

文章编号: 0583-1431(2021)04-0669-08

文献标识码: A

自仿地毯上的平均测地距离

顾江文 王松静 赵璐铭 奚李峰

宁波大学数学系 宁波 315211

E-mail: 1811071001@nbu.edu.cn; wangsongjing@nbu.edu.cn;

146330645@nbu.edu.cn; xilifeng@nbu.edu.cn

摘 要 Bedford–McMullen 地毯在分形几何的研究中占有重要地位. 尽管该自仿分形缺乏自相似性, 我们利用有限模式技术, 得到了 Bedford–McMullen 地毯上的平均测地距离.

关键词 分形; 自仿地毯; 测地距离

MR(2010) 主题分类 28A80

中图分类 O174.12

Average Geodesic Distance of a Self-affine Carpet

Jiang Wen GU Song Jing WANG Lu Ming ZHAO Li Feng XI

Department of Mathematics, Ningbo University, Ningbo 315211, P. R. China

E-mail: 1811071001@nbu.edu.cn; wangsongjing@nbu.edu.cn;

146330645@nbu.edu.cn; xilifeng@nbu.edu.cn

Abstract The Bedford–McMullen carpet plays an important role in fractal geometry. Although any self-affine carpet is not self-similar, we can obtain the average geodesic distance on the carpet using the technique named finite pattern.

Keywords fractal; self-affine carpet; geodesic distance

MR(2010) Subject Classification 28A80

Chinese Library Classification O174.12

1 引言

在分形上研究测地距离是一个有趣的问题, 值得一提的是, 尽管在分形上没有光滑结构, 但其上总是存在着恰当的度量和测度结构. 分形上的内蕴距离^[7, 8], 与其上 Dirichlet 型密切相关, 因此起着至关重要的作用. 而对于某些自相似分形, Hino^[4] 证明了测地距离与内蕴距离完全一

收稿日期: 2018-06-20; 接受日期: 2020-12-17

基金项目: 国家自然科学基金 (11831007, 11771226, 11371329, 11471124); 教育部新世纪优秀人才支持计划; 浙江省哲学社会科学规划课题 (17NDJC108YB) 以及宁波大学王宽诚幸福基金资助项目

通讯作者: 奚李峰

致, 然而并没有计算出相应分形平均测地距离的精确值.

另一方面, 在化学图论^[2]中, 拓扑指标是一类图上的同构不变量. 首个著名的拓扑指标^[14]“Wiener 和”定义如下

$$W(G) = \sum_{\{x,y\} \subset G} d(x,y).$$

实验表明, 该拓扑指标与烷烃的沸点有关. 事实上, 在小世界复杂网络^[13]的研究中, 图的平均测地距离是 $W(G)/C_{\#G}^2$, 而具有小世界效应的复杂网络总是具有较小的平均测地距离. 有关分形网络和图上的 Ricci 曲率见文献 [3–5].

基于自相似性质, 奚李峰等计算了 Sierpinski 垫片^[12]上的平均测地距离, 并给出了相应的 Sierpinski 网络平均距离的渐近公式. 一个自然的问题产生了, 如何对具有代表性的、缺乏自相似性的自仿分形, 计算其平均测地距离.

Bedford–McMullen 地毯是由 Bedford^[1]和 McMullen^[10]引入的平面上的自仿分形. 本文针对一个具有代表性 (即文 [9] 中引入的 Manhattan 性质) 的对称 Bedford–McMullen 地毯, 研究其上的平均测地距离. 令 $\{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2\} \setminus \{(2, 1)\} = \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{14}$ 且

$$T_i(x, y) = (x/5, y/3) + (a_i/5, b_i/3)$$

为压缩仿射. 于是 $K = \bigcup_{i=1}^{14} T_i(K)$ 作为 Bedford–McMullen 地毯, 其 Hausdorff 维数为

$$\dim_H K = \log_3(2 \cdot 5^{\log_5 3} + 4^{\log_5 3}) = 1.956 \dots,$$

而盒维数为 $\dim_B K = \log_3 3 + \log_5 \frac{14}{3} = 1.957 \dots$. 注意到 $\dim_H K \neq \dim_B K$. 记 $K_i = T_i(K)$, 如图 1 所示.

