第65卷第6期 数学学报中文版 Vol.65, No.6
2022年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2022

DOI: 10.12386/A20210058 文献标识码: A

# Engel 连分数展式中例外集的 Hausdorff 维数

吕美英 谢 婧

重庆师范大学数学科学学院 重庆 401331
E-mail: lmy19831102@163.com; xj826831xj@163.com

**摘 要** 对于任意的实数 $x \in (0,1)$, 都有其唯一的 Engel 连分数展式. 本文主要研究了部分商的对数构成的序列以非线性速度增长的例外集, 给出了相关例外集 Hausdorff 维数的精确刻画.

**关键词** Engel 连分数; 例外集; Hausdorff 维数
**MR(2010) 主题分类** 11K55, 28A80
**中图分类** O156.7

**Hausdorff Dimension of the Exceptional Set in Engel Continued Fractions**

Mei Ying LÜ Jing XIE

*School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, P. R. China*
*E-mail*: lmy19831102@163.com; xj826831xj@163.com

**Abstract** For any real number $x \in (0,1)$, there exists a unique Engel continued fractions of $x$. In this paper, we mainly discuss the exceptional set which the logarithms of the partial quotients grow with non-linear rate. We completely characterize the Hausdorff dimension of the relevant exceptional set.

**Keywords** Engel continued fractions; exceptional sets; Hausdorff dimensions
**MR(2010) Subject Classification** 11K55, 28A80
**Chinese Library Classification** O156.7

## 1 引言

Hartono, Kraaikamp 以及 Schweiger [3] 在 2002 年引入一种新的连分数展式, 即 Engel 连分数展式, 该展式是经典的 Engel 级数展式的推广. 我们首先回顾一下 Engel 级数展式, 它由下述

收稿日期: 2021-04-07; 接受日期: 2021-08-30
基金项目: 重庆市科委自然科学基金 (cstc2018jcyjAX0277); 重庆市教委科学技术研究项目 (KJQN202000531)

变换 $T_S:[0,1)\to[0,1)$,

$$T_S(0):=0;\quad T_S(x)=\left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right)\left(x-\frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]+1}\right),\quad x\neq 0$$

生成, 其中 $[y]$ 表示不超过 $y$ 的最大的整数. 利用变换 $T_S$, 对于任意的实数 $x\in(0,1)$, 都有如下形式的级数展式

$$x=\frac{1}{d_1(x)}+\frac{1}{d_1(x)d_2(x)}+\cdots+\frac{1}{d_1(x)d_2(x)\cdots d_n(x)}+\cdots,$$

这里 $d_n(x)=\left[\frac{1}{T_S^{n-1}(x)}\right]+1$, $n\geq 1$, 且满足 $2\leq d_1(x)\leq d_2(x)\leq\cdots$, 关于 Engel 级数展式的更多性质参见文献 [2].

相应地, Engel 连分数展式由变换 $T_E:[0,1)\to[0,1)$,

$$T_E(0):=0;\quad T_E(x)=\frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right),\quad x\neq 0$$

生成, 对于任意的实数 $x\in(0,1)$, 其 Engel 连分数展式形式如下:

$$x=\cfrac{1}{b_1(x)+\cfrac{b_1(x)}{b_2(x)+\cdots+\cfrac{b_{n-1}(x)}{b_n(x)+\cdots}}},$$

这里 $b_n(x)=\left[\frac{1}{T_E^{n-1}(x)}\right]$, $n\geq 1$, 称为 Engel 连分数展式的部分商, 且满足 $1\leq b_1(x)\leq b_2(x)\leq\cdots$. 为方便起见, 我们将 $x$ 的 Engel 连分数展式简记作 $[b_1(x),b_2(x),\ldots,b_n(x),\ldots]$.

