$

其中下确界是对 X 中所有以 x 和 y 为端点的可求长曲线 γ 来取. 若 X 还是 (局部) 拟凸的, 文 [3, 命题 2.8] 表明: X 中的任意两点都存在一条拟双曲测地线连接它们. 下面与拟双曲度量相关的不等式来自于文 [3, 6, 7]:

$$\left|\log\frac{d(x)}{d(y)}\right|\le\log\left(1+\frac{|x-y|}{\min\{d(x),d(y)\}}\right)\le k(x,y). \tag{2.1}$$

此外, 若对 X 中的任意两点 x 和 y, 以及所有连接它们的曲线 γ 都满足

$$\ell([x,y]_k)\le A\,\ell(\gamma),$$

其中 k 是 X 的拟双曲度量以及 $[x,y]_k$ 是连接 x 和 y 的拟双曲测地线, 则称 X 满足具有常数 A 的 Gehring–Hayman 不等式.

2.2 Gromov 双曲空间

这节介绍文 [3, 4, 8] 中与 Gromov 双曲空间相关的符号和术语.

设 (X,d) 是一个度量空间并固定一个基点 $w\in X$.

(1) 对于 $x,y\in X$, x,y 关于 w 的 Gromov 乘积为

$$(x\,|\,y)_w=\frac{1}{2}(d(x,w)+d(y,w)-d(x,y)).$$

(2) 若存在常数 $\delta\ge 0$, 使得对于所有的 x, y, z, $w\in X$ 都满足

$$(x\,|\,y)_w\ge\min\{(x\,|\,z)_w,\,(z\,|\,y)_w\}-\delta,$$

则称 X 是 δ- 双曲的. 若 X 关于某个常数 $\delta \geq 0$ 是 δ- 双曲的, 我们也称 X 是 Gromov 双曲的. 特别地, 若度量空间中具有非空边界的连通开集关于拟双曲度量是 δ- 双曲的, 则称它是 Gromov 双曲区域 [3].

(3) 设 X 是一个 δ- 双曲空间.

(a) 对于 X 中的一个点列 $\{x_i\}$, 当 $i,j \to \infty$ 时, $(x_i\,|\,x_j)_w \to \infty$, 则称它是一个 Gromov 点列.

(b) 当 $i \to \infty$ 时, $(x_i\,|\,y_i)_w \to \infty$, 则称两个点列 $\{x_i\}$ 和 $\{y_j\}$ 是等价的.

(c) X 中 Gromov 点列构成的等价类的集合 $\partial^* X$, 称为 X 的 Gromov 边界. 而 $X^* = X \cup \partial^* X$ 称为 X 的 Gromov 闭包.

定义 2.1 设 X 是一个预紧, 测地的 δ- 双曲空间且 $w \in X$. 若对于每一个 $x \in X$, 都存在某个点 $\xi \in \partial^* X$ 以及一条连接 w 到 ξ 的测地射线 $\gamma = [w, \xi]$ 满足

$$\operatorname{dist}(x, \gamma) \leq K,$$

则称 X 关于 w 是 K- 粗星形的.

3 定理 1.1 和推论 1.3 的证明

在这一部分, 定理 1.1 的证明由若干引理构成.

引理 3.1 设 X 是一个局部紧致、可求长连通的有界度量空间且 $\partial X = \{c\}$. 若 X 是 A- 一致的, 则 X 是 A- 拟凸的, 满足具有常数 C 的 Gehring–Hayman 不等式, (X,k) 是 δ- 双曲的且关于某个点 $w \in X$ 是 K- 粗星形的, 其中常数 C, δ 和 K 只依赖于 A.

证明 显然, X 的 A- 一致性推出 X 是 A- 拟凸的. 由文 [3, 定理 2.10] 可知 X 中的每一条拟双曲测地线都是 C- 一致曲线且常数 C 只依赖于 A. 因此, 满足具有常数 C 的 Gehring–Hayman 不等式. 再由文 [3, 定理 3.6] 可知, (X,k) 是 δ- 双曲的且关于某个点 $w \in X$ 是 K- 粗星形的, 其中常数 δ 和 K 只依赖于 A. 证毕.