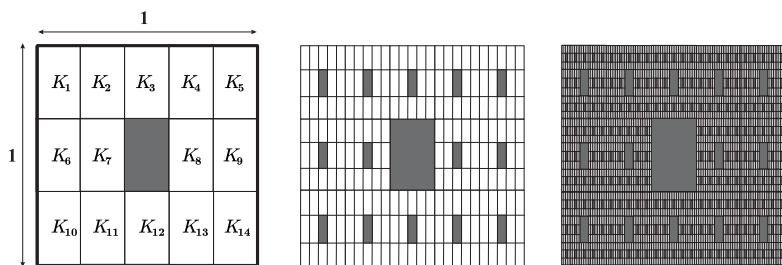


图 1 一个 Bedford–McMullen 地毯的前三阶构造

令 $\mu = \sum_{i=1}^{14} \frac{1}{14} \mu \circ T_i^{-1}$ 为 K 上的不变概率测度, $d(p, q)$ 是在 K 上的 p 和 q 两点之间的测地距离, 也就是说 $d(p, q) = \inf\{\mathcal{H}^1(\gamma) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow K \text{ 连续, 满足 } \gamma(0) = p \text{ 且 } \gamma(1) = q\}$, 其中 $\mathcal{H}^1(\gamma)$ 为曲线 γ 的长度 (1 维 Hausdorff 测度). 令平均测地距离为

$$l = \int_{p, q \in K} d(p, q) d\mu(p) d\mu(q).$$

定理 1.1 自仿集 K 上的平均测地距离

$$l = \frac{6334459154473}{9392390348250} = 0.6744 \dots.$$

本文面临的挑战是, 与 Sierpinski 垫片^[12]截然不同, 自仿地毯不具有自相似性. 然而, 尽管自仿地毯不是自相似的, 我们却发现测地线在测度意义下仅仅包括两个方向 (水平或垂直), 并且在每个方向上都具有自相似性和有限模式. 有限模式请参考文献 [12].

2 预备

设原点 $O = (0, 0)$, 由文 [9] 可知 K 满足 Manhattan 性质, 即 K 一阶框架 $\bigcup_i T_i(\partial[0, 1]^2)$ 中任意节点 (x, y) (某个 $T_i(\partial[0, 1]^2)$ 的顶点之一) 在一阶框架空间中到原点的测地距离等于 $x + y$, 因此有

引理 2.1 若 $p = (x, y) \in K(\subset [0, 1]^2)$, 则

$$d(O, p) = x + y,$$

即我们可以在 K 中找到一个连接 O 与 p 的 (有限或无限) 阶梯.

令 $l = \int_{p, q \in K} d(p, q) d\mu(p) d\mu(q)$, 而 $P_X, P_Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 分别为往 x, y 轴的投影映射, 即

$$P_X(x, y) = x, \quad P_Y(x, y) = y.$$

设 $\gamma : [0, 1] \rightarrow K$ 为满足 $\gamma(0) = p$ 且 $\gamma(1) = q$ 的测地线, 我们令

$$d_h(p, q) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^n |P_X(\gamma(t_{i+1})) - P_X(\gamma(t_i))| : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1 \right\},$$

$$d_v(p, q) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^n |P_Y(\gamma(t_{i+1})) - P_Y(\gamma(t_i))| : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1 \right\},$$

这里 h 和 v 分别表示水平和垂直方向. 我们设

$$l_h = \int_{p, q \in K} d_h(p, q) d\mu(p) d\mu(q), \quad l_v = \int_{p, q \in K} d_v(p, q) d\mu(p) d\mu(q).$$

由文献 [9], 我们有如下命题.

命题 2.2 $l = l_v + l_h$.

利用自相似性可知, 对于 $p, q \in K_i$ 以及任意 Borel 集 $B \subset K_i$, 我们有

$$d_v(p, q) = \frac{1}{3} d_v(T_i^{-1}p, T_i^{-1}q), \quad \mu(B) = \frac{1}{14} \mu(T_i^{-1}B).$$

因此

$$\begin{aligned} l_v &= \int d_v(p, q) d\mu(p) d\mu(q) \\ &= \sum_{i \neq j} \int_{p \in K_i, q \in K_j} d_v(p, q) d\mu(p) d\mu(q) + \sum_i \int_{p, q \in K_i} d_v(p, q) d\mu(p) d\mu(q) \\ &= \sum_{i \neq j} \int_{(p, q) \in K_i \times K_j} d_v(p, q) d\mu(p) d\mu(q) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{14} \right)^2 (14l_v). \end{aligned}$$

以同样的方式, 我们也得到

$$l_h = \sum_{i \neq j} \int_{(p, q) \in K_i \times K_j} d_h(p, q) d\mu(p) d\mu(q) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{14} \right)^2 (14l_h).$$

