第64卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.64, No.5
2021年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)05-0721-16 **文献标识码: A**

带有某种遗传特征的非经典反应扩散方程的渐近行为

朱凯旋

洞庭湖生态经济区建设与发展湖南省协调创新中心
& 湖南文理学院数理学院 常德 415000
E-mail: zhukx12@163.com

谢永钦 张江卫

长沙理工大学数学与统计学院 长沙 410114
E-mail: xieyq@csust.edu.cn; zjwmath@163.com

摘 要 本文证明带有时滞项 $g(t,u_t)$ 的非经典反应扩散方程在依赖于时间的空间中拉回吸引子的存在性, 其中外力项 $k(x)\in H^{-1}(\Omega)$, 非线性项 f 分别满足临界指数增长和任意 $q-1$ $(q\geq 2)$ 次多项式增长.

关键词 非经典反应扩散方程; 时滞; 临界指数增长; 任意次多项式增长; 拉回吸引子
MR(2010) 主题分类 35R10, 35B40, 35B41
中图分类 O193

Asymptotic Behavior of the Nonclassical Reaction-diffusion Equations Containing some Hereditary Characteristic

Kai Xuan ZHU

Hunan Province Cooperative Innovation Center for the Construction and Development of Dongting Lake Ecological Economic Zone, College of Mathematics and Physics Science, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000*, P. R. China*
E-mail: *zhukx*12*@*163*.com*

Yong Qin XIE Jiang Wei ZHANG

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114*, P. R. China*
E-mail: *xieyq@csust.edu.cn*; *zjwmath@163.com*

Abstract We prove the existence of the pullback attractors in the time-dependent space for the nonclassical reaction-diffusion equations with delay term $g(t,u_t)$, the

收稿日期: 2020-02-13; 接受日期: 2020-08-17
基金项目: 湖南省自然科学基金 (2018JJ2416) 及湖南省教育厅科学研究基金 (20C1263);
湖南文理学院科技创新团队资助项目 (数值计算与随机过程及其应用)
通讯作者: 朱凯旋

forcing term $k(x) \in H^{-1}(\Omega)$ and the nonlinearity f satisfying the critical exponent growth and the polynomial growth of arbitrary $q-1$ $(q \geq 2)$ order.

Keywords nonclassical reaction-diffusion equations; delays; critical exponent growth; polynomial growth of arbitrary order; pullback attractors
MR(2010) Subject Classification 35R10, 35B40, 35B41
Chinese Library Classification O193

1 引言

本文研究如下带有时滞项的非经典反应扩散方程在依赖于时间的空间中解的渐近行为:

$$\begin{cases} \partial_t u - \varepsilon(t)\partial_t \Delta u - \Delta u + f(u) = g(t, u_t) + k(x), & (x,t) \in \Omega \times (\tau, \infty), \\ u(x,\, t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (\tau, \infty), \\ u(x,\, \tau+\theta) = \phi(x,\theta), & x \in \Omega,\ \theta \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 是具有光滑边界的有界域, $\tau \in \mathbb{R}$ 是初始时间, $\varepsilon(t) \in C^1(\mathbb{R})$ 是一个递减有界函数且满足

$$\lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = 0 \tag{1.2}$$

和

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left(|\varepsilon(t)| + |\varepsilon'(t)|\right) \leq L, \tag{1.3}$$

其中常数 $L > 0$. $f(\cdot)$ 是非线性项, $g(\cdot,\cdot)$ 是时滞项, 外力项 $k(\cdot) \in H^{-1}(\Omega)$, $\phi \in C^0([-h,0]; \mathscr{H}_\tau)$ 是初值, $h(>0)$ 是时滞影响的长度. 对任意的 $t \geq \tau$, u_t 是定义在 $[-h, 0]$ 上且满足 $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$ 的函数.

我们分别用 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|_2$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积和范数, $((\cdot,\cdot)) = (\nabla\cdot, \nabla\cdot)$ 和 $\|\nabla \cdot\|_2$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 中的内积和范数, 用 C_X 表示 Banach 空间 $C^0([-h,0]; X)$, 并赋予上确界模. 对任意的 $u \in C_X$, 其范数表示为 $\|u\|_{C_X} = \max_{t \in [-h,0]} \|u(t)\|_X$.

对于时滞项 $g(\cdot,\cdot)$, 类似于文 [11], 我们假设 $g: \mathbb{R} \times C_{L^2(\Omega)} \to L^2(\Omega)$, 且满足:

(I) $\forall \xi \in C_{L^2(\Omega)}$, 函数 $g(t,\xi) \in L^2(\Omega)$ 关于时间 $t \in \mathbb{R}$ 可测;

(II) $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t, 0) = 0$;

(III) $\forall t \in \mathbb{R}$ 和 $\forall \xi_1, \xi_2 \in C_{L^2(\Omega)}$, $\exists$ 常数 $L_g > 0$, 使得

$$\|g(t,\xi_1) - g(t,\xi_2)\|_2 \leq L_g \|\xi_1 - \xi_2\|_{C_{L^2(\Omega)}}.$$

对于方程 (1.1), 当 $\varepsilon(t) = 0$ 时, (1.1) 变成带有时滞项的反应扩散方程. 对于带有时滞项的反应扩散方程解的渐近行为, 当非线性项 f 满足任意次多项式增长时, 已有一些成果 [11, 30]. 在文 [11] 中, García-Luengo 和 Marín-Rubio 证明了解的适定性并利用能量方法 [3] 和 $C_{L^2(\Omega)}$ 中拉回吸引子的存在性. 在文 [30] 中, 我们利用渐近先验估计方法 [26] 得到 $C_{L^p(\Omega)}$ $(p > 2)$ 中拉回吸引子的存在性. 当 $\varepsilon(t) = 1$ 时, 方程 (1.1) 就是带有时滞项的非经典反应扩散方程. 对于带有时滞项的非经典反应扩散方程, 其解的渐近行为也有一些成果 [4, 14, 28]. 在文 [4] 中, Caraballo 和 Márquez-Durán 对于线性增长情形证明了解的适定性. 在文 [14] 中, Hu 和 Wang 考虑了线性增长情形并证明了 $C_{H_0^1(\Omega)}$ 中拉回吸引子的存在性. 当非线性项 f 满足临界指数增长和任意 $p-1$ $(p \geq 2)$ 次

多项式增长时, 我们分别利用分解技巧 [22, 25] 和收缩函数的思想 [8, 15, 16, 18, 21, 24, 27, 29] 证明了 $C_{H_0^1(\Omega)}$ 中拉回吸引子的存在性. 当 $\varepsilon(t) \in C^1(\mathbb{R})$ 满足 (1.2), (1.3) 时, Caraballo, Márquez-Durán 和 Rivero 对其解的渐近行为进行了研究, 并取得了一些研究成果 [5, 6]. 在文 [5] 中, 当非线性项 f 满足次临界增长时, 他们证明了解的适定性和 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中拉回吸引子的存在性. 而且, 对于无界时滞的情形, 他们在文 [6] 中证明了 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中拉回吸引子的存在性.

基于文献 [5, 6] 已有的研究成果, 本文考虑方程 (1.1) 解的渐近行为, 其中非线性项 f 满足临界指数增长和任意 $q-1$ $(q \geq 2)$ 次多项式增长, 这将给我们验证解过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 的渐近紧性带来更大的困难. 一方面, 非线性项 f 满足临界指数增长和任意 $q-1$ $(q \geq 2)$ 次多项式增长, 这导致 Sobolev 紧嵌入不再成立. 另一方面, 方程 (1.1) 带有时滞项 $g(t, u_t)$, 这使得我们所研究问题的相空间是 Banach 空间 C_X 而不是 Banach 空间 X. 在空间 C_X 中, 一些已有的验证过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 紧性的方法和技巧不再适用. 为了证明 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中拉回吸引子的存在性, 我们在第 3 节利用分解技巧克服临界指数带来的困难并得到 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中拉回吸引子 $\hat{\mathscr{A}}$ 的存在性 (见定理 3.10). 在第 4 节, 当非线性项 f 满足任意 $q-1$ $(q \geq 2)$ 次多项式增长时, 我们利用收缩函数方法证明 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中拉回吸引子 $\hat{\mathscr{A}_1}$ 的存在性 (见定理 4.6).

