第64卷第4期 数学学报中文版 Vol.64, No.4
2021年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2021

**文章编号:** 0583-1431(2021)04-0627-10 **文献标识码: A**

# 积分估计与正规权 Dirichlet 空间上的 Cesàro 型算子

唐鹏程 吕睿昕 张学军

湖南师范大学数学与统计学院 长沙 410006
E-mail: 1228928716@qq.com; 1019238929@qq.com; xuejunttt@263.net

**摘 要** 设 $\mu$ 是 $[0,1)$ 上的一个正规函数, 本文给出了正规权测度下单位球内单变点球体积分的部分情况下的双向估计, 在特殊情况下给出了所有指标情形的双向估计. 作为一个应用, 本文还给出了一些情况下正规权 Dirichlet 空间上 Cesàro 型算子有界或紧的充要条件.

**关键词** 积分估计; 正规权测度; 正规权 Dirichlet 空间; Cesàro 型算子; 有界性和紧性
**MR(2010) 主题分类** 32A37, 47B38
**中图分类** O174.56

## An Integral Estimate and Cesàro Type Operators on Normal Weight Dirichlet Spaces

Peng Cheng TANG Rui Xin LV Xue Jun ZHANG

*College of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha* 410006*, P. R. China*
*E-mail*: 1228928716*@qq.com*; 1019238929*@qq.com*; *xuejunttt@*263*.net*

**Abstract** Let $\mu$ be a normal function on $[0,1)$. In this paper, the authors give the bidirectional estimates of the volume integral of a single variable point in the unit ball under the normal weight measure in some cases, and give the bidirectional estimates for all indicators in special cases. As an application, the authors give some necessary and sufficient conditions for the boundedness or compactness of Cesàro type operator on normal weight Dirichlet spaces.

**Keywords** integral estimate; normal weight measure; normal weight Dirichlet space; Cesàro type operator; boundedness and compactness
**MR(2010) Subject Classification** 32A37, 47B38
**Chinese Library Classification** O174.56

收稿日期: 2020-05-02; 接受日期: 2020-09-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11942109); 湖南省研究生科研创新项目 (CX2018B286)
通讯作者: 张学军

## 1 问题的引进和定义

设 $B$ 表示 $n$ 维复空间 $\mathbf{C^n}$ 中的单位球, $dv$ 表示 $B$ 上规范化的体测度. 对 $\alpha > -1$, 记 $dv_\alpha(z) = c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha dv(z)$, 其中常数 $c_\alpha$, 使得 $v_\alpha(B) = 1$. 设 $z = (z_1,\ldots,z_n)$ 和 $w = (w_1,\ldots,w_n)$ 为 $\mathbf{C^n}$ 中的两点, 二者的内积定义为 $\langle z,w\rangle = z_1\overline{w_1}+\cdots+z_n\overline{w_n}$. 记 $H(B)$ 为 $B$ 上全纯函数全体. 对 $f\in H(B)$, 其梯度 $\nabla f$ 和径向导数 $Rf$ 分别定义为

$$\nabla f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z),\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_n}(z)\right),\quad Rf(z) = \langle\nabla f(z),\overline{z}\rangle = \sum_{j=1}^n z_j\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\quad (z\in B).$$

用记号 $E\lesssim F$ 和 $E\gtrsim F$ 分别表示存在常数 $c>0$, 使得 $E\le cF$ 和 $E\ge cF$. 如果 $E\lesssim F$ 且 $E\gtrsim F$, 我们称 $E$ 等价于 $F$, 记为 $E\asymp F$.

**定义 1.1** $[0,1)$ 上一个正的连续函数 $\mu$ 称为是正规的, 如果存在常数 $0<a\le b$ 以及 $0\le r_0<1$, 使得 $\frac{\mu(r)}{(1-r)^a}$ 在 $[r_0,1)$ 上递减且 $\frac{\mu(r)}{(1-r)^b}$ 在 $[r_0,1)$ 上递增.