Hartono, Kraaikamp 以及 Schweiger [3] 研究了 Engel 连分数展式的算术性质与遍历性质, Kraaikamp 和 Wu [4] 研究了部分商序列 $\{b_n(x):n\geq 1\}$ 的度量性质. 特别地, 他们证明对于几乎处处的 $x\in(0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log b_n(x)}{n}=1.$$

该结论说明 $\log b_n(x)$ 以非线性速度增长的点构成的集合为 Lebesgue 零测集. 本文考虑 $\log b_n(x)$ 以对数速度增长的例外集的维数问题, 即令集合

$$E(\alpha)=\left\{x\in(0,1):\lim_{n\to\infty}\frac{\log b_n(x)}{\log n}=\alpha\right\},\quad \alpha>0.$$

记 $\dim_H$ 为 Hausdorff 维数, 我们主要证明

**定理 1.1**

$$\dim_H E(\alpha)=\begin{cases}0, & 1>\alpha>0,\\ 1-1/\alpha, & \alpha\geq 1.\end{cases}$$

该问题在 Engel 级数展式下的研究结果可参见文献 [5].

## 2 预备知识

本节介绍 Engel 连分数的基本性质, 以及计算维数的基本公式.

记

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}=\cfrac{1}{b_1(x)+\cfrac{b_1(x)}{b_2(x)+\cdots+\cfrac{b_{n-1}(x)}{b_n(x)}}},$$

称为 $x$ 的 Engel 收敛因子. 约定 $P_0(x):=0$, $Q_0(x):=1$, 则对于任意 $n\geq 2$, 有

$$P_n(x)=b_n(x)P_{n-1}(x)+b_{n-1}(x)P_{n-2}(x); \tag{2.1}$$

$$Q_n(x)=b_n(x)Q_{n-1}(x)+b_{n-1}(x)Q_{n-2}(x), \tag{2.2}$$

且满足

$$P_n(x)Q_{n-1}(x)-P_{n-1}(x)Q_n(x)=(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}b_j(x). \tag{2.3}$$

**定义 2.1** [3] 给定自然数序列 $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, 若存在实数 $x\in(0,1)$, 其 Engel 连分数展式满足 $b_j(x)=b_j$, $1\leq j\leq n$, 则称 $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ 为 $n$- 阶可允许序列.

**定义 2.2** [3] 若自然数序列 $(b_1,b_2,\ldots,b_n,\ldots)$ 满足对于任意的 $n\geq 1$, $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ 都是 $n$- 阶可允许序列, 则称 $(b_1,b_2,\ldots,b_n,\ldots)$ 为可允许序列.

**命题 2.3** [3] 序列 $(b_1,b_2,\ldots,b_n,\ldots)$ 是可允许序列, 当且仅当 $1\leq b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n\leq\cdots$.

记 $\mathscr{A}_n$ 为所有 $n$- 阶可允许序列全体构成的集合. 对于任意的自然数列 $(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\mathscr{A}_n$, 定义 $n$- 阶基本柱集

$$I(b_1,b_2,\ldots,b_n)=\{x\in(0,1):b_1(x)=b_1,\ b_2(x)=b_2,\ldots,b_n(x)=b_n\}.$$

**命题 2.4** [3] $I(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ 是以点 $[b_1,b_2,\ldots,b_n]$ 和 $[b_1,b_2,\ldots,b_n+1]$ 为端点的区间, 且满足

$$|I(b_1,b_2,\ldots,b_n)|=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}b_i}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})},$$

其中 $|\cdot|$ 表示区间的长度.

为方便求出 Hausdorff 维数的下界, 这里需要介绍一个计算维数的引理.