2 预备知识

本节给出依赖于时间的吸引子的一些基本概念和结果 [9, 10, 18].

设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一族赋范空间, 记 X_t 的半径为 R 的球为

$$\mathbb{B}_t(R) = \{z \in X_t : \|z\|_{X_t} \leq R\}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 集合 $B \subset X_t$ 的 ϵ- 邻域记为

$$\mathscr{O}_t^{\epsilon}(B) = \bigcup_{x\in B}\{y \in X_t : \|x-y\|_{X_t} < \epsilon\} = \bigcup_{x\in B}\{x + \mathbb{B}_t(\epsilon)\}.$$

两个非空集合 $B, C \subset X_t$ 的 Hausdorff 半距离记为

$$\delta_t(B,C) = \sup_{x\in B}\inf_{y\in C}\|x-y\|_{X_t}.$$

设 $A = -\Delta$, 则 $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. 对任意的 $0 \leq \sigma \leq 2$, 定义

$$H^{\sigma} = D(A^{\sigma/2}), \quad (u,v)_{\sigma} = (A^{\sigma/2}u, A^{\sigma/2}v), \quad \|u\|_{\sigma} = \|A^{\sigma/2}u\|_2.$$

对任意的 $t \in \mathbb{R}$ 和 $-1 \leq \sigma \leq 1$, 定义依赖于时间的空间 $\mathscr{H}_t^{\sigma} = H^{1+\sigma}(\Omega)$, 并赋予范数

$$\|u\|^2_{\mathscr{H}_t^{\sigma}} = \|u\|^2_{H^{\sigma}} + \varepsilon(t)\|u\|^2_{H^{1+\sigma}}.$$

当 $\sigma = 0$ 时, 上式中的 σ 省去不写. 特别地, 有

$$\mathscr{H}_t^{-1} = H = L^2(\Omega), \quad \mathscr{H}_t = H^1 \ \text{ 且 } \ \|u\|^2_{\mathscr{H}_t} = \|u\|_2^2 + \varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2,$$

从而有紧嵌入 $\mathscr{H}_t^{\sigma} \hookrightarrow \mathscr{H}_t$ $(0 < \sigma \leq 1)$, 其中嵌入常数与 $t \in \mathbb{R}$ 无关.

定义 2.1 设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一族赋范空间. 如果一个双参数映射 $U(t,\tau): X_\tau \to X_t$, $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$ 满足:

(1) $U(\tau,\tau) = \mathrm{Id}$ 是 X_τ, $\tau \in \mathbb{R}$ 上的恒等算子;

(2) $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau)$, $\forall\, t \geq s \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$,

则称 $U(t,\tau)$ 是一个过程.

定义 2.2 若有界集族 $\hat{C}=\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, $C_t\subset X_t$ 满足对任给的 $t\in\mathbb{R}$, 存在常数 $R>0$, 使得 $C_t\subset\mathbb{B}_t(R)$, 则称有界集族 $\hat{C}=\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 一致有界.

定义 2.3 若集合族 $\hat{B}=\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 一致有界且对任给的 $R>0$, 存在 $t_0=t_0(t,R)\leq t$, 使得对任给的 $\tau\leq t_0$ 有 $U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R)\subset B_t$, 则称集合族 $\hat{B}=\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是拉回吸收集.

定义 2.4 过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 的依赖于时间的全局吸引子是一个最小集族 $\hat{\mathscr{A}}=\{\mathscr{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, 且满足:

(1) $\mathscr{A}_t$ 在 X_t 中紧;

(2) $\hat{\mathscr{A}}$ 在 X_t 中不变, 即 $U(t,\tau)\mathscr{A}_\tau=\mathscr{A}_t$, $\forall\, t\geq\tau$;

(3) $\hat{\mathscr{A}}$ 拉回吸引, 即 $\hat{\mathscr{A}}$ 一致有界且对任意的一致有界集族 $\hat{C}=\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和任意的 $t\in\mathbb{R}$,有

$$\lim_{\tau\to-\infty}\delta_t(U(t,\tau)C_\tau,\mathscr{A}_t)=0.$$

当方程 (1.1) 的非线性项 f 满足 (3.1), (3.2) 时, 类似于文 [2, 7, 12, 23], 我们需要下面的结论来证明在依赖于时间的空间中拉回吸引子的存在性.

定义 2.5 设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 是 Banach 空间 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中的过程. 若对任给的 $t\in\mathbb{R}$, 有界集 $B_\tau\subset X_\tau$, 存在一个与 B_τ 相关的紧集 $K_1(B_\tau)$, 使得

$$\operatorname*{dist}_{\tau\to-\infty}(U(t,\tau)B_\tau,K_1)=0,$$

则称过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 X_t 中拉回渐近光滑.

引理 2.6 设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 是 Banach 空间 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中的过程, $\hat{B}=\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 的拉回吸收集. 若 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 满足:

$$U(t,\tau)=D(t,\tau)+K(t,\tau),\quad\forall\, t\geq\tau,$$

且

(1) $\lim_{\tau\to-\infty}\|D(t,\tau)B_\tau\|_{X_t}=0$;

(2) 存在序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset B_{\tau_n}$, 使得 $\{K(t,\tau_n)x_n\}$ 在 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中存在收敛子列,

则 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中拉回渐近光滑.

引理 2.7 [20] 设 X 和 Y 是两个满足紧嵌入 $X\hookrightarrow Y$ 的 Banach 空间, 集合 Z 在 $W^{s_0,r_0}_{\rm loc}(\tau,T;X)\cap\dot{W}^{s,r}(\tau,T;Y)$ 中有界, 其中 $s>0$, $1\leq r\leq\infty$, $s_0\in\mathbb{R}$, $1\leq r_0\leq\infty$, 则

(1) 若 $p<r^*=\frac{r}{1-sr}$ 且 $s\leq\frac{1}{r}$, 则 Z 在 $L^p(\tau,T;Y)$ 中列紧;

(2) 若 $s>\frac{1}{r}$, 则 Z 在 $C([\tau,T];Y)$ 中列紧.

定理 2.8 设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 是 Banach 空间 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中的过程, 若

(1) $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中存在拉回吸收集 $\hat{B}=\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$;

(2) $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中拉回渐近光滑,

则 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中存在拉回吸引子.

当方程 (1.1) 的非线性项 f 满足 (4.1), (4.2) 时, 我们需要下面的结论来证明在依赖于时间的空间中拉回吸引子的存在性.

定义 2.9 [18] 设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 是 Banach 空间 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中的过程. 若对任给的 $t\in\mathbb{R}$, 有界序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X_{\tau_n}$ 和序列 $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$(当 $n\to\infty$ 时 $\tau_n\to-\infty$), 序列 $\{U(t,\tau_n)x_n\}_{n=1}^\infty$ 在 X_t 中存在收敛子列, 则称过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 X_t 中拉回渐近紧.

定义 2.10 [18] 设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一族 Banach 空间, $\hat{C}=\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中的一族一致有界子集. $\psi_\tau^t(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $X_t\times X_t$ 上的函数, 若对任意给的 $t\in\mathbb{R}$ 和任意的 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset C_t$, 存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\psi_\tau^t(x_{n_k},x_{n_l})=0,\quad \forall\, t\geq\tau,$$

则称 $\psi_\tau^t(\cdot,\cdot)$ 是 $C_t\times C_t$ 上的收缩函数.

记 $C_t\times C_t$ 上的收缩函数所组成的集合为 $\mathrm{Contr}(C_t)$.