例如

$$\mu(r) = (1-r^2)\left(\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-r^2}\right)^{-1},$$

$$\mu(r) = (1-r^2)^\alpha\log^\beta\frac{\mathrm{e}}{1-r^2}\quad (\alpha>0,\ \beta\text{为实数}),$$

$$\mu(r) = \begin{cases}\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}(1-r)^{\frac12}, & 1-\dfrac1n\le r<1-\dfrac12\left(\dfrac1n+\dfrac1{n+1}\right),\\[2mm] \dfrac{(2n)!!(n+1)}{(2n+1)!!}(1-r)^{\frac32}, & 1-\dfrac12\left(\dfrac1n+\dfrac1{n+1}\right)\le r<1-\dfrac1{n+1},\end{cases}\quad (n=1,2,\ldots)$$

等都是此种形式的正规函数. 不失一般性, 本文中不妨设 $r_0=0$.

**定义 1.2** 设 $\mu$ 为 $[0,1)$ 上的正规函数, $p>0$, 若 $f\in H(B)$ 且

$$\|f\|_\mu^p = \int_B |Rf(z)|^p\,\frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)<\infty,$$

我们称 $f$ 属于正规权 Dirichlet 空间 $D^p(\mu)$. 当 $p\ge1$ 时, $D^p(\mu)$ 依范数 $\|f\|_{D^p(\mu)} = |f(0)|+\|f\|_\mu$ 构成一个 Banach 空间; 当 $0<p<1$ 时, $D^p(\mu)$ 依距离 $d(f,g) = \|f-g\|_\mu^p$ 构成一个完备的距离空间. 特别地, 当 $\mu(r) = (1-r^2)^{\alpha+1}$ $(\alpha>-1)$ 时, $D^p(\mu)$ 就是加权 Dirichlet 空间 $D_\alpha^p$; 当 $\mu(r) = 1-r^2$ 时, $D^p(\mu)$ 就是 Dirichlet 空间 $D^p$.

积分估计是函数论以及其他数学学科计算中必不可少的. 对于复球内单变点的球体积分估计, 1980 年, Rudin 在文 [9] 中给出了如下结果:

**命题 A** 设 $\alpha>-1$ 和 $z\in B$, $c$ 为实数, 记

$$J(z) = \int_B\frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha+c}}dv(w),$$

则

(1) 当 $c<0$ 时, $J(z)\asymp1$.

(2) 当 $c=0$ 时, $J(z)\asymp\log\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}$.

(3) 当 $c>0$ 时, $J(z)\asymp\frac{1}{(1-|z|^2)^c}$.

文 [9, 命题 1.4.10] 的应用非常广泛, 将其推广是件很自然的事. 实际上就其推广可以做三方面的考虑: 一是球体和球面积分估计可以从单变点推广到多变点 (双变点情形已经做过一些工作,

见文 [5, 7, 8, 16–18, 20]); 二是球体积分估计可以将测度进行推广; 三是精确考虑双向估计两端的系数和参数的关系. 本文的主要工作之一就是将测度从 $(1-|z|^2)^\alpha dv(z)$ 推广到 $\frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)$, 然后给出球体积分两端主体部分相同 (仅系数不同) 的双向估计.

**定义 1.3** 设 $g\in H(B)$ 且 $g(0)=0$, 定义 $H(B)$ 上如下 Cesàro 型算子

$$T_gf(z)=\int_0^1 f(tz)Rg(tz)\,\frac{1}{t}dt\quad (f\in H(B),\, z\in B).$$

Cesàro 型算子最初来源于单复变中单位圆上解析函数系数平均问题, 即

$$\begin{aligned}f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j\to Tf(z)&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_0+\cdots+a_j}{j+1}z^j\\&=\frac{1}{z}\int_0^z\frac{f(t)}{1-t}\,dt=\frac{1}{z}\int_0^z f(t)\bigg(\log\frac{1}{1-t}\bigg)'dt.\end{aligned}$$

后来, 人们把 $\log\frac{1}{1-t}$ 推广到单位圆盘上一般的解析函数 $g(t)$, 进而推广到单位球, 最近还做了更一般的推广. 无论在单复变还是多复变情形, 已经有大量研究结果, 如文献 [1–4, 6, 10–15, 21]. 作为积分估计的一点应用, 本文另一个主要工作就是讨论 $T_g$ 在 $D^p(\mu)$ 上有界或紧的条件.