**引理 2.5** [1] 给定 $[0,1]=E_0\supset E_1\supset\cdots$ 为一递减的集合列, 令 $E=\bigcap_{n\geq 0}E_n$. 假定 $E_n$ 为有限个不交闭区间 (此类区间称为 $n$ 阶基本区间) 的集合, 同时 $E_{n-1}$ 中的每个 $n-1$ 阶基本区间里包含了 $m_n$ 个 $n$ 阶基本区间, 且记这些 $n$ 阶基本区间之间的最短间距为 $\varepsilon_n$. 若 $m_n\geq 2$, $\varepsilon_{n-1}>\varepsilon_n>0$, 则有

$$\dim_H E\geq\liminf_{n\to\infty}\frac{\log(m_1m_2\cdots m_{n-1})}{-\log(m_n\varepsilon_n)}.$$

## 3 定理的证明

### 3.1 维数的下界

为证明定理 1.1, 首先计算维数的下界. 易知对于任意的 $\alpha>0$, 有 $\dim_H E(\alpha)\geq 0$, 接下来证明当 $\alpha>1$ 时, $\dim_H E(\alpha)\geq 1-1/\alpha$. 我们的思路为构造 $E(\alpha)$ 的一个合适的 Cantor 子集 $E$, 然后利用引理 2.5 给出 $\dim_H E(\alpha)$ 的下界. 令

$$E=\{x\in(0,1):2(n+1)^\alpha\geq b_n(x)>2n^\alpha,\ \forall\, n\geq 1\}.$$

对于任意 $x\in E$, 有

$$\frac{\log 2n^\alpha}{\log n}\leq\frac{\log b_n(x)}{\log n}\leq\frac{\log 2(n+1)^\alpha}{\log n},$$

因此 $E\subset E(\alpha)$.

定义 $\mathscr{D}_n=\{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in\mathbb{N}^n: 2(k+1)^\alpha\geq\sigma_k>2k^\alpha,\ \forall n\geq k\geq 1\}$, 注意到对于所有的 $k\geq 1$, 都有 $2(k+1)^\alpha-2k^\alpha\geq 2\alpha k^{\alpha-1}>2\alpha\geq 2$ 成立, 所以 $\mathscr{D}_n$ 非空, 且对于任意的 $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in\mathscr{D}_n$, 我们有 $\sigma_{k+1}>2(k+1)^\alpha\geq\sigma_k$ 和 $\sigma_1>2$. 因此 $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ 是 Engel 连分数展式的可允许序列. 令

$$J(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=\bigcup_{\sigma_{n+1}}\mathrm{cl}(I(\sigma_1,\dots,\sigma_n,\sigma_{n+1})),$$

其中 $\sigma_{n+1}$ 满足 $(\sigma_1,\dots,\sigma_n,\sigma_{n+1})\in\mathscr{D}_{n+1}$, $\mathrm{cl}(A)$ 表示 $A$ 的闭包. 显然 $J(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ 是 $(0,1)$ 中的闭区间, 我们记它为 $n$ 阶基本区间. 然后令

$$E_n=\bigcup_{(\sigma_n,\dots,\sigma_n)\in\mathscr{D}_n}J(\sigma_1,\dots,\sigma_n),$$

并记 $E_0=[0,1]$, 则有

$$E=\bigcap_{n\geq 0}E_n.$$

接下来计算包含于 $n-1$ 阶基本区间里的 $n$ 阶基本区间的个数, 以及这些 $n$ 阶基本区间之间的最短间距. 由 $\mathscr{D}_n$ 和 $J(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ 的定义, 我们可以得出

$$m_n=[2(n+1)^\alpha]-[2(n)^\alpha].$$

注意到 $[2(n+1)^\alpha]-[2n^\alpha]>2(n+1)^\alpha-2n^\alpha-1>2\alpha n^{\alpha-1}-1\geq 2\alpha-1>1$, 所以 $m_n\geq 2$.