引理 3.2 设 X 是一个局部紧致、可求长连通的有界度量空间且 $\partial X = \{c\}$, 并设 k 是 X 的拟双曲度量. 若 X 是 C_1- 拟凸的, 满足具有常数 C_2 的 Gehring–Hayman 不等式, (X,k) 是 δ- 双曲的且关于某个点 $w \in X$ 是 K- 粗星形的, 那么 X 关于点 c 是 C- 环拟凸的且常数 C 只依赖于 C_1, C_2, δ 以及 K.

证明 首先, 我们证明存在一个双射

$$\varphi : \partial^* X \to \partial X,$$

其中 $\partial^* X$ 是 (X,k) 的 Gromov 边界.

取定一点 $\xi \in \partial^* X$. 因为 (X,k) 是预紧的, 由 Arzela–Ascoli 定理可知存在一条拟双曲测地射线 $\gamma : [0,\infty) \to X$ 满足 $\gamma(0) = w$ 以及 $\gamma(\infty) = \xi$, 参考文 [4, 引理 3.2, 428 页]. 接下来证明:

断言 1 $\{\gamma(n)\}$ 收敛到 c 以及拟双曲测地射线 γ 在 c 点终止.

因为 X 是 C_1- 拟凸的, 且满足具有常数 C_2 的 Gehring–Hayman 不等式

$$\ell(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \ell(\gamma[0,n]) \leq \lim_{n\to\infty} C_1 C_2 |w - \gamma(n)| \leq C_1 C_2 \operatorname{diam}(X) < \infty.$$

所以, 当 $n, m \to \infty$ 时,

$$|\gamma(n) - \gamma(m)| \leq \ell(\gamma[n,m]) \to 0.$$

因此, $\{\gamma(n)\}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 并收敛到度量完备化空间 $\overline{X} = X \cup \{c\}$ 中的某点 p. 若 $p \in X$, 则

$$\ell_k(\gamma) = \int_0^{\ell(\gamma)} \frac{dt}{d(\gamma(t))} \le \frac{\ell(\gamma)}{\mathrm{dist}(\gamma, c)} < \infty,$$

显然矛盾. 于是, 断言 1 成立.

注意到 ∂X 只有一个点 c. 如上类似讨论可得, 对于其他任意满足 $\gamma'(\infty) = \xi$ 的拟双曲测地射线 $\gamma' : [0, \infty) \to X$, 当 $n \to \infty$ 时,

$$|\gamma'(n) - c| \to 0.$$

因此, 我们得到了一个映射 $\varphi : \partial^* X \to \partial X$.

因为 $\partial X = \{c\}$, 由断言 1 可以得到如下结论:

断言 2 φ 是满射.

接下来, 我们将证明

断言 3 φ 是单射.

为此, 对于满足 $\varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2)$ 的任意两点 $\xi_1, \xi_2 \in \partial^* X$, 我们需要证明 $\xi_1 = \xi_2$. 先选取一条连接 ξ_1 和 ξ_2 的测地线 $\alpha : \mathbb{R} \to X$, 使得 $\{\alpha(-n)\} \in \xi_1$ 以及 $\{\alpha(n)\} \in \xi_2$. 由断言 1 可知

$$\text{当 } n \to \infty \text{ 时}, \ |\alpha(-n) - c| \to 0 \ \text{ 且 } \ |\alpha(n) - c| \to 0. \tag{3.1}$$

再由 X 的拟凸性, Gehring–Hayman 不等式以及 (3.1), 当 $n \to \infty$ 时, 可得

$$\begin{aligned} \ell(\alpha[-n, n]) &\le C_1 C_2 |\alpha(n) - \alpha(-n)| \\ &\le C_1 C_2 (|\alpha(-n) - c| + |\alpha(n) - c|) \to 0. \end{aligned}$$

于是, $\ell(\alpha) = 0$ 且 $\xi_1 = \xi_2$.