## 2 一些引理

为了证明主要结果, 首先给出几个引理:

**引理 2.1** 设 $t>-1$ 和 $z\in B$, $c$ 为实数, 记

$$J(z)=\int_B\frac{(1-|w|^2)^t}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+t+c}}dv(w),$$

则

(1) 当 $c<0$ 时, $J(z)\asymp 1$;

(2) 当 $c=0$ 时, $J(z)\asymp\log\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}$;

(3) 当 $c>0$ 时, $J(z)\asymp\frac{1}{(1-|z|^2)^c}$.

**证明** 见文 [9, 命题 1.4.10].

**引理 2.2** 设 $r>0$ 和 $w\in B$, $D(w,r)$ 表示以 $w$ 为中心以 $r$ 为半径的 Bergman 球, $\mu$ 是 $[0,1)$ 上的正规函数, $a$ 和 $b$ 是 $\mu$ 定义中的那两个参数, 则有

(1) 当 $z\in D(w,r)$, 则 $\mu(|z|)\asymp\mu(|w|)$;

(2) 当 $z\in B$ 时, $\frac{\mu(|z|)}{\mu(|w|)}\le\big(\frac{1-|z|}{1-|w|}\big)^a+\big(\frac{1-|z|}{1-|w|}\big)^b$.

**证明** 见文 [19, 引理 2.2].

**引理 2.3** 设 $k$ 为实数, $\delta>-1$ 且 $c\ge 0$. 那么积分

$$I_\rho=\int_0^1\frac{(1-r)^\delta}{(1-r\rho)^{\delta+1+c}}\log^k\frac{\mathrm{e}}{1-r}\,dr\quad(0\le\rho<1)$$

具有下列估计:

(1) 当 $c=0$ 且 $k<-1$ 时, $I_\rho\asymp 1$;

(2) 当 $c=0$ 且 $k=-1$ 时, $I_\rho\asymp\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-\rho^2}$;

(3) 当 $c=0$ 且 $k>-1$ 时, $I_\rho\asymp\log^{k+1}\frac{\mathrm{e}}{1-\rho^2}$;

(4) 当 $c>0$ 时, $I_\rho\asymp\frac{1}{(1-\rho^2)^c}\log^k\frac{\mathrm{e}}{1-\rho^2}$.

**证明** 当 $c=0$ 且 $k>-1$ 或 $c>0$ 时, 文 [17, 引理 2.2] 已经给出了证明, 下面只需证明 $c=0$ 且 $k\leq -1$ 时的结果.

我们知道, 当 $\rho>1-\frac{\mathrm{e}}{8}$ 时, 做变量替换 $x=\frac{\rho(1-r)}{1-\rho r}$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-r)^\delta}{(1-r\rho)^{\delta+1}}\log^k\frac{\mathrm{e}}{1-r}dr &= \int_0^\rho \frac{x^\delta}{\rho^{\delta+1}(1-x)}\log^k\frac{e\rho(1-x)}{(1-\rho)x}dx\\ &\asymp \int_0^{\frac12} x^\delta \log^k\frac{\mathrm{e}}{(1-\rho)x}\,dx+\int_{\frac12}^\rho \frac{1}{1-x}\log^k\frac{e(1-x)}{1-\rho}dx\\ &= \frac{1}{(1-\rho)^{\delta+1}}\int_0^{\frac{1-\rho}{2}} y^\delta\log^k\frac{\mathrm{e}}{y}dy+\int_{2(1-\rho)}^1\frac1y\log^k\frac{\mathrm{e}}{y}\,dy.\end{aligned}$$

很显然

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho\to1^-}\frac{\int_0^{\frac{1-\rho}{2}} y^\delta\log^k\frac{\mathrm{e}}{y}dy}{(1-\rho)^{\delta+1}\log^k\frac{\mathrm{e}}{1-\rho}}=\frac{1}{(\delta+1)2^{\delta+1}}\\ &\qquad\Rightarrow \frac{1}{(1-\rho)^{\delta+1}}\int_0^{\frac{1-\rho}{2}} y^\delta\log^k\frac{\mathrm{e}}{y}dy\asymp\log^k\frac{\mathrm{e}}{1-\rho^2}\quad(\rho\to1^-).\end{aligned}\tag{2.1}$$