引理 2.11 [18] 设$\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$是Banach 空间$\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$中的过程, $\hat{B}=\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$是 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 的拉回吸收集. 若对任给的 $\epsilon>0$ 和任意的 $t\in\mathbb{R}$, 存在 $\tau_0=\tau_0(\epsilon)<t$ 和 $\psi_{\tau_0}^t(\cdot,\cdot)\in\mathrm{Contr}(B_{\tau_0})$, 使得

$$\|U(t,\tau_0)x-U(t,\tau_0)y\|_{X_t}\leq\epsilon+\psi_{\tau_0}^t(x,y),\quad \forall\, x,y\in B_{\tau_0},$$

则 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中拉回渐近紧.

定理 2.12 [18] 设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 是 Banach 空间 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中的过程, 若

(1) $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中存在拉回吸收集 $\hat{B}=\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$;

(2) $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中拉回渐近紧,

则 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中存在拉回吸引子.

3 临界非线性增长情形

这一部分, 假设非线性项 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=0$ 和下述条件:

$$\liminf_{|u|\to\infty}\frac{f(u)}{u}>-\lambda_1, \tag{3.1}$$

且

$$|f'(u)|\leq C(1+|u|^{\frac{4}{n-2}}),\quad \forall\, u\in\mathbb{R}, \tag{3.2}$$

其中 λ_1 是 $-\Delta$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的第一特征值.

由文 [1], 我们分解 f 为: $f=f_0+f_1$, 其中 $f_0,f_1\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 且满足

$$|f_0(u)|\leq C(|u|+|u|^{(n+2)/(n-2)}),\quad \forall\, u\in\mathbb{R}, \tag{3.3}$$

$$f_0(u)u\geq 0,\quad \forall\, u\in\mathbb{R}, \tag{3.4}$$

$$|f_1(u)|\leq C(1+|u|^\gamma),\quad \forall\, u\in\mathbb{R},\ 其中\ \gamma<\frac{n+2}{n-2}, \tag{3.5}$$

$$\liminf_{|u|\to\infty}\frac{f_1(u)}{u}>-\lambda_1. \tag{3.6}$$

记

$$\sigma=\min\left\{\frac{1}{4},\frac{n+2-(n-2)\gamma}{2}\right\}. \tag{3.7}$$

下面给出方程 (1.1) 满足条件 (3.1), (3.2) 时解的存在性和唯一性, 首先定义弱解如下.

定义 3.1 若函数 $u\in C([\tau-h,T];\mathscr{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega))$ 满足当 $t\in[\tau-h,\tau]$ 时, $u(t)=\phi(t-\tau)$, 且对任意的 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}[(u(t),\varphi)+\varepsilon(t)(\nabla u(t),\nabla\varphi)]+(1-\varepsilon'(t))(\nabla u(t),\nabla\varphi)+(f(u(t)),\varphi)\\&\quad=(g(t,u_t),\varphi)+(k(x),\varphi)\end{aligned}$$

在 $\mathscr{D}'(\tau,+\infty)$ 中成立, 则称 u 是方程 (1.1) 的弱解.

下述定理由 Faedo–Galerkin 逼近得到, 它给出弱解的存在性和唯一性, 这里只陈述结果.

定理 3.2 设 f 满足 (3.1), (3.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot)\in H^{-1}(\Omega)$, $\phi\in C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau\in\mathbb{R}$, 则方程 (1.1) 存在唯一的弱解 $u(\cdot)=u(\cdot,\tau;\phi)$, 使得

$$u\in C([\tau-h,T];\mathscr{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega)),\quad \partial_t u\in L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega)),\quad \forall T>\tau.$$

而且, 弱解 $u(\cdot)=u(\cdot,\tau;\phi)$ 连续依赖于初值 $\phi\in C_{H_\tau}$.

因此, 我们在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中定义过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 为:

$$U(t,\tau):C_{\mathscr{H}_\tau}\to C_{\mathscr{H}_t},\quad U(t,\tau)\phi:=u(t,\tau;\phi)=u(t),\quad \forall t\geq\tau.$$

下面用 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 表示当非线性项 f 满足 (3.1), (3.2) 时, 方程 (1.1) 的解所生成的过程.

下述定理表明过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中存在拉回吸收集.

定理 3.3 设 f 满足 (3.1), (3.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot)\in H^{-1}(\Omega)$, $\phi\in\mathbb{B}_\tau(R_0)\subset C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau\in\mathbb{R}$, 则过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中存在拉回吸收集 $\hat{B}=\{B_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$, 其中常数 $R_0>0$.

证明 方程 (1.1) 两边同乘以 $u(t)$ 并关于 $x\in\Omega$ 积分, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)+\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\right)\|\nabla u\|_2^2+(f(u),u)=(g(t,u_t),u)+(k(x),u).$$

由 (3.1), Hölder 不等式和假设 (III), 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)+\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\right)\|\nabla u\|_2^2-(\lambda_1-\delta)\|u\|_2^2-C_0|\Omega|\\&\quad\leq L_g\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\frac{\lambda_1}{2\delta}\|k\|_{H^{-1}}^2+\frac{\delta}{2\lambda_1}\|\nabla u\|_2^2,\end{aligned}$$

其中常数 $0<\delta\ll 1$.

再由 (1.2), (1.3) 和 Poincaré 不等式, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)+\frac{\delta}{\lambda_1(1+L)}(\lambda_1\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)\\&\quad\leq 2C_0|\Omega|+2L_g\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|_{H^{-1}}^2.\end{aligned}$$

设 $\lambda=\min\{\lambda_1,1\}$, 则存在 $\beta=\frac{\lambda\delta}{\lambda_1(1+L)}$, 使得

$$\frac{d}{dt}(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)+\beta(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)\leq 2C_0|\Omega|+2L_g\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|_{H^{-1}}^2. \tag{3.8}$$

在 (3.8) 两边同乘以 $\mathrm{e}^{\beta t}$ 并在 $[\tau,t]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}(\|u(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u(t)\|_2^2)\mathrm{e}^{\beta t}&\leq(\|u(\tau)\|_2^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla u(\tau)\|_2^2)\mathrm{e}^{\beta\tau}+2C_0|\Omega|\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta s}ds\\&\quad+2L_g\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta s}\|u_s\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2ds+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|_{H^{-1}}^2\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta s}ds,\quad\forall t\geq\tau.\end{aligned}$$

特别地, 用 $t+\theta$ 代替 t, 其中 $\theta\in[-h,0]$, 可得

$$\begin{aligned}&(\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(t)\|\nabla u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)\mathrm{e}^{\beta t}\\&\quad\leq(\|\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)\mathrm{e}^{\beta(h+\tau)}+2L_g\mathrm{e}^{\beta h}\int_\tau^t\|u_s\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\mathrm{e}^{\beta s}ds\\&\qquad+\left(2C_0|\Omega|+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|_{H^{-1}}^2\right)\mathrm{e}^{\beta h}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta s}ds.\end{aligned}\tag{3.9}$$

从而

$$\|u_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\mathrm{e}^{\beta t}\le(\|\phi\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|^2_{C_{L^2(\Omega)}})\mathrm{e}^{\beta(h+\tau)}$$
$$+2L_g\mathrm{e}^{\beta h}\int_\tau^t\|u_s\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\mathrm{e}^{\beta s}ds+\left(2C_0|\Omega|+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|^2_{H^{-1}}\right)\mathrm{e}^{\beta h}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta s}ds.$$

对上式应用 Gronwall 引理得

$$\|u_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\mathrm{e}^{\beta t}\le(\|\phi\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|^2_{C_{L^2(\Omega)}})\mathrm{e}^{\beta(h+\tau)}\mathrm{e}^{2L_g\mathrm{e}^{\beta h}(t-\tau)}$$
$$+\frac{1}{\alpha}\left(2C_0|\Omega|+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|^2_{H^{-1}}\right)\mathrm{e}^{\beta h}\mathrm{e}^{\beta t},\tag{3.10}$$

其中 $\alpha=\beta-2L_g\mathrm{e}^{\beta h}$.