因此, 我们得到如下引理:

引理 2.3 在水平和垂直方向,

$$\frac{41}{42} l_v = \sum_{i \neq j} \int_{(p, q) \in K_i \times K_j} d_v(p, q) d\mu(p) d\mu(q), \quad \frac{69}{70} l_h = \sum_{i \neq j} \int_{(p, q) \in K_i \times K_j} d_h(p, q) d\mu(p) d\mu(q).$$

2.1 垂直方向的有限模式

模式 0 假设 $K' = f(K)$, 其中 $f(z) = z + (a, b)$ 是对 K 的一个平移, 使得对于任意的 $p \in K$ 与 $q \in K'$, 连接 p 和 q 的曲线 $\gamma_{p,q}$ 必须包括一条从 K 的一个顶点到 K' 的一个顶点的路 γ' (该路径与 p 和 q 无关) 并且满足 $P_Y(\gamma')$ 恰好是一个单点. 如图 2 所示, 我们赋予 K 以编码 $\{1, \dots, 14\}$, 且 K' 以编码 $\{a, \dots, n\}$.

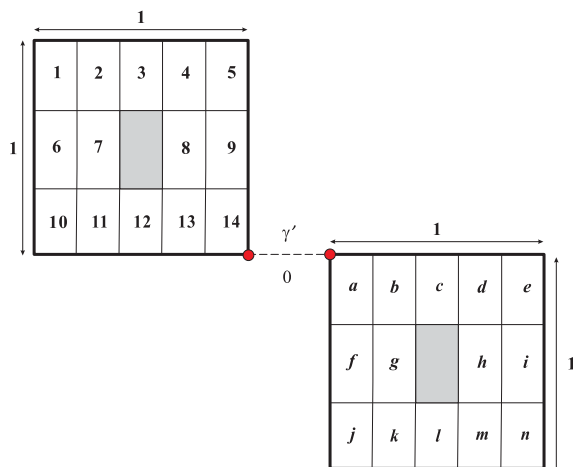


图 2 垂直方向的模式 0

令 $K \cup K' \cup \gamma'$ 为一个空间, 且记 $\tilde{d}_v^0(p, q)$ 为该空间中点 p 和 q 之间的垂直测地距离. 令

$$l_v^0 = \int_{(p,q) \in K \times K'} \tilde{d}_v^0(p, q) d\mu(p) d(f_{\#}\mu)(q),$$

这里 $(f_{\#}\mu)(B) = \mu(f^{-1}B)$. 因此我们有

$$l_v^0 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 I_v^0 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 (196l_v^0 + 392),$$

此处

$$\begin{aligned} I_v^0 &= (5 \cdot 5)l_v^0 + (4 \cdot 5 + 5 \cdot 4)(l_v^0 + 1) + (5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5)(l_v^0 + 2) \\ &\quad + (4 \cdot 5 + 5 \cdot 4)(l_v^0 + 3) + (5 \cdot 5)(l_v^0 + 4), \end{aligned}$$

且在上述方程的右边 $5 \cdot 5 = \#(\{10, \dots, 14\} \times \{a, \dots, e\})$, $4 \cdot 5 = \#(\{6, 7, 8, 9\} \times \{a, \dots, e\})$ 且 $5 \cdot 4 = \#(\{10, \dots, 14\} \times \{f, g, h, i\})$ 等.

模式 1 假设 $K' = g(K)$, 此处 $g(z) = z + (1, 0)$ 且赋予 K' 以编码 $\{a, \dots, n\}$, 如图 3 所示.

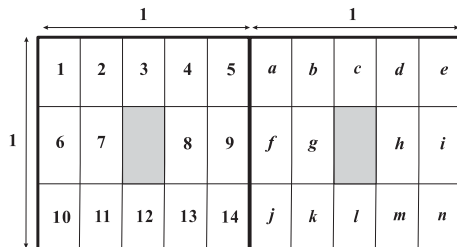


图 3 垂直方向的模式 1

利用引理 2.1, 我们发现该积分与 k 和 m 均无关, 于是我们得到如下引理.

引理 2.5 $l_v^{3,k,m} = l_v^{3,k',m'}$ 对任意的 $k, k', m, m' \geq 1$ 成立.

令 $l_v^3 = l_v^{3,k,m}$.

2.2 水平方向的有限模式

类似于对垂直方向的讨论, 我们有 l_h^0, l_h^1, l_h^2 和 l_h^3 . 具体请参见图 6 和图 7.