对于 $\mathscr{D}_n$ 中的两个不同的序列 $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ 和 $(\eta_1,\dots,\eta_n)$, 区间

$$I(\sigma_1,\dots,\sigma_n,\sigma_n)\ \text{ 和 } I(\eta_1,\dots,\eta_n,\eta_n),$$

其中之一必位于 $J(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ 与 $J(\eta_1,\dots,\eta_n)$ 之间. 由 (2.2) 可知

$$Q_n\leq 2\sigma_nQ_{n-1}\leq 2^2\sigma_n\sigma_{n-1}Q_{n-2}\leq\cdots\leq 2^n\sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1.$$

再结合 $\mathscr{D}_n$ 和 $J(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ 的定义, 从而有

$$\begin{aligned}|I(\sigma_1,\dots,\sigma_n,\sigma_n)|&=\frac{\prod_{j=1}^n\sigma_j}{Q_{n+1}(Q_{n+1}+Q_n)}\geq\frac{\prod_{j=1}^n\sigma_j}{2(2\sigma_nQ_n)^2}\geq\frac{1}{2^{2n+3}\sigma_n^2\prod_{j=1}^n\sigma_j}\\&\geq\frac{1}{2^\alpha\cdots(n+1)^\alpha(n+1)^{2\alpha}2^{(3n+5)}}:=\varepsilon_n.\end{aligned}$$

同样地, 也可以得出

$$|I(\eta_1,\dots,\eta_n,\eta_n)|\geq\varepsilon_n.$$

因为 $\varepsilon_{n-1}\geq\varepsilon_n$, $m_n\sim 2\alpha n^{\alpha-1}$, 并注意到当 $n\to\infty$ 时, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\log k\to\infty$, 由引理 2.5 可得

$$\begin{aligned}\dim_H E&\geq\liminf_{n\to\infty}\frac{\log(m_1m_2\cdots m_n)}{-\log(m_{n+1}\varepsilon_{n+1})}\\&\geq\liminf_{n\to\infty}\frac{n\log 2\alpha+(\alpha-1)\log(n!)}{-\log((2\alpha(n+1)^{\alpha-1})[((n+2)!)^\alpha(n+2)^{2\alpha}2^{3n+8}]^{-1})}\\&\geq\liminf_{n\to\infty}\frac{n\log 2\alpha+(\alpha-1)\log(n!)}{-(\alpha-1)\log(n+1)+\alpha\log((n+2)!)+2\alpha\log(n+2)+(3n+8)\log 2}\\&=1-\frac{1}{\alpha}.\end{aligned}$$

所以 $\dim_H E(\alpha)\geq\dim_H E\geq 1-\frac{1}{\alpha}$.

### 3.2 维数的上界

为计算 $\dim_H E(\alpha)$ 的上界, 本节先给出一个关于排列组合的结果.

**定义 3.1**　令整数 $K \geq 1$, $n \geq 1$, 定义

$$N_n(K) = \sharp\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n : K \geq b_n \geq \cdots \geq b_1 \geq 1\},$$

其中 $\sharp$ 表示有限集合中元素的个数,

关于 $N_n(K)$, 有以下结果:

**引理 3.2** [5]　对于任意的 $K \geq 1$ 和 $n \geq 1$, 有

$$N_n(K) = \mathrm{C}_{n+K-1}^{K-1},$$

其中 $\mathrm{C}_j^i$ $(j \geq i)$ 表示从 $j$ 个不同的元素中选取 $i$ 个元素的组合数.

根据 $\alpha$ 取值的不同, 我们将集合 $E(\alpha)$ 维数上界的估计分为 $1 > \alpha > 0$ 和 $\alpha \geq 1$ 两部分.