将 (3.10) 代入 (3.9), 可得

$$\|u_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\varepsilon(t)\|\nabla u_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\le(\|\phi\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|^2_{C_{L^2(\Omega)}})\mathrm{e}^{\beta h}(\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}+\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)})$$
$$+\left(2C_0|\Omega|+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|^2_{H^{-1}}\right)\frac{2L_g\mathrm{e}^{2\beta h}}{\alpha\beta},\quad\forall\, t\ge\tau.\tag{3.11}$$

为了得到依赖于时间的吸收集, 进一步假设

$$0<\beta-2L_g\mathrm{e}^{\beta h}=\alpha,\tag{3.12}$$

从而取 $t_0=\frac{1}{\alpha}\ln[2\mathrm{e}^{\beta h}(\|\phi\|^2_{C_{L^2}}+\varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|^2_{C_{L^2}})]$, 当 $t-\tau\ge t_0$ 时, 有

$$\|u_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\varepsilon(t)\|\nabla u_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\le 1+\left(2C_0|\Omega|+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|^2_{H^{-1}}\right)\frac{2L_g\mathrm{e}^{2\beta h}}{\alpha\beta}=R_0,$$

所以过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中存在拉回吸收集 $\hat{B}=\{B_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$. 证毕.

下面将证明过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ 满足拉回渐近光滑, 从而得到过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中存在拉回吸引子.

由嵌入 $L^2(\Omega)\hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ 的稠密性可知, 对任给的 $k\in H^{-1}(\Omega)$ 和任意的 $\eta>0$, 存在与 k 和 η 相关的 $k^\eta\in L^2(\Omega)$, 使得

$$\|k-k^\eta\|_{H^{-1}}<\eta.\tag{3.13}$$

为了证明过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ 满足拉回渐近光滑, 我们将方程 (1.1) 的解 $u(t)$ 分解为

$$u(t)=U(t,\tau)u(\tau)=D(t,\tau)u(\tau)+K(t,\tau)u(\tau),$$

其中 $D(t,\tau)u(\tau)=v(t)$ 和 $K(t,\tau)u(\tau)=w(t)$ 分别满足下述方程:

$$\begin{cases}\partial_t v-\varepsilon(t)\partial_t\Delta v-\Delta v+f_0(v)=k(x)-k^\eta(x), & (x,t)\in\Omega\times(\tau,\infty),\\ v(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(\tau,\infty),\\ v(x,\tau+\theta)=\phi(x,\theta), & x\in\Omega,\quad\theta\in[-h,0]\end{cases}\tag{3.14}$$

和

$$\begin{cases}\partial_t w-\varepsilon(t)\partial_t\Delta w-\Delta w+f(u)-f_0(v)=g(t,u_t)+k^\eta(x), & (x,t)\in\Omega\times(\tau,\infty),\\ w(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(\tau,\infty),\\ w(x,\tau+\theta)=0, & x\in\Omega,\quad\theta\in[-h,0].\end{cases}\tag{3.15}$$

对于 (3.14) 的解, 我们有下述引理.

引理 3.4 设 f 满足 (3.1), (3.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot)\in H^{-1}(\Omega)$, $\phi\in C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau\in\mathbb{R}$, 则对任给的 $\epsilon>0$, 存在 $\eta=\eta(\epsilon,k)$, 使得 (3.14) 的解满足

$$\begin{aligned}\|D(t,\tau)u(\tau)\|^2_{C_{\mathscr{H}_t}} &= \|v_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\varepsilon(t)\|\nabla v_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\\ &\le Q(\|\phi\|^2_{C_{\mathscr{H}_\tau}})\mathrm{e}^{-\beta_1(t-h-\tau)}+\frac{\epsilon}{2},\quad \forall\, t-h>\tau,\end{aligned}$$

其中 $\beta_1=\frac{\lambda}{1+L}$, $\lambda=\min\{\lambda_1,1\}$, $Q(\cdot)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的递增函数.

证明 (3.14) 与 $v(t)$ 在 Ω 上作 L^2- 内积, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|v(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla v(t)\|_2^2)+\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\right)\|\nabla v(t)\|_2^2+(f_0(v(t)),v(t))\\ &\quad=(k(x)-k^\eta(x),v(t)).\end{aligned}$$

利用 (1.3), (3.4), Poincaré 不等式和 Young 不等式, 可得

$$\frac{d}{dt}(\|v(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla v(t)\|_2^2)+\frac{1}{1+L}(\lambda_1\|v(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla v(t)\|_2^2)\le\|k-k^\eta\|^2_{H^{-1}}.$$

设 $\lambda=\min\{\lambda_1,1\}$, 则存在 $\beta_1=\frac{\lambda}{1+L}$, 使得

$$\frac{d}{dt}(\|v(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla v(t)\|_2^2)+\beta_1(\|v(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla v(t)\|_2^2)\le\|k-k^\eta\|^2_{H^{-1}}.$$

由 Gronwall 引理得

$$\|v(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla v(t)\|_2^2\le(\|v(\tau)\|_2^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla v(\tau)\|_2^2)\mathrm{e}^{-\beta_1(t-\tau)}+\frac{\|k-k^\eta\|^2_{H^{-1}}}{\beta_1}. \tag{3.16}$$

特别地, 用 $t+\theta$ 代替 t, 其中 $\theta\in[-h,0]$, 可得

$$\|v_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\varepsilon(t)\|\nabla v_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\le Q(\|\phi\|^2_{C_{\mathscr{H}_\tau}})\mathrm{e}^{-\beta_1(t-h-\tau)}+\frac{\|k-k^\eta\|^2_{H^{-1}}}{\beta_1},$$

其中 $Q(\cdot)$ 是 $[0,\infty)$ 上的递增函数.

在 (3.13) 中取 $\|k-k^\eta\|^2_{H^{-1}}\le\eta^2=\frac{\beta_1\epsilon}{2}$, 即可完成证明. 证毕.

对于 (3.15) 的解, 我们有下述引理.

引理 3.5 设 f 满足 (3.1), (3.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot)\in H^{-1}(\Omega)$, $\phi\in C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau\in\mathbb{R}$, 则对任给的 $T_0>0$, 存在 (依赖于 T_0, $\|\phi\|_{C_{\mathscr{H}_\tau}}$ 和 $\|k^\eta\|_2^2$ 的) 常数 $M_1>0$, 使得 (3.15) 的解满足下述估计:

$$\begin{aligned}\|K(T_0+\tau,\tau)u(\tau)\|^2_{C_{\mathscr{H}_t^{1+\sigma}(\Omega)}} &= \|w_{T_0+\tau}\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\varepsilon(T_0+\tau)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w_{T_0+\tau}\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\\ &\le M_1,\end{aligned}$$

其中常数 σ 来自 (3.7).

证明 (3.15) 与 $A^\sigma w(t)$ 在 Ω 上作 L^2- 内积, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(t)\|_2^2)+\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\right)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(t)\|_2^2\\ &\quad=-(f(u(t))-f_0(v(t)),A^\sigma w(t))+(g(t,u_t)+k^\eta(x),A^\sigma w(t))\\ &\quad=-(f(u(t))-f(v(t)),A^\sigma w(t))-(f_1(v(t))+g(t,u_t)+k^\eta(x),A^\sigma w(t)),\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 f_0 和 f_1 分别满足 (3.3), (3.4) 和 (3.5), (3.6).

类似于文 [22, 引理 3.4] 的证明, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(t)\|_2^2)\\&\quad\le C(1+\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(t)\|_2^2+\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(t)\|_2^2)+L_g^2\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\|k^\eta\|_2^2\\&\quad\le C(1+\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(t)\|_2^2)+L_g^2\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\|k^\eta\|_2^2,\end{aligned}$$

其中常数 C 依赖于 $\|\phi\|_{C_{\mathscr{H}_\tau}}$ 和 $\varepsilon(t)$ 在 $[\tau,t]$ 上的最小值.