另一方面, 我们还有

$$\int_{2(1-\rho)}^1\frac1y\log^{-1}\frac{\mathrm{e}}{y}\,dy=\log\log\frac{\mathrm{e}}{2(1-\rho)}\asymp\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-\rho^2}\quad(\rho\to1^-).\tag{2.2}$$

此外, 当 $k<-1$ 时, 可得

$$\int_{2(1-\rho)}^1\frac1y\log^k\frac{\mathrm{e}}{y}\,dy\leq\int_0^1\frac1y\log^k\frac{\mathrm{e}}{y}\,dy=-\frac{1}{k+1}.\tag{2.3}$$

根据 (2.1)–(2.3) 式可得结论成立. 本引理证毕.

**引理 2.4** 设 $p>0$ 且 $\mu$ 为 $[0,1)$ 上的正规函数, 则当 $f\in D^p(\mu)$ 时,

$$|Rf(z)|\lesssim\frac{\|f\|_{D^p(\mu)}}{\mu^{\frac1p}(|z|)(1-|z|^2)^{\frac np}}\quad 对所有\ z\in B\ 成立.$$

**证明** 对任意 $z\in B$, 由文 [22, 引理 2.20 和 2.24] 以及引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned}|Rf(z)|^p&\lesssim\frac{1}{(1-|z|^2)^{n+1}}\int_{D(z,1)}|Rf(w)|^pdv(w)\\ &\asymp\frac{1}{\mu(|z|)(1-|z|^2)^n}\int_{D(z,1)}|Rf(w)|^p\frac{\mu(|w|)}{1-|w|^2}\,dv(w)\\ &\leq\frac{\|f\|^p_{D^p(\mu)}}{\mu(|z|)(1-|z|^2)^n}.\end{aligned}$$

本引理证毕.

**引理 2.5** 设 $p>0$ 且 $\mu$ 在 $[0,1)$ 上正规, 若 $\int_0^1\frac{dt}{\mu^{\frac1p}(t)(1-t^2)^{\frac np}}<\infty$, 序列 $\{f_j(z)\}$ 在 $D^p(\mu)$ 上有界, 且在 $B$ 上内闭一致收敛于 0, 则 $\{f_j(z)\}$ 在 $B$ 上一致收敛于 0.

**证明** 根据 $\int_0^1\frac{dt}{\mu^{\frac1p}(t)(1-t^2)^{\frac np}}<\infty$ 可知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\frac12<\delta<1$, 使得

$$\int_\delta^1\frac{dt}{\mu^{\frac1p}(t)(1-t^2)^{\frac np}}<\varepsilon.\tag{2.4}$$

$\{f_j(z)\}$ 在 $B$ 上内闭一致收敛于 0 易推 $\{|\nabla f_j(z)|\}$ 也在 $B$ 上内闭一致收敛于 0, 结合 $\{f_j(z)\}$ 在 $D^p(\mu)$ 上有界以及引理 2.4 还有 (2.4) 式知: 当 $|z|>\delta$ 时,

$$\begin{aligned}|f_j(z)| &\le |f_j(0)| + \int_0^1 \frac{|Rf_j(tz)|}{t}\,dt\\ &\lesssim |f_j(0)| + \int_0^{\frac{\delta}{|z|}} |\langle \nabla f_j(tz), \overline{z}\rangle|\,dt + \frac{|z|}{\delta}\int_{\frac{\delta}{|z|}}^1 \frac{\|f_j\|_{D^p(\mu)}}{\mu^{\frac{1}{p}}(t|z|)(1-t^2|z|^2)^{\frac{n}{p}}}\,dt\\ &\lesssim |f_j(0)| + \sup_{|w|\le\delta} |\nabla f_j(w)| + \varepsilon.\end{aligned}$$

这表明 $\sup_{z\in B}|f_j(z)| \lesssim \sup_{|z|\le\delta}|f_j(z)| + |f_j(0)| + \sup_{|w|\le\delta}|\nabla f_j(w)| + \varepsilon \to \varepsilon\ \ (j\to\infty)$. 由 $\varepsilon$ 的任意性可知命题成立. 本引理证毕.