**情形 1**　$1 > \alpha > 0$.

对于任意 $x \in E(\alpha)$ 以及任意小的 $\varepsilon > 0$ 满足 $1 > \alpha + \varepsilon > \alpha - \varepsilon > 0$, 我们总可以找到正整数 $M(x, \varepsilon)$, 使得

$$n^{\alpha+\varepsilon} \geq d_n(x) \geq n^{\alpha-\varepsilon} \geq 2$$

对于所有的 $n \geq M(x, \varepsilon)$ 都成立. 因此

$$E(\alpha) \subseteq \bigcup_{M \geq M_0} E_\varepsilon(\alpha, M),$$

其中 $M_0 = [2^{\frac{1}{\alpha-\varepsilon}}] + 1$ 且

$$E_\varepsilon(\alpha, M) = \{x \in [0,1] : n^{\alpha+\varepsilon} \geq b_n(x) \geq 2,\ \forall\, n \geq M\}.$$

取定 $M \geq M_0$, 由 $E_\varepsilon(\alpha, M)$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(\alpha, M) &= \bigcap_{n \geq M} \{x \in [0,1] : n^{\alpha+\varepsilon} \geq b_n(x) \geq 2\} \\ &= \bigcap_{n \geq M} \bigcup_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathscr{C}_n} I(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \end{aligned}$$

其中 $\mathscr{C}_n = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathscr{A}_n : n^{\alpha+\varepsilon} \geq \sigma_n \geq \cdots \sigma_M \geq 2\}$.

对于任意的 $n \geq M$, 显然 $\{I(\sigma_1, \dots, \sigma_n) : (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathscr{C}_n\}$ 是 $E_\varepsilon(\alpha, M)$ 的一个覆盖. 由于 $\alpha + \varepsilon < 1$, 因此对于足够大的 $n$, 有 $n^{\alpha+\varepsilon} \ll n$, 结合引理 3.2 可知

$$\sharp\mathscr{C}_n \leq N_n([n^{\alpha+\varepsilon}]) = \frac{(n+1)\cdots(n+[n^{\alpha+\varepsilon}]-1)}{([n^{\alpha+\varepsilon}]-1)!} \leq (n + n^{\alpha+\varepsilon})^{n^{\alpha+\varepsilon}}.$$

又因为

$$|I(\sigma_1, \dots, \sigma_n)| = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \sigma_j}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})} \leq \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \sigma_j}{2(Q_{n-1})^2} \leq \frac{1}{2(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})} \leq \frac{1}{2 \cdot 2^{n-M}},$$

我们可以得到, 对于所有的 $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathscr{C}_n$, 有

$$\dim_H(E_\varepsilon(\alpha, M)) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{\log(\sharp\mathscr{C}_n)}{-\log 2^{-(n-M)}} \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{n^{\alpha+\varepsilon} \log(n + n^{\alpha+\varepsilon})}{(n-M)\log 2} = 0.$$

所以

$$\dim_H E(\alpha) \leq \sup_{M \geq M_0} \dim_H E_\varepsilon(\alpha, M) = 0.$$

**情形 2** $\alpha \geq 1$.

由集合 $E(\alpha)$ 的定义, 对于任意的 $x \in E(\alpha)$ 以及任意小的 $0 < \varepsilon < \alpha$, 都存在正整数 $\tilde{M}(x,\varepsilon)$ 使得对于任意的 $n \geq \tilde{M}(x,\varepsilon)$, 有 $n^{\alpha-\varepsilon} \leq b_n(x) \leq n^{\alpha+\varepsilon}$. 因此

$$E(\alpha) \subseteq \bigcup_{\tilde{M}\geq 2} \tilde{E}_\varepsilon(\alpha,\tilde{M}),$$

其中 $\tilde{E}_\varepsilon(\alpha,\tilde{M}) = \{x \in (0,1) : n^{\alpha-\varepsilon} \leq b_n(x) \leq n^{\alpha+\varepsilon},\ \forall n \geq \tilde{M}\}$.