现在我们已证明 $\partial^* X = \{\xi\}$ 以及 $\varphi(\xi) = c$. 接下来, 我们证明 X 关于点 c 是 C- 环拟凸的.

给定 $0 < r \le \mathrm{diam}(X)$ 以及任意两点 $x, y \in A(c; r/2, r)$. 因为 (X, k) 关于点 w 是 K- 粗星形的, 所以存在两条从 w 到 ξ 的测地射线 $\alpha_1, \alpha_2 : [0, \infty) \to X$, 使得

$$\mathrm{dist}_k(x, \alpha_1) \le K \ \text{ 且 } \ \mathrm{dist}_k(y, \alpha_2) \le K. \tag{3.2}$$

再由 Gromov 双曲空间的延拓稳定性定理 (见文 [13, 定理 6.32]), 存在一个只依赖于 δ 的常数 δ', 使得拟双曲 Hausdorff 距离

$$k_{\mathcal{H}}(\alpha_1, \alpha_2) \le \delta'. \tag{3.3}$$

再由 (3.2) 和 (3.3), 存在两点 $x_1, y_1 \in \alpha_1$ 满足

$$k(x, x_1) \le K \ \text{ 且 } \ k(y, y_1) \le K + \delta'. \tag{3.4}$$

取 $t, s \ge 0$ 满足 $x_1 = \alpha_1(t)$ 以及 $y_1 = \alpha_1(s)$. 不失一般性, 我们可以假定 $t \le s$. 接下来验证

$$k(x, y) \le C'. \tag{3.5}$$

由 (2.1) 和 (3.4), 可得

$$\mathrm{e}^{-K} \le \frac{d(x_1)}{d(x)} = \frac{|x_1 - c|}{|x - c|} \le \mathrm{e}^{K} \ \text{ 以及 } \ \mathrm{e}^{-K-\delta'} \le \frac{d(y_1)}{d(y)} = \frac{|y_1 - c|}{|y - c|} \le \mathrm{e}^{K+\delta'}.$$

因为 $x, y \in A(c; r/2, r)$,

$$\frac{r}{2\mathrm{e}^K} \le |x_1 - c| \le \mathrm{e}^K r \quad \text{且} \quad \frac{r}{2\mathrm{e}^{K+\delta'}} \le |y_1 - c| \le \mathrm{e}^{K+\delta'} r.$$

又因为 X 是 C_1- 拟凸的且满足具有常数 C_2 的 Gehring–Hayman 不等式, 所以

$$\ell(\alpha_1[x_1, y_1]) \le C_1 C_2 |x_1 - y_1| \le 2C_1 C_2 \mathrm{e}^{K+\delta'} r, \tag{3.6}$$

并且对所有的 $z \in \alpha_1[x_1, y_1]$,

$$d(z) = |z - c| \ge \frac{\ell(\alpha_1[z, c])}{C_1 C_2} \ge \frac{\ell(\alpha_1[y_1, c])}{C_1 C_2} \ge \frac{|y_1 - c|}{C_1 C_2} \ge \frac{r}{2C_1 C_2 \mathrm{e}^{K+\delta'}}. \tag{3.7}$$

于是, 由 (3.6) 和 (3.7) 可得

$$k(x_1, y_1) = \int_{\alpha_1[x_1, y_1]} \frac{|dz|}{d(z)} \le \frac{2C_1 C_2 \mathrm{e}^{K+\delta'}}{r} \ell(\alpha_1[x_1, y_1]) \le 4C_1^2 C_2^2 \mathrm{e}^{2K+2\delta'}.$$

再由 (3.4) 可得

$$k(x, y) \le k(x, x_1) + k(x_1, y_1) + k(y_1, y) \le 2K + \delta' + 4C_1^2 C_2^2 \mathrm{e}^{2K+2\delta'}.$$

令

$$C' = 2K + \delta' + 4C_1^2 C_2^2 \mathrm{e}^{2K+2\delta'},$$

(3.5) 得证.