由 Gronwall 引理得

$$\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(t)\|_2^2\le \mathrm{e}^{C(t-\tau)}\left(1+L_g^2\int_\tau^t\|u_s\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2ds+(t-\tau)\|k^\eta\|_2^2\right).$$

将 (3.10) 代入上式, 得

$$\begin{aligned}&\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(t)\|_2^2\\&\quad\le \mathrm{e}^{C(t-\tau)}\left(1+(t-\tau)\|k^\eta\|_2^2\right)+L_g^2\mathrm{e}^{C(t-\tau)}\int_\tau^t\|u_s\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2ds\\&\quad\le \mathrm{e}^{C(t-\tau)}\left(1+(t-\tau)\|k^\eta\|_2^2\right)\\&\qquad+\frac{1}{\alpha}L_g^2\mathrm{e}^{\beta h}\mathrm{e}^{C(t-\tau)}\left((\|\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)+\left(2C_0|\Omega|+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|_{H^{-1}}^2\right)(t-\tau)\right).\end{aligned}\tag{3.18}$$

特别地, 用 $t+\theta$ 代替 t, 其中 $\theta\in[-h,0]$, 可得

$$\begin{aligned}&\|A^{\frac{\sigma}{2}}w_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(t)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\\&\quad\le \mathrm{e}^{C(t-\tau)}\left(1+(t-\tau)\|k^\eta\|_2^2\right)\\&\qquad+\frac{1}{\alpha}L_g^2\mathrm{e}^{\beta h}\mathrm{e}^{C(t-\tau)}\left((\|\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)+\left(2C_0|\Omega|+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|_{H^{-1}}^2\right)(t-\tau)\right).\end{aligned}$$

取 $t=\tau+T_0$, 证明完成.

基于引理 3.4 和 3.5, 类似于文 [22, 25], 有下述引理.

引理 3.6 设 f 满足 (3.1), (3.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot)\in H^{-1}(\Omega)$, $u(t)$ 是方程 (1.1) 的对应于初值 $\phi\in C_{\mathscr{H}_\tau}$ 的解, $\tau\in\mathbb{R}$, 则对任给的 $\epsilon>0$, 存在 (与 $\|\phi\|_{C_{\mathscr{H}_\tau}}$ 和 $\|k^\eta\|_2$ 相关的) 常数 $C_\epsilon>0$ 和 (与 ϵ, T_0, $\|\phi\|_{C_{\mathscr{H}_\tau}}$ 和 $\|k^\eta\|_2$ 相关的) 常数 $K_\epsilon>0$, 使得

$$u(t)=v_1(t)+w_1(t),\quad \forall\, t\ge\tau,\tag{3.19}$$

其中 $v_1(t)$ 和 $w_1(t)$ 满足估计:

$$\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w_1(t)\|_2^2\le K_\epsilon,\quad \forall\, t\ge\tau\tag{3.20}$$

和

$$\int_s^t\|\nabla v_1(r)\|_2^2dr\le\epsilon(t-s)+C_\epsilon,\quad \forall\, t\ge s\ge\tau,\tag{3.21}$$

其中 C_ϵ 和 K_ϵ 与 τ 无关, σ 来自 (3.7).

由定理 3.3 中的 (3.11) 知, 存在 (依赖于 $\|\phi\|_{C_{\mathscr{H}_\tau}}$) 的常数 $M_{\|\phi\|_{C_{\mathscr{H}_\tau}}}$, 使得

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\sup_{\tau\le t}\|U(t,\tau)u(\tau)\|_{C_{\mathscr{H}_t}}^2\le M_{\|\phi\|_{C_{\mathscr{H}_\tau}}}.$$

而且, 由分解式 (3.19) 可知, 存在 (依赖于 $\|\phi\|_{C_{\mathscr{H}_\tau}}$) 的常数 M_2, 使得

$$\|v_1(t)\|_{C_{\mathscr{H}_t}}^2 \le Q(M_{\|\phi\|_{C_{\mathscr{H}_\tau}}}) := M_2, \quad \forall\, t \ge \tau. \tag{3.22}$$

引理 3.7 设 f 满足 (3.1), (3.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot) \in H^{-1}(\Omega)$, $\phi \in C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau \in \mathbb{R}$, 则对任意的 (在 $C_{\mathcal{H}_\tau}$ 中的) 有界集 $B_\tau \subset C_{\mathcal{H}_\tau}$, 存在 (与 $\|B_\tau\|_{C_{\mathcal{H}_\tau}}$ 有关的) 常数 $J_{\|B_\tau\|_{C_{\mathcal{H}_\tau}}} > 0$, 使得

$$\|K(t,\tau)u(\tau)\|_{C_{\mathscr{H}_t^{1+\sigma}}}^2 = \|w_t\|_{C_{\mathscr{H}_t^{1+\sigma}}}^2 \le J_{\|B_\tau\|_{C_{\mathcal{H}_\tau}}}, \quad \forall\, t \ge \tau,$$

其中 $u(\tau) \in B_\tau$, σ 来自 (3.7).

证明 由 (3.17), 类似于文 [22, 引理 4.7] 的证明过程, 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(t)\|_2^2 + \varepsilon(t)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(t)\|_2^2)\\
&\quad + (C - CM_2\|\nabla v_1(t)\|_2^2)(\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(t)\|_2^2 + \varepsilon(t)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(t)\|_2^2)\\
&\le C(1 + K_\epsilon^{8/(n-2)}) + 4L_g^2\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 + 8\|k^\eta\|_2^2,
\end{aligned}$$

其中常数 K_ϵ 和 M_2 分别来自 (3.20) 和 (3.22).

为了简单起见, 记 $C_1 = CM_2$, $C_2 = C(1 + K_\epsilon^{8/(n-2)})$, 再对上式应用 Gronwall 引理得

$$\begin{aligned}
&\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(t)\|_2^2 + \varepsilon(t)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(t)\|_2^2\\
&\quad\le \mathrm{e}^{-\int_{\tau+T_1}^t (C - C_1\|\nabla v_1(s)\|_2^2)ds}(\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(\tau+T_1)\|_2^2 + \varepsilon(\tau+T_1)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(\tau+T_1)\|_2^2)\\
&\qquad + C_2\int_{\tau+T_1}^t \mathrm{e}^{\int_t^s (C - C_1\|\nabla v_1(y)\|_2^2)dy}ds + 4L_g^2\int_{\tau+T_1}^t \|u_s\|_{C_{L^2}}^2 \mathrm{e}^{\int_t^s (C - C_1\|\nabla v_1(y)\|_2^2)dy}ds\\
&\qquad + 8\int_{\tau+T_1}^t \|k^\eta\|_2^2 \mathrm{e}^{\int_t^s (C - C_1\|\nabla v_1(y)\|_2^2)dy}ds.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

类似于文 [22], 在 (3.21) 中取 ϵ, 使得 $\epsilon < \frac{C}{2C_1}$, 可得

$$\mathrm{e}^{-\int_{\tau+T_1}^t (C - C_1\|\nabla v_1(s)\|_2^2)ds} \le \mathrm{e}^{-\frac{C}{2}(t - T_1 - \tau)}\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon} \le \mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}, \tag{3.24}$$

且

$$\int_{\tau+T_1}^t \mathrm{e}^{\int_t^s (C - C_1\|\nabla v_1(y)\|_2^2)dy}ds \le \frac{2\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}}{C}. \tag{3.25}$$