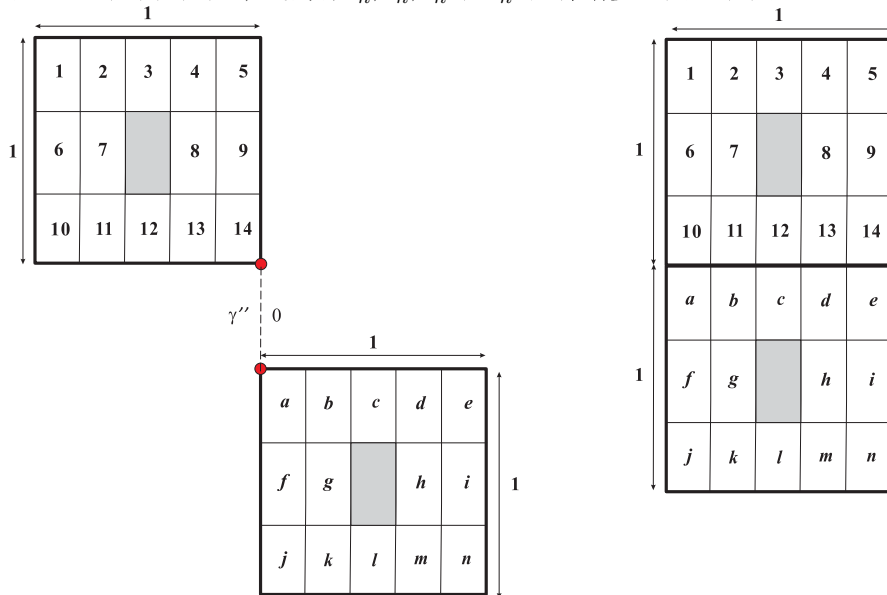


图 6 水平方向的模式 0 (左) 和模式 1 (右)

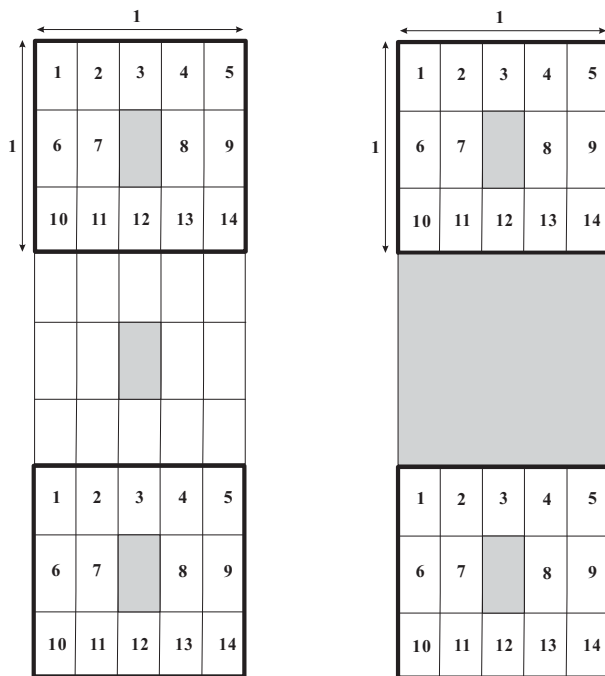


图 7 水平方向的模式 2 (左) 和模式 3 (右)

3 定理 1.1 的证明

3.1 垂直方向

我们有

$$l_v^1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 I_v^1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 (130l_v^0 + 3l_v^1 + 51l_v^2 + 12l_v^3 + 50),$$

此处

$$\begin{aligned} I_v^1 &= (5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5)l_v^0 + (5 \cdot 5 + 5 \cdot 5)(l_v^0 + 1) + 3l_v^1 \\ &\quad + (24 + 3 + 24)l_v^2 + 12l_v^3. \end{aligned}$$

进一步得到

$$l_v^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 I_v^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 (130l_v^0 + 50l_v^2 + 16l_v^3 + 212),$$

此处

$$\begin{aligned} I_v^2 &= (5 \cdot 5 + 5 \cdot 5)l_v^0 + (5 \cdot 4 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 4)(l_v^0 + 1) \\ &\quad + (5 \cdot 5 + 5 \cdot 5)(l_v^2 + 2) + (4 \cdot 4)(l_v^3 + 2). \end{aligned}$$