最后, 我们取一条连接 x 和 y 的拟双曲测地线 β, 只需证明 β 是拟凸曲线.

一方面, 由 X 的拟凸性和 Gehring–Hayman 不等式, 可得

$$\ell(\beta) \le C_1 C_2 |x - y| \le 2C_1 C_2 r. \tag{3.8}$$

另一方面, 对所有的 $v \in \beta$, 都有

$$|v - c| \le |x - c| + \ell(\beta) \le (1 + 2C_1 C_2) r. \tag{3.9}$$

再由 (2.1) 和 (3.5), 可得

$$\left| \log \frac{d(v)}{d(x)} \right| \le k(v, x) \le \ell_k(\beta) = k(x, y) \le C',$$

于是

$$|v - c| = d(v) \ge \frac{d(x)}{\mathrm{e}^{C'}} \ge \frac{r}{2\mathrm{e}^{C'}}. \tag{3.10}$$

我们从 (3.8), (3.9) 及 (3.10) 可知 β 是一条 C_1C_2- 拟凸曲线且包含在 $A\big(c; \frac{r}{2\mathrm{e}^{C'}}, (1 + 2C_1C_2) r\big)$ 中, 其中 $C' = 2K + \delta' + 4C_1^2 C_2^2 \mathrm{e}^{2K+2\delta'}$. 令 $C = 2\mathrm{e}^{C'}$, 因此 X 关于点 c 是 C- 环拟凸的. 证毕.

引理 3.3 设 X 是一个局部紧致、可求长连通的有界度量空间且 $\partial X = \{c\}$. 若 X 关于点 c 是 C- 环拟凸的, 那么 X 是 A- 一致的且常数 A 只依赖于 C.

证明 首先注意到对所有的点 $p \in X$, $d(p) = |p - c|$. 对任意的 $x, y \in X$, 令 $t = |x - c|$ 以及 $s = |y - c|$. 我们只需在 X 中寻找一条连接 x 和 y 的一致曲线.

不失一般性, 我们不妨假定 $t \le s$. 若 $s \le 2t$, 则

$$x, y \in A(c; t, 2t) \quad \text{且} \quad |x - y| \le |x - c| + |y - c| \le 3t.$$

因为 X 关于点 c 是 C- 环拟凸的, 存在一条曲线 $\gamma \subseteq A(c; t/C, 2Ct)$ 连接 x 和 y, 且对所有的 $z \in \gamma$, 都有

$$\ell(\gamma) \leq C|x-y| \leq 3Ct \leq 3C^2 d(z).$$

此时, γ 就是所需的一致曲线.

若 $s > 2t$, 存在一个正整数 $n \geq 1$, 使得

$$2^n t < s \leq 2^{n+1} t.$$

因为 X 是可求长连通的, 存在一条连接 x 和 y 的可求长曲线 α, 且满足

$$\alpha \cap S(c, 2^i t) \neq \emptyset, \quad 1 \leq i \leq n.$$

对每一个正整数 $1 \leq i \leq n$, 选取一点 $z_i \in \alpha \cap S(c, 2^i t)$. 令 $x = z_0$ 和 $y = z_{n+1}$. 因为 X 关于点 c 是 C- 环拟凸的, 存在一条连接 z_i 和 z_{i+1} 的曲线 $\alpha_i \subseteq A(c; 2^i t/C, 2^{i+1} Ct)$, 满足

$$\ell(\alpha_i) \leq C|z_i - z_{i+1}|, \quad 0 \leq i \leq n. \tag{3.11}$$

令 $\beta = \bigcup_{i=0}^n \alpha_i$. 那么 x 和 y 刚好是曲线 β 的两个端点. 接下来证明 β 是一致的.