另外, 由 (3.10) 得

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau+T_1}^t \|u_s\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 \mathrm{e}^{\int_t^s (C - C_1\|\nabla v_1(y)\|_2^2)dy}ds\\
&\quad\le \mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}\int_{\tau+T_1}^t \mathrm{e}^{-\frac{C}{2}(t-s)}\|u_s\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 ds\\
&\quad\le \mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}\int_{\tau+T_1}^t \mathrm{e}^{-\frac{C}{2}(t-s)}(\|\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 + \varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)\mathrm{e}^{\beta h - \alpha(s-\tau)}ds\\
&\qquad + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}\int_{\tau+T_1}^t \mathrm{e}^{-\frac{C}{2}(t-s)}\left(2C_0|\Omega| + \frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|_{H^{-1}}^2\right)\mathrm{e}^{\beta h}ds,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

且

$$\int_{\tau+T_1}^t \|k^\eta\|_2^2 \mathrm{e}^{\int_t^s (C - C_1\|\nabla v_1(y)\|_2^2)dy}ds \le \mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}\|k^\eta\|_2^2\int_{\tau+T_1}^t \mathrm{e}^{-\frac{C}{2}(t-s)}ds \le \frac{2\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}}{C}\|k^\eta\|_2^2. \tag{3.27}$$

将估计 (3.24)–(3.27) 代入 (3.23), 可得

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(t)\|_2^2\le{}& \mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}(\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(\tau+T_1)\|_2^2+\epsilon(\tau+T_1)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(\tau+T_1)\|_2^2)\\&+\frac{2C_2}{C}\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}+\frac{8L_g^2}{C}(\|\phi\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\epsilon(\tau)\|\nabla\phi\|^2_{C_{L^2(\Omega)}})\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon+\beta h}\\&+\frac{8L_g^2}{\alpha C}\left(2C_0|\Omega|+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|^2_{H^{-1}}\right)\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon+\beta h}+\frac{2}{C}\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}\|k^\eta\|_2^2,\quad\forall\, t\ge\tau+T_1.\end{aligned}$$

特别地, 用 $t+\theta$ 代替 t, 其中 $\theta\in[-h,0]$, 可得

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{\sigma}{2}}w_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\varepsilon(t)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\le{}&\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}(\|A^{\frac{\sigma}{2}}w(\tau+T_1)\|_2^2+\epsilon(\tau+T_1)\|A^{\frac{1+\sigma}{2}}w(\tau+T_1)\|_2^2)\\&+\frac{2C_2}{C}\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}+\frac{8L_g^2}{C}(\|\phi\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\epsilon(\tau)\|\nabla\phi\|^2_{C_{L^2(\Omega)}})\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon+\beta h}\\&+\frac{8L_g^2}{\alpha C}\left(2C_0|\Omega|+\frac{\lambda_1}{\delta}\|k\|^2_{H^{-1}}\right)\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon+\beta h}+\frac{2}{C}\mathrm{e}^{C_1C_\epsilon}\|k^\eta\|_2^2.\end{aligned}$$

结合引理 3.5 并注意到 T_1 给定, 即可完成证明.

对于 (3.15) 的解, 类似于文 [28, 引理 3.11], 有下述结论.

引理 3.8　设 f 满足 (3.1), (3.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot)\in H^{-1}(\Omega)$, $\phi\in C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau\in\mathbb{R}$, 则对任意的 $T>\tau$, (3.15) 的解 $w(t)$ 满足 $\partial_t w\in L^2(\tau,T;\mathscr{H}_t)$.

结合引理 2.6–2.7 和 3.4–3.8 可得下述结论.

定理 3.9　设 f 满足 (3.1), (3.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot)\in H^{-1}(\Omega)$, $\phi\in C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau\in\mathbb{R}$, 则过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中拉回渐近光滑.

结合定理 2.8, 3.3 和 3.9, 我们得到这一部分的主要结果.

定理 3.10　设 f 满足 (3.1), (3.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot)\in H^{-1}(\Omega)$, $\phi\in\mathbb{B}_\tau(R_0)\subset C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau\in\mathbb{R}$ 且 (3.12) 成立, 则过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中存在拉回吸引子 $\hat{\mathscr{A}}=\{\mathscr{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, 即 $\mathscr{A}_t$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中紧, $\hat{\mathscr{A}}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中非空, 不变且在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 拓扑下拉回吸引 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中的每个集合.

4　任意次多项式增长情形

这一部分, 我们假设非线性项 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足下述经典假设 (见文 [2, 19, 23]):

$$f'(u)\ge -l,\quad \forall\, u\in\mathbb{R},\tag{4.1}$$

且

$$-c_0+c_1|u|^q\le f(u)u\le c_0+c_2|u|^q,\quad q\ge 2,\quad\forall\, u\in\mathbb{R},\tag{4.2}$$

其中 $c_0,c_1,c_2>0$ 是常数.

下面给出方程 (1.1) 满足条件 (4.1), (4.2) 时解的存在性和唯一性, 我们首先定义弱解如下.

定义 4.1　若函数 $u\in C([\tau-h,T];\mathscr{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega))\cap L^q(\tau,T;L^q(\Omega))$ 满足当 $t\in[\tau-h,\tau]$ 时, $u(t)=\phi(t-\tau)$, 且对任意的 $\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}[(u(t),\varphi)+\varepsilon(t)(\nabla u(t),\nabla\varphi)]+(1-\varepsilon'(t))(\nabla u(t),\nabla\varphi)+(f(u(t)),\varphi)\\&\quad=(g(t,u_t),\varphi)+(k(x),\varphi)\end{aligned}$$

在 $\mathscr{D}'(\tau,+\infty)$ 中成立, 则称 u 是方程 (1.1) 的弱解.

下述定理由 Faedo-Galerkin 逼近得到, 它给出弱解的存在性和唯一性, 这里我们只陈述结果.

定理 4.2 设 f 满足 (4.1), (4.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot)\in H^{-1}(\Omega)$, $\phi\in C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau\in\mathbb{R}$, 则方程 (1.1) 存在唯一弱解 $u(\cdot)=u(\cdot,\tau;\phi)$, 使得

$$u(t)\in C([\tau-h,T];\mathscr{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega))\cap L^q(\tau,T;L^q(\Omega)),\quad \forall T>\tau.$$

而且, 弱解 $u(\cdot)=u(\cdot,\tau;\phi)$ 连续依赖于初值 $\phi\in C_{H_\tau}$.

因此, 我们在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中定义过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 为:

$$U(t,\tau):C_{\mathscr{H}_\tau}\to C_{\mathscr{H}_t},\quad U(t,\tau)\phi:=u(t,\tau;\phi)=u(t),\quad \forall t\geq\tau.$$

接下来, 我们用 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 表示当非线性项 f 满足 (4.1), (4.2) 时方程 (1.1) 的解所生成的过程.

下述定理表明过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中存在拉回吸收集.

定理 4.3 设 f 满足 (4.1), (4.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot)\in H^{-1}(\Omega)$, $\phi\in\mathbb{B}_\tau(R_1)\subset C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau\in\mathbb{R}$, 则过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中存在拉回吸收集 $\hat{B}=\{B_t(R_1)\}_{t\in\mathbb{R}}$, 其中常数 $R_1>0$.