## 3 主要结果及其证明

对于球内单变点球体积分, 下面将测度推广后给出一些双向估计. 在文 [22, 引理 1.23 和 2.20] 分别如下:

**引理 3.1** 由文 [22, 引理 1.23], 对任意 $z\in B$ 和 $r>0$, 我们有 $D(z,r)$ 的体积

$$v[D(z,r)] \asymp (1-|z|^2)^{n+1}.$$

**引理 3.2** 由文 [22, 引理 2.20], 对任意 $z\in B$ 和 $r>0$, 当 $w\in D(z,r)$ 时,

$$1-|w|^2 \asymp |1-\langle z,w\rangle| \asymp 1-|z|^2.$$

**命题 3.1** 设 $\mu$ 是 $[0,1)$ 上的正规函数, $a$ 和 $b$ 是 $\mu$ 定义中对应的那两个参数, $t$ 为实数且 $z$ 为 $B$ 中的点, 记

$$f(z) = \int_B \frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^t}\frac{\mu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w),$$

则有下列结果:

(1) 当 $t<n+a$ 时, $f(z)\asymp 1$;

(2) 当 $t>n+b$ 时, $f(z)\asymp \frac{\mu(|z|)}{(1-|z|^2)^{t-n}}$.

**证明** 当 $t<n+a$ 时, 根据引理 2.1, 2.2 可得

$$\int_B \frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^t}\frac{\mu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w) \le \int_B \frac{\mu(0)(1-|w|^2)^{a-1}}{|1-\langle z,w\rangle|^t}dv(w) \lesssim 1. \tag{3.1}$$

另一方面, 根据引理 3.1 (即文 [22, 引理 1.23]), 我们又有

$$f(z) \ge \int_{|w|\le\frac12} \frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^t}\frac{\mu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w) \ge \frac{\mu(\frac12)}{2^{2n+|t|}}. \tag{3.2}$$

根据 (3.1), (3.2) 式可得结论 (1) 成立.

当 $t>n+b$ 时, 根据引理 2.1, 2.2 可得

$$f(z) \le \int_B \frac{\mu(|z|)(1-|w|^2)^{-1}}{|1-\langle z,w\rangle|^t}\left\{\left(\frac{1-|w|}{1-|z|}\right)^a + \left(\frac{1-|w|}{1-|z|}\right)^b\right\}dv(w) \lesssim \frac{\mu(|z|)}{(1-|z|^2)^{t-n}}. \tag{3.3}$$

另一方面, 根据引理 2.2, 引理 3.1 和 3.2 (即文 [22, 引理 2.20 及 1.23]), 可得

$$f(z) \ge \int_{D(z,1)} \frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^t}\frac{\mu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w) \asymp \frac{\mu(|z|)}{(1-|z|^2)^{t-n}}. \tag{3.4}$$

根据 (3.3), (3.4) 式可得结论 (2) 成立. 本命题证毕.

**注记 1** 当 $t+a\le t\le n+b$ $(a<b)$ 时, 对一般的 $\mu$ 没有统一的双向估计.

首先, 我们考察例子

$$\mu_1(r)=\begin{cases}\left(\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\right)^{b-a}(1-r)^a, & 1-\dfrac{1}{n}\le r<1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)\\ \left(\dfrac{(2n)!!(n+1)}{(2n+1)!!}\right)^{b-a}(1-r)^b, & 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)\le r<1-\dfrac{1}{n+1}\end{cases}\quad (n=1,2,\ldots),$$

可以证明 $\mu_1(r)\asymp(1-r^2)^{\frac{a+b}{2}}$.

实际上, 根据 Wallis 公式知 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

对于任意 $\frac{1}{2}<r<1$, 必有正整数 $n$, 使得 $\frac{1}{n+1}<1-r\le\frac{1}{n}$, 这样就有

$$\mu_1(r)\asymp\frac{1}{n^{\frac{a+b}{2}}}\asymp(1-r)^{\frac{a+b}{2}}.$$

根据引理 2.1, 可得当 $n+a\le t<n+\frac{a+b}{2}$ 时, $f(z)\asymp1$; 当 $t=n+\frac{a+b}{2}$ 时, $f(z)\asymp\log\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}$; 当 $n+\frac{a+b}{2}<t\le n+b$ 时, $f(z)\asymp\frac{\mu_1(z)}{(1-|z|^2)^{t-n}}$.