最后, 我们得到

$$l_v^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 I_v^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 (130l_v^0 + 66l_v^3 + 212),$$

这里

$$\begin{aligned} I_v^3 &= (5 \cdot 5 + 5 \cdot 5)l_v^0 + (5 \cdot 4 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 4)(l_v^0 + 1) \\ &\quad + (5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4)(l_v^3 + 2). \end{aligned}$$

3.2 水平方向

注意到

$$l_h^0 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 I_h^0 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 (196l_h^0 + 784),$$

此处

$$\begin{aligned} I_h^0 &= (3 \cdot 3)l_h^0 + (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3)(l_h^0 + 1) \\ &\quad + (2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2)(l_h^0 + 2) \\ &\quad + (3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3)(l_h^0 + 3) \\ &\quad + (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3)(l_h^0 + 4) \\ &\quad + (3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3)(l_h^0 + 5) \\ &\quad + (3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2)(l_h^0 + 6) \\ &\quad + (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3)(l_h^0 + 7) + (3 \cdot 3)(l_h^0 + 8). \end{aligned}$$

采用同样方式, 我们得到

$$l_h^1 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 (156l_h^0 + 5l_h^1 + 32l_h^2 + 3l_h^3 + 168),$$

$$l_h^2 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 (156l_h^0 + 36l_h^2 + 4l_h^3 + 168),$$

$$l_h^3 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^2 (156l_h^0 + 40l_h^3 + 460).$$

3.3 定理 1.1 的证明

通过以上的讨论, 我们得到

$$l_h^0 = 1, \quad l_h^1 = \frac{1290284}{373912}, \quad l_h^2 = \frac{26477}{76700}, \quad l_h^3 = \frac{152}{325}, \quad l_h = \frac{622972297}{1805997375},$$

$$l_v^0 = 1, \quad l_v^1 = \frac{105314}{304239}, \quad l_v^2 = \frac{8110}{23403}, \quad l_v^3 = \frac{35}{87}, \quad l_v = \frac{4210085}{12778038}.$$

由命题 2.2 和引理 2.3, 我们有

$$l = l_v + l_h = \frac{6334459154473}{9392390348250} = 0.6744 \dots$$

致谢 感谢宁波大学俞周瑜同学编程检验了文中的所有计算.

参 考 文 献

- [1] Bedford T., Crinkly curves, Markov partitions and box dimension in self-similar sets, Ph.D. Thesis, University of Warwick, 1984.
- [2] Bonchev D., Rouvray D. H., Chemical Graph Theory: Introduction and Fundamentals, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1991.
- [3] Dai M. F., Ye D. D., Hou J., et al., Scaling of average weighted receiving time on double-weighted Koch networks, *Fractals*, 2015, **23**(2): 1550011, 7 pp.
- [4] Hino M., Geodesic distances and intrinsic distances on some fractal sets, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 2013, **50**(2): 181–205.
- [5] Hua B. B., Lin Y., Stochastic completeness for graphs with curvature dimension conditions, *Adv. Math.*, 2017, **306**: 279–302.
- [6] Huang D. W., Yu Z. G., Anh V., Multifractal analysis and topological properties of a new family of weighted Koch networks, *Phys. A*, 2017, **469**: 695–705.
- [7] Kigami J., Analysis on Fractals, Cambridge Tracts in Math. 143, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [8] Lapidus M., Sarhad J., Dirac operators and geodesic metric on the harmonic Sierpinski gasket and other fractal sets, *J. Noncommut. Geom.*, 2014, **8**(4): 947–985.
- [9] Li Y. M., Xi L. F., Manhattan property of geodesic paths on self-affine carpets, *Arch. Math.*, 2018, **111**(3): 279–285.
- [10] McMullen C., The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets, *Nagoya Math. J.*, 1984, **96**: 1–9.
- [11] Sun Y., Dai M. F., Sun Y. Q., et al., Scaling of the average receiving time on a family of weighted hierarchical networks, *Fractals*, 2016, **24**(3): 1650038, 8 pp.
- [12] Wang S. J., Yu Z. Y., Xi L. F., Average geodesic distance of Sierpinski gasket and Sierpinski networks, *Fractals*, 2017, **25**(5): 1750044 8 pp.
- [13] Watts D. J., Strogatz S. H., Collective dynamics of ‘small-world’ networks, *Nature*, 1998, **393**: 440–442.
- [14] Wiener H., Structural determination of paraffin boiling points, *J. Amer. Chem. Soc.*, 1947, **69**: 17–20.