证明 在方程 (1.1) 两边同乘以 $u(t)$ 并关于 $x\in\Omega$ 积分, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)+\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\right)\|\nabla u\|_2^2+(f(u),u)=(g(t,u_t),u)+(k(x),u).$$

由 (4.2), 条件 (III) 和 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)+(1-\varepsilon'(t))\|\nabla u\|_2^2+2c_1\|u\|_p^p\\&\quad\leq 2c_0|\Omega|+2L_g\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\|k\|_{H^{-1}}^2.\end{aligned}$$

再由 (1.2), (1.3) 和 Poincaré 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)+\frac{1}{1+L}(\lambda_1\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)\\&\quad\leq 2c_0|\Omega|+2L_g\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\|k\|_{H^{-1}}^2.\end{aligned}$$

设 $\lambda=\min\{\lambda_1,1\}$, 则存在 $\beta_1=\frac{\lambda}{1+L}$, 使得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)+\beta_1(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|_2^2)\\&\quad\leq 2c_0|\Omega|+2L_g\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\|k\|_{H^{-1}}^2.\end{aligned}\tag{4.3}$$

在 (4.3) 两边乘以 $\mathrm{e}^{\beta_1 t}$, 并在 $[\tau,t]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}(\|u(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla u(t)\|_2^2)\mathrm{e}^{\beta_1 t}\leq{}&(\|u(\tau)\|_2^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla u(\tau)\|_2^2)\mathrm{e}^{\beta_1\tau}+2c_0|\Omega|\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta_1 s}ds\\&+2L_g\int_\tau^t\|u_s\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\mathrm{e}^{\beta_1 s}ds+\|k\|_{H^{-1}}^2\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta_1 s}ds,\quad\forall t\geq\tau.\end{aligned}$$

特别地, 用 $t+\theta$ 代替 t, 其中 $\theta\in[-h,0]$, 可得

$$\begin{aligned}&(\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(t)\|\nabla u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)\mathrm{e}^{\beta_1 t}\\&\quad\leq(\|\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)\mathrm{e}^{\beta_1(h+\tau)}+2c_0|\Omega|\mathrm{e}^{\beta_1 h}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta_1 s}ds\\&\qquad+2L_g\mathrm{e}^{\beta_1 h}\int_\tau^t\|u_s\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\mathrm{e}^{\beta_1 s}ds+\mathrm{e}^{\beta_1 h}\|k\|_{H^{-1}}^2\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta_1 s}ds.\end{aligned}\tag{4.4}$$

从而有

$$\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 \mathrm{e}^{\beta_1 t} \leq (\|\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 + \varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)\mathrm{e}^{\beta_1(h+\tau)} + 2c_0|\Omega|\mathrm{e}^{\beta_1 h}\int_\tau^t \mathrm{e}^{\beta_1 s}ds + 2L_g\mathrm{e}^{\beta_1 h}\int_\tau^t \|u_s\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 \mathrm{e}^{\beta_1 s}ds + \mathrm{e}^{\beta_1 h}\|k\|_{H^{-1}}^2\int_\tau^t \mathrm{e}^{\beta_1 s}ds.$$

对上式应用 Gronwall 引理, 可得

$$\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 \mathrm{e}^{\beta_1 t} \leq (\|\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 + \varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)\mathrm{e}^{\beta_1(h+\tau)}\mathrm{e}^{2L_g\mathrm{e}^{\beta_1 h}(t-\tau)} + \frac{1}{\alpha_1}(2c_0|\Omega| + \|k\|_{H^{-1}}^2)\mathrm{e}^{\beta_1 h}\mathrm{e}^{2L_g\mathrm{e}^{\beta_1 h}t}\mathrm{e}^{\alpha_1 t}, \tag{4.5}$$

其中 $\alpha_1 = \beta_1 - 2L_g\mathrm{e}^{\beta_1 h}$.

将 (4.5) 代入 (4.4), 可得

$$\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 + \varepsilon(t)\|\nabla u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 \leq (\|\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 + \varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)\mathrm{e}^{\beta_1 h}(\mathrm{e}^{-\beta_1(t-\tau)} + \mathrm{e}^{-\alpha_1(t-\tau)}) + \frac{1}{\beta_1}\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)(2c_0|\Omega| + \|k\|_{H^{-1}}^2)\mathrm{e}^{\beta_1 h}, \quad \forall\, t \geq \tau. \tag{4.6}$$

为了得到拉回吸收集, 我们进一步假设

$$0 < \beta_1 - 2L_g\mathrm{e}^{\beta_1 h} = \alpha_1, \tag{4.7}$$

从而取 $t_1 = \frac{1}{\alpha_1}\ln[2\mathrm{e}^{\beta_1 h}(\|\phi\|_{C_{L^2}}^2 + \varepsilon(\tau)\|\nabla\phi\|_{C_{L^2}}^2)]$, 当 $t-\tau \geq t_1$ 时, 有

$$\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 + \varepsilon(t)\|\nabla u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 \leq 1 + \frac{1}{\beta_1}\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)(2c_0|\Omega| + \|k\|_{H^{-1}}^2)\mathrm{e}^{\beta_1 h} = R_1,$$

所以过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中存在拉回吸收集 $\hat{B} = \{B_t(R_1)\}_{t\in\mathbb{R}}$. 证毕.

下面将证明过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中存在拉回吸引子.

首先, 类似于文 [17], 我们给出下面的结论.

引理 4.4 设 f 满足 (4.1), (4.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot) \in H^{-1}(\Omega)$, $\phi \in C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau \in \mathbb{R}$. 设 $\{u^n(t)\}_{n=1}^\infty$ 是方程 (1.1) 的对应于初值 $u^n(\tau) \in C_{\mathscr{H}_\tau}$ $(n=1,2,\ldots)$ 的解序列, 则 $\{u^n(t)\}_{n=1}^\infty$ 存在在 $L^2(\tau,T;L^2(\Omega))$ 中强收敛的子列.

证明 由定理 4.2 和 (4.2) 可知, 存在序列

$$\{u^n(t)\}_{n=1}^\infty \subset L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega)), \quad \{f(u^n(t))\}_{n=1}^\infty \subset L^p(\tau,T;L^p(\Omega)),$$

其中 $p = \frac{q}{q-1}$. 再由方程 (1.1) 可知

$$\partial_t u^n - \varepsilon(t)\partial_t\Delta u^n = \Delta u^n - f(u^n) + g(t,u_t^n) + k(x) \in L^2(\tau,T;H^{-1}(\Omega)) + L^p(\tau,T;L^p(\Omega)) \subset L^2(\tau,T;H^{-2}(\Omega)).$$

由椭圆方程的正则化理论可知, $\partial_t u^n \in L^2(\tau,T;L^2(\Omega))$. 从而, 由文 [17] 可知, 序列 $\{u^n(t)\}_{n=1}^\infty$ 存在在 $L^2(\tau,T;L^2(\Omega))$ 中强收敛的子列 (仍记为 $\{u^n(t)\}_{n=1}^\infty$). 证毕.

下述定理表明过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中拉回渐近紧.

定理 4.5 设 f 满足 (4.1), (4.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot) \in H^{-1}(\Omega)$, $\phi \in \mathbb{B}_\tau(R_1) \subset C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau \in \mathbb{R}$, 则过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中拉回渐近紧.

证明 设 $u^1(t),u^2(t)$ 是方程 (1.1) 当 f 满足 (4.1), (4.2) 时的解. 记 $\omega(t)=u^1(t)-u^2(t)$, 则 $\omega(t)$ 满足方程:

$$\partial_t\omega-\varepsilon(t)\partial_t\Delta\omega-\Delta\omega+f(u^1)-f(u^2)=g(t,u_t^1)-g(t,u_t^2),\quad (x,t)\in\Omega\times(\tau,\infty),\tag{4.8}$$

初值为

$$\omega(x,\tau+\theta)=\phi^1(x,\theta)-\phi^2(x,\theta),\quad x\in\Omega,\ \theta\in[-h,0].$$

让 (4.8) 和 $\omega(t)$ 在 Ω 上作 L^2- 内积, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\omega\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla\omega\|_2^2)+\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\right)\|\nabla\omega\|_2^2+(f(u^1)-f(u^2),\omega)=(g(t,u_t^1)-g(t,u_t^2),\omega).$$

由 (1.2), (1.3), (4.1) 和条件 (III), 可得

$$\frac{d}{dt}(\|\omega\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla\omega\|_2^2)+2\beta_1(\|\omega\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla\omega\|_2^2)\le 2l\|\omega\|_2^2+2L_g\|u_t^1-u_t^2\|_{C_{L^2(\Omega)}}\|\omega\|_2,$$

其中 $\beta_1=\frac{\lambda}{1+L}$ 来自 (4.3).