我们再考察例子

$$\mu_2(r)=\begin{cases}\left(\dfrac{n(3n-1)(3n-4)\cdots8}{3n(3n-3)\cdots9}\right)^{a-b}(1-r)^a, & \dfrac{n-1}{n}\le r<\dfrac{3n^2-2}{3n(n+1)}\\ \left(\dfrac{(3n+2)(3n-1)\cdots8}{(3n+3)3n\cdots9}\right)^{a-b}(1-r)^b, & \dfrac{3n^2-2}{3n(n+1)}\le r<\dfrac{n}{n+1}\end{cases}\quad (n=3,4,\ldots),$$

可以证明 $\mu_2(r)\asymp(1-r^2)^{\frac{a+2b}{3}}$.

实际上, 由 $(3k+2)^3>3k(3k+3)^2$ 以及 $(3k+3)^3>(3k+2)^2(3k+5)$ $(k=1,2,\ldots)$ 知

$$\frac{6^3}{5^3(3n+3)}<\left\{\frac{(3n+2)(3n-1)\cdots8}{(3n+3)3n\cdots9}\right\}^3<\frac{6^3}{5^2(3n+3)}\quad(n=3,4,\ldots);$$

$$\frac{6^3n^3(3n+3)^2}{5^3(3n+2)^3}<\left\{\frac{n(3n-1)(3n-4)\cdots8}{3n(3n-3)\cdots9}\right\}^3<\frac{6^3n^3(3n+3)^2}{5^2(3n+2)^3}\quad(n=3,4,\ldots).$$

对于任意 $\frac{2}{3}<r<1$, 必有正整数 $n$, 使得 $\frac{1}{n+1}<1-r\le\frac{1}{n}$, 这样就有

$$\mu_2(r)\asymp\frac{1}{n^{\frac{a+2b}{3}}}\asymp(1-r)^{\frac{a+2b}{3}}.$$

根据引理 2.1 可得: 当 $n+a\le t<n+\frac{a+2b}{3}$ 时, $f(z)\asymp1$; 当 $t=n+\frac{a+2b}{3}$ 时, $f(z)\asymp\log\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}$; 当 $n+\frac{a+2b}{3}<t\le n+b$ 时, $f(z)\asymp\frac{\mu_2(z)}{(1-|z|^2)^{t-n}}$.

**命题 3.2** 设 $p>0$ 和 $\mu$ 是 $[0,1)$ 上的正规函数. 如果当 $0<s<p$ 时存在常数 $0\le r_1<1$, 使得 $\frac{\mu(r)}{(1-r^2)^s}$ 在 $[r_1,1)$ 上递减; 如果当 $s>p$ 时存在常数 $0\le r_2<1$, 使得 $\frac{\mu(r)}{(1-r^2)^s}$ 在 $[r_2,1)$ 上递增. 记 $f(z)=\int_B\frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^t}\frac{\mu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w)$, 则有下列结果:

(1) 当 $t<n+p$ 时, $f(z)\asymp1$;

(2) 当 $t>n+p$ 时, $f(z)\asymp\frac{\mu(|z|)}{(1-|z|^2)^{t-n}}$.

**证明** 当 $t<n+p$ 时, 选取 $\max\{0,t-n\}<s<p$, 根据引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}f(z)\le&\int_{|w|<r_1}\frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^t}\frac{\mu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w)\\&+\int_{r_1\le|w|<1}\frac{\mu(r_1)(1-|w|^2)^{s-1}}{(1-r_1)^s|1-\langle z,w\rangle|^t}dv(w)\lesssim1.\end{aligned}\tag{3.5}$$