一方面, 由

$$|x-y| \geq |y-c| - |x-c| > (2^n - 1)t$$

以及 (3.11) 可得

$$\ell(\beta) = \sum_{i=0}^n \ell(\alpha_i) \leq C \sum_{i=0}^n |z_i - z_{i+1}| \leq 3Ct \sum_{i=0}^n 2^i \leq 3Ct \cdot 2^{n+1} \leq 12C|x-y|;$$

另一方面, 对每一个点 $z \in \beta$ 存在正整数 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, 使得 $z \in \alpha_k$. 因此

$$d(z) = |z-c| > \frac{2^k t}{C},$$

且

$$\ell(\beta[x,z]) \leq \sum_{i=0}^k \ell(\alpha_i) \leq 3Ct \cdot 2^{k+1} \leq 6C^2 d(z).$$

所以, β 是 A- 一致的且 $A = 12C^2$. 证毕.

定理 1.1 的证明 显然, 我们可以从引理 3.1, 3.2 及 3.3 得到定理 1.1.

推论 1.3 的证明 充分性可由文 [5, 定理 6.6] 得到, 所以只需证明必要性.

假设 $X \setminus \{c\}$ 是 A- 一致的. 我们的证明分两种情形讨论. 首先, 考虑 X 是有界的情形:

断言 4 存在一个常数 $C > 1$, 使得 X 是 C- 一致的.

任意给定两点 $x, y \in X$. 若 $c \notin \{x, y\}$, 我们在 $X \setminus \{c\}$ 中选取一条 A- 一致曲线 γ 连接 x 和 y. 因为对所有的 $z \in X \setminus \{c\}$,

$$\operatorname{dist}(z, \partial X \cup \{c\}) \leq \operatorname{dist}(z, \partial X),$$

所以 γ 也是 X 中的一条 A- 一致曲线.

若 $c \in \{x, y\}$, 不失一般性我们假定 $y = c$. 注意到 $(X \setminus \{c\}, k_c)$ 是一个预紧测地空间, 其中 k_c 是 $X \setminus \{c\}$ 的拟双曲度量. 因为 $X \setminus \{c\}$ 是 A- 一致的, 由文 [3, 命题 3.12 (b)] 可知, 存在一条

连接 x 到 c 的拟双曲测地射线 $\alpha:[0,\infty)\to X$, 且它也是 $X\setminus\{c\}$ 中的一条 C- 一致曲线, 其中常数 C 只依赖于 A. 因为对所有的 $z\in X\setminus\{c\}$,

$$\operatorname{dist}(z,\partial X\cup\{c\})\le\operatorname{dist}(z,\partial X),$$

所以 α 也是 X 中的 C- 一致曲线. 于是, 断言 4 得证.

现在我们验证:

断言 5 $\overline{X}$ 关于点 c 是 B- 环拟凸的.

记 $Y=\overline{X}\setminus\{c\}$, 那么 $\partial Y=\{c\}$. 由定理 1.1, 只需证明 Y 是 C- 一致的.

任意给定两点 $x,y\in Y$. 若 $\{x,y\}\subseteq X\setminus\{c\}$, 在 $X\setminus\{c\}$ 中选取一条 A- 一致曲线 β 连接 x 到 y. 因为对所有的 $z\in X\setminus\{c\}$,

$$\operatorname{dist}(z,\partial X\cup\{c\})\le|z-c|=\operatorname{dist}(z,\partial Y),$$

所以 β 也是 Y 中的一条 A- 一致曲线.

若 $\{x,y\}\nsubseteq X\setminus\{c\}$, 我们只考虑 $x,y\in\partial X$ 都在边界这种情形, 因为其中一个点在边界的情形可以用类似的方法处理. 因为 $X\setminus\{c\}$ 是 A- 一致的, 由文 [3, 命题 3.12 (d)] 可知, 存在一条连接 x 和 y 的拟双曲测地线 $\sigma:\mathbb{R}\to X$, 且它是 $X\setminus\{c\}$ 中的 C- 一致曲线, 其中常数 C 只依赖于 A. 再由

$$\operatorname{dist}(z,\partial X\cup\{c\})\le\operatorname{dist}(z,\partial Y)$$

可知, σ 也是 Y 中的一条 C- 一致曲线.