对上式应用 Gronwall 引理, 可得

$$\begin{aligned}\|\omega(t)\|_2^2+\varepsilon(t)\|\nabla\omega(t)\|_2^2\le&(\|\omega(\tau)\|_2^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla\omega(\tau)\|_2^2)\mathrm{e}^{-2\beta_1(t-\tau)}+2l\int_\tau^t\|\omega(s)\|_2^2ds\\&+2L_g\mathrm{e}^{-2\beta_1 t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{2\beta_1 s}\|u_s^1-u_s^2\|_{C_{L^2(\Omega)}}\|\omega(s)\|_2ds,\quad\forall\, t\ge\tau.\end{aligned}$$

对上面的不等式应用 Hölder 不等式, 然后再用 $t+\theta$ 代替 t, 其中 $\theta\in[-h,0]$, 可得

$$\begin{aligned}&\|\omega_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(t)\|\nabla\omega_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\\&\quad\le(\|\omega_\tau\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla\omega_\tau\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)\mathrm{e}^{-2\beta_1(t-h-\tau)}+2l\int_\tau^t\|\omega(s)\|_2^2ds\\&\qquad+2L_g\mathrm{e}^{-2\beta_1(t-h)}\left(\int_\tau^t\mathrm{e}^{4\beta_1 s}\|u_s^1-u_s^2\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\tau^t\|\omega(s)\|_2^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\&\quad\le(\|\omega_\tau\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla\omega_\tau\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)\mathrm{e}^{-2\alpha_1(t-h-\tau)}+2l\int_\tau^t\|\omega(s)\|_2^2ds\\&\qquad+2\sqrt{2}L_g\mathrm{e}^{-2\beta_1(t-h)}\left(\int_\tau^t\mathrm{e}^{4\beta_1 s}(\|u_s^1\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\|u_s^2\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\tau^t\|\omega(s)\|_2^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

对任意的 $t-h>\tau$ 成立, 这里我们用到 $\alpha_1<\beta_1$.

设

$$\begin{aligned}\psi_\tau^t(u^1,u^2)=&\,2l\int_\tau^t\|\omega(s)\|_2^2ds\\&+2\sqrt{2}L_g\mathrm{e}^{-2\beta_1(t-h)}\left(\int_\tau^t\mathrm{e}^{4\beta_1 s}(\|u_s^1\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\|u_s^2\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\tau^t\|\omega(s)\|_2^2ds\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

结合定义 2.10, 引理 4.4 和定理 4.3 中的 (4.6) 可知 $\psi_\tau^t(\cdot,\cdot)$ 是收缩函数. 从而对任给的 $\epsilon>0$ 和任给的 $t\in\mathbb{R}$, 只要取

$$\tau_1=t-h-\frac{1}{2\alpha_1}\ln\frac{1}{\epsilon}(\|w_\tau\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla w_\tau\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2),$$

由引理 2.11 即可知过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中拉回渐近紧. 证毕.

结合定理 2.12, 4.3 和 4.5, 我们得到这一部分的主要结果.

定理 4.6 设 f 满足 (4.1), (4.2), $g(\cdot,\cdot)$ 满足条件 (I)–(III), $k(\cdot) \in H^{-1}(\Omega)$, $\phi \in \mathbb{B}_\tau(R_1) \subset C_{\mathscr{H}_\tau}$, $\tau \in \mathbb{R}$ 且 (4.7) 成立, 则过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中存在拉回吸引子 $\hat{\mathscr{A}_1} = \{\mathscr{A}_{1,t}\}_{t\in\mathbb{R}}$, 即 $\mathscr{A}_{1,t}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中紧, $\hat{\mathscr{A}_1}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中非空、不变且在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 拓扑下拉回吸引 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中的每个集合.

致谢 感谢孙春友教授的鼓励与帮助.

参 考 文 献

[1] Arrieta J., Carvalho A. N., Hale J. K., A damped hyperbolic equation with critical exponent, *Comm. Partial Differential Equations*, 1992, **17**: 841–866.
[2] Babin A. V., Vishik M. I., Attractors of Evolution Equations, North-Holland, Amsterdam, 1992.
[3] Ball J., Global attractors for damped semilinear wave equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2004, **10**: 31–52.
[4] Caraballo T., Márquez-Durán A. M., Existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions for a nonclassical diffusion equation with delay, *Dyn. Partial Differ. Equ.*, 2013, **10**: 267–281.
[5] Caraballo T., Márquez-Durán A. M., Rivero F., Well-posedness and asymptotic behavior of a nonclassical nonautonomous diffusion equation with delay, *Internat J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2015, **25**: 1540021, 11 pp.
[6] Caraballo T., Márquez-Durán A. M., Rivero F., Asymptotic behaviour of a non-classical and non-autonomous diffusion equation containing some hereditary characteristic, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2017, **22**: 1817–1833.
[7] Cholewa J. W., Dlotko T., Global Attractors in Abstract Parabolic Problems, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
[8] Chueshov I., Lasiecka I., Long-time dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping, *J. Differential Equations*, 2007, **233**: 42–86.
[9] Conti M., Pata V., Asymptotic structure of the attractor for processes on time-dependent spaces, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2014, **19**: 1–10.
[10] Conti M., Pata V., Temam R., Attractors for process on time-dependent spaces: Applications to wave equations, *J. Differential Equations*, 2013, **255**: 1254–1277.
[11] García-Luengo J., Marín-Rubio P., Reaction–diffusion equations with non-autonomous force in H^{-1} and delays under measurability conditions on the driving delay term, *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, **417**: 80–95.
[12] Hale J. K., Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, AMS, Providence, RI, 1988.
[13] Hale J. K., Verduyn Lunel S. M., Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1993.
[14] Hu Z. Y., Wang Y. J., Pullback attractors for a nonautonomous nonclassical diffusion equation with variable delay, *J. Math. Phys.*, 2012, **53**: 072702, 17 pp.
[15] Khanmamedov A. Kh., Global attractors for von Karman equations with nonlinear interior dissipation, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **318**: 92–101.
[16] Kloeden P. E., Lorenz T., Pullback incremental attraction, *Nonauton. Dyn. Syst.*, 2014, **1**: 53–60.
[17] Lions J. L., Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.
[18] Meng F. J., Yang M. H., Zhong C. K., Attractors for wave equations with nonlinear damping on time-dependent space, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2016, **21**: 205–225.
[19] Robinson J. C., Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
[20] Simon J., Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1987, **146**: 65–96.
[21] Sun C. Y., Cao D. M., Duan J. Q., Non-autonomous dynamics of wave equations with nonlinear damping and critical nonlinearity, *Nonlinearity*, 2006, **19**: 2645–2665.
[22] Sun C. Y., Yang M. H., Dynamics of the nonclassical diffusion equations, *Asymptotic Anal.*, 2008, **59**: 51–81.
[23] Temam R., Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, New York, 1997.
[24] Xie Y. Q., Li Q. S., Zhu K. X., Attractors for nonclassical diffusion equations with arbitrary polynomial growth, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2016, **31**: 23–37.

[25] Zelik S., Asymptotic regularity of solutions of a nonautonomous damped wave equation with a critical growth exponent, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2004, **3**: 921–934.

[26] Zhong C. K., Yang M. H., Sun C. Y., The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the nonlinear reaction–diffusion equations, *J. Differential Equations*, 2006, **223**: 367–399.

[27] Zhou F., Sun C. Y., Li X., Dynamics for the damped wave equations on time-dependent domains, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2018, **23**: 1645–1674.

[28] Zhu K. X., Sun C. Y., Pullback attractors for nonclassical diffusion equations with delays, *J. Math. Phys.*, 2015, **56**: 092703, 20 pp.

[29] Zhu K. X., Xie Y. Q., Zhou F., Pullback attractors for a damped semilinear wave equation with delays, *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 2018, **34**: 1131–1150.

[30] Zhu K. X., Xie Y. Q., Zhou F., L^p-pullback attractors for non-autonomous reaction–diffusion equations with delays, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2019, **54**: 9–27.