当 $t>n+p$ 时, 选取 $0<a<p<s<t-n$, 记 $r_0=\max\{r_1,r_2\}$, 根据引理 2.1 及 2.2 可知, 当 $|z|\geq r_0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} f(z) &\lesssim \int_{|w|<r_0}\frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^t}\frac{\mu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w)\\ &\quad+\int_{r_0\leq|w|<1}\frac{\mu(|z|)}{|1-\langle z,w\rangle|^t(1-|w|^2)}\left(\frac{1-|w|}{1-|z|}\right)^a dv(w)\\ &\quad+\int_{r_0\leq|w|<1}\frac{\mu(|z|)}{|1-\langle z,w\rangle|^t(1-|w|^2)}\left(\frac{1-|w|}{1-|z|}\right)^s dv(w)\lesssim\frac{\mu(|z|)}{(1-|z|^2)^{t-n}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

根据 (3.2) 和 (3.5) 式可得结论 (1); 根据 (3.4) 式和 (3.6) 式可得结论 (2). 本命题证毕.

**推论 3.3**　设 $s>0$ 且 $k$ 为实数, $\mu(r)=(1-r^2)^s\log^k\frac{\mathrm{e}}{1-r^2}$ $(0\leq r<1)$. 记

$$f(z)=\int_B\frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^t}\frac{\mu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w)\quad(z\in B),$$

则有下列结果

(1) 当 $t<n+s$ 或 $t=n+s$ 且 $k<-1$ 时, $f(z)\asymp 1$;

(2) 当 $t=n+s$ 且 $k=-1$ 时, $f(z)\asymp\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-|z|^2}$;

(3) 当 $t=n+s$ 且 $k>-1$ 时, $f(z)\asymp\log^{k+1}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}$;

(4) 当 $t>n+s$ 时, $f(z)\asymp\frac{1}{(1-|z|^2)^{t-n-s}}\log^k\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}$.

**证明**　当 $t<n+s$ 时或 $t>n+s$ 时, 根据定理 3.2 可得结论成立. 当 $t=n+s$ 时, 根据引理 2.1 以及文 [22, 引理 1.8], 可得

$$f(z)\asymp\int_0^1\frac{(1-\rho)^{s-1}}{(1-\rho|z|)^s}\left(\log\frac{\mathrm{e}}{1-\rho}\right)^k d\rho.$$

然后根据引理 2.3 可得其余结果. 本推论证毕.

**注记 2**　在命题 3.2 中, 如果 $t=n+p$, 没有统一的双向估计, 要看 $\mu$ 的具体情况. 例如从推论 3.3 的结果就能看到这种情况.

作为上述积分估计的一个应用, 我们给出单位球上正规权 Dirichlet 空间上 Cesàro 型算子有界或紧的条件.

**定理 3.4**　设 $\mu$ 在 $[0,1)$ 上正规, $b$ 为 $\mu$ 定义中的参数, $0<p\leq 1$ 且 $\beta>b$, 则

(1) $T_g$ 在 $D^p(\mu)$ 上有界当且仅当

$$\sup_{w\in B}\frac{(1-|w|^2)^\beta}{\mu(|w|)}\int_B\frac{|Rg(z)|^p}{|1-\langle z,w\rangle^{n+\beta-p}|}\frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)<\infty. \tag{3.7}$$

(2) $T_g$ 在 $D^p(\mu)$ 上紧当且仅当

$$\lim_{|w|\to 1^-}\frac{(1-|w|^2)^\beta}{\mu(|w|)}\int_B\frac{|Rg(z)|^p}{|1-\langle z,w\rangle^{n+\beta-p}|}\frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)=0. \tag{3.8}$$

**证明**　首先假定 $T_g$ 是 $D^p(\mu)$ 上的有界算子, 显然可得 $g\in D^p(\mu)$. 对任意 $w\in B$, 不妨设 $|w|>\frac{1}{2}$. 考虑示性函数

$$f_w(z)=\frac{(1-|w|^2)^{\frac{\beta}{p}}}{\mu^{\frac{1}{p}}(|w|)}\left\{\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{\frac{n+\beta}{p}-1}}-1\right\}\quad(z\in B).$$

根据命题 3.1 就有

$$\|f_w\|_{D^p(\mu)}^p \lesssim \frac{(1-|w|^2)^\beta}{\mu(|w|)}\int_B \frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta}}\ \frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)\asymp 1.$$