固定 $\tilde{M} \geq 2$, 由 $\tilde{E}_\varepsilon(\alpha,\tilde{M})$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned}\tilde{E}_\varepsilon(\alpha,\tilde{M}) &= \bigcap_{n\geq\tilde{M}} \{x \in (0,1) : k^{\alpha-\varepsilon} \leq b_k(x) \leq k^{\alpha+\varepsilon},\ \forall \tilde{M} \leq k \leq n\} \\ &= \bigcap_{n\geq\tilde{M}} \bigcup_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in\tilde{\mathscr{C}_n}(\tilde{M})} I(\sigma_1,\ldots,\sigma_n),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\mathscr{C}_n}(\tilde{M}) = \{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in \mathscr{A}_n : k^{\alpha-\varepsilon} \leq \sigma_k(x) \leq k^{\alpha+\varepsilon},\ \forall \tilde{M} \leq k \leq n\}$. 因此, 对于任意的 $n \geq \tilde{M}$, $\{I(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) : (\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in \tilde{\mathscr{C}_n}(\tilde{M})\}$ 构成 $\tilde{E}_\varepsilon(\alpha,\tilde{M})$ 的一个覆盖, 再由引理 3.2 可得

$$\sharp\tilde{\mathscr{C}_n}(\tilde{M}) \leq N_n([n^{\alpha+\varepsilon}]) = C^n_{n+[n^{\alpha+\varepsilon}]-1} = \frac{([n^{\alpha+\varepsilon}])\cdots(n+[n^{\alpha+\varepsilon}]-1)}{n!} \leq \frac{(n+n^{\alpha+\varepsilon})^n}{n!}.$$

注意到

$$\begin{aligned}|I(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)| &= \frac{\prod_{j=1}^{n-1}\sigma_j}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})} \leq \frac{\prod_{j=1}^{n-1}\sigma_j}{2(Q_{n-1})^2} \leq \frac{1}{2(\sigma_1\cdots\sigma_{n-1})} \leq \frac{1}{2(\tilde{M}^{\alpha-\varepsilon}\cdots n^{\alpha-\varepsilon})} \\ &\leq \frac{1}{(\tilde{M}(\tilde{M}+1)\cdots n)^{\alpha-\varepsilon}},\end{aligned}$$

由斯特林公式, 当 $n\to\infty$ 时, $n! \sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$, 我们得到

$$\begin{aligned}\dim_H(\tilde{E}_\varepsilon(\alpha,\tilde{M})) &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\sharp\tilde{\mathscr{C}_n}(\tilde{M}))}{-\log(\tilde{M}\cdots n)^{-(\alpha-\varepsilon)}} = \liminf_{n\to\infty} \frac{n\log(n^{\alpha+\varepsilon}+n)-\log(n!)}{(\alpha-\varepsilon)\log(\tilde{M}\cdots n)} \\ &= \liminf_{n\to\infty} \frac{n\log(n^{\alpha+\varepsilon})-\log(n!)}{(\alpha-\varepsilon)\log(n!)} = \frac{\alpha+\varepsilon-1}{\alpha-\varepsilon}.\end{aligned}$$

所以

$$\dim_H E(\alpha) \leq \sup_{\tilde{M}\geq 2} \dim_H \tilde{E}_\varepsilon(\alpha,\tilde{M}) \leq \frac{\alpha+\varepsilon-1}{\alpha-\varepsilon}.$$

取 $\epsilon \to 0^+$, 则有 $\dim_H E(\alpha) \leq 1 - 1/\alpha$.

## 参考文献


[1] Falconer K., Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1990.

[2] Galambos J., Representations of Real Numbers by Infinite Series, Lecture Notes in Math., Vol. 502, Springer, 1976.

[3] Hartono Y., Kraaikamp C., Schweiger F., Algebraic and ergodic properties of a new continued fraction algorithm with non-decreasing partial quotients, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 2002, **14**(2): 497–516.

[4] Kraaikamp C., Wu J., On a new continued fraction expansion with non-decreasing partial quotients, *Monatsh. Math.*, 2004, **143**(4): 285–298.

[5] Shang L., Wu M., Slow growth rate of the digits in Engel expansions, *Fractals*, 2020, **28**(3): 2050047.