接下来考虑 X 是无界的情形. 选取一个基点 $a\in\partial X$. 在文 [5] 中

$$d_a(x,y)=d_a(y,x)=\frac{|x-y|}{\big(1+|x-a|\big)\big(1+|y-a|\big)},\quad x,y\in\overline{X},$$

以及

$$\widehat{d}_a(x,y)=\inf\left\{\sum_{j=0}^{k}d_a(x_j,x_{j+1})\right\},\quad x,y\in\overline{X},$$

其中下确界是对 $\overline{X}$ 中所有有限点列

$$x=x_0,x_1,\dots,x_k,x_{k+1}=y$$

来取. 这样得到的空间 $(\overline{X},\widehat{d}_a)$ 是一个有界度量空间并被称为 $\overline{X}$ 关于点 a 的球面化. 对每一个子集 $P\subseteq\overline{X}$, 我们记 P 关于点 a 的球面化空间为

$$S_a(P)=(P,\widehat{d}_a).$$

因为 $X\setminus\{c\}$ 是一个无界的 A- 一致空间, 由文 [5, 定理 5.5] 可知, $S_a(X\setminus\{c\})$ 是一个有界的 A_1- 一致空间且 $A_1=A_1(A)$. 于是由断言 4 和 5, $S_a(X)$ 是 C_1- 一致的且 $S_a(\overline{X})$ 关于点 c 是 C_1- 环拟凸的且 $C_1=C_1(A_1)$. 再由文 [5, 命题 6.3], $S_a(\overline{X})$ 是 $(9C_1)$- 拟凸的. 因此, 我们由文 [5, 定理 5.5 和定理 6.5] 可知, X 是 B'- 一致的以及 $\overline{X}$ 关于点 c 是 B'- 环拟凸的, 其中 $B'=B'(C_1)=B'(A)$.

致谢 感谢 Shanmugalingam 教授的鼓励与帮助.

参 考 文 献

[1] Balogh Z. M., Buckley S. M., Geometric characterizations of Gromov hyperbolicity, *Invent. Math.*, 2003, **153**: 261–301.

[2] Bjorn A., Bjorn J., Shanmugalingam N., Bounded geometry and p-harmonic functions under uniformization and hyperbolization, arXiv: 1908.04644, 2019.

[3] Bonk M., Heinonen J., Koskela P., Uniformizing Gromov hyperbolic spaces, *Asterisque*, 2001, **270**: 1–99.

[4] Bridson M. R., Haefliger A., Metric Spaces of Non-positive Curvature, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[5] Buckley S. M., Herron D., Xie X., Metric space inversions, quasihyperbolic distance, and uniform spaces, *Indiana Univ. Math. J.*, 2008, **57**: 837–890.

[6] Gehring F. W., Osgood B. G., Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric, *J. Analyse Math.,* 1979, **36**: 50–74.

[7] Gehring F. W., Palka B. P., Quasiconformally homogeneous domains, *J. Analyse Math.,* 1976, **30**: 172–199.

[8] Gromov M., Hyperbolic groups, In: Essays in Group Theory, 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., Vol. 8, Springer, New York, 1987.

[9] Herron D., Shanmugalingam N., Xie X., Uniformity from Gromov hyperbolicity, *Illinois J. Math.,* 2008, **52**: 1065-1109.

[10] Koskela P., Lammi P., Gehring–Hayman Theorem for conformal deformations, *Comment Math. Helv.*, 2013, **88**: 185–203.

[11] Koskela P., Lammi P., Manojlović V., Gromov hyperbolicity and quasihyperbolic geodesics, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér*, 2014, **47**: 975–990.

[12] Lammi P., Quasihyperbolic boundary condition: compactness of the inner boundary, *Illinois J. Math.*, 2011, **55**: 1221–1233.

[13] Väisälä J., Gromov hyperbolic spaces, *Expo. Math.*, 2005, **23**: 187–231.

[14] Väisälä J., Hyperbolic and uniform domains in Banach spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2005, **30**: 261–302.