上式结合

$$R[T_gf_w](z)=f_w(z)Rg(z),$$

就有

$$\begin{aligned}\|T_g\|^p\gtrsim\|T_gf_w\|_{D^p(\mu)}^p&=\frac{(1-|w|^2)^\beta}{\mu(|w|)}\int_B\left|\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{\frac{n+\beta}{p}-1}}-1\right|^p\frac{|Rg(z)|^p\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)\\ \Rightarrow\frac{(1-|w|^2)^\beta}{\mu(|w|)}&\int_B\frac{|Rg(z)|^p}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta-p}}\frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)\lesssim\|g\|_{D^p(\mu)}^p+\|T_g\|^p.\end{aligned}$$

若 $|w|\le\frac12$, 显然有

$$\frac{(1-|w|^2)^\beta}{\mu(|w|)}\int_B\frac{|Rg(z)|^p}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta-p}}\frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)\lesssim\|g\|_{D^p(\mu)}^p.$$

这表明 (3.7) 式成立.

如果 $T_g$ 是 $D^p(\mu)$ 上的紧算子, 对 $B$ 中任意满足 $|w^j|\to1$ $(j\to\infty)$ 的点列 $\{w^j\}$, 不妨设对所有正整数 $j$ 都有 $|w^j|>\frac12$. 考虑示性函数列

$$f_j(z)=\frac{(1-|w^j|^2)^{\frac{\beta}{p}}}{\mu^{\frac1p}(|w^j|)}\left\{\frac{1}{(1-\langle z,w^j\rangle)^{\frac{n+\beta}{p}-1}}-1\right\}\quad(z\in B).$$

函数列 $\{f_j(z)\}$ 在 $D^p(\mu)$ 上有界且在 $B$ 的任一紧子集上一致收敛于 0. 因此, 利用 $T_g$ 的紧性就有: 当 $j\to\infty$ 时,

$$0\leftarrow\|T_gf_j\|_{D^p(\mu)}^p=\frac{(1-|w^j|^2)^\beta}{\mu(|w^j|)}\int_B\left|\frac{1}{(1-\langle z,w^j\rangle)^{\frac{n+\beta}{p}-1}}-1\right|^p\frac{|Rg(z)|^p\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z).$$

再结合 $g\in D^p(\mu)$ 以及 $\beta>b$, 就有

$$\begin{aligned}&\frac{(1-|w^j|^2)^\beta}{\mu(|w^j|)}\int_B\frac{|Rg(z)|^p}{|1-\langle z,w^j\rangle|^{n+\beta-p}}\frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)\\&\lesssim\|g\|_{D^p(\mu)}^p\frac{(1-|w^j|^2)^{\beta-b}}{\mu(0)}+\|T_gf_j\|_{D^p(\mu)}^p\to0\quad(j\to\infty).\end{aligned}$$

这表明 (3.8) 式成立.

反过来, 选择 $\alpha$, 使得 $\alpha-\frac{n+b}{p}>-1$. 记 $\alpha=\frac{n+1+\alpha'}{p}-n-1$, 则 $\alpha'>-1$ 且 $\alpha'+1>b$. 根据引理 2.4 以及文 [22, 定理 2.2] 可知: 当 $f\in D^p(\mu)$ 时,

$$Rf(z)=\int_B\frac{Rf(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}dv_\alpha(w)\quad(z\in B).$$

利用 Fubini 定理和简单计算就有

$$\begin{aligned}f(z)&=f(0)+\int_B Rf(w)\left\{\int_0^1\left(\frac{1}{(1-t\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}-1\right)\frac{dt}{t}\right\}dv_\alpha(w)\\ &\Rightarrow|f(z)|\lesssim|f(0)|+\int_B\frac{|Rf(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\alpha}}dv_\alpha(w)\quad(z\in B).\end{aligned}\tag{3.9}$$

如果 (3.7) 式成立, 则 $g\in D^p(\mu)$. 记

$$M=\sup_{w\in B}\frac{(1-|w|^2)^{\alpha'+1}}{\mu(|w|)}\int_B\frac{|Rg(z)|^p}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\alpha'+1-p}}\frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z).$$

对 $z\in B$, 设 $G(w)=\frac{Rf(w)}{(1-\langle w,z\rangle)^{n+\alpha}}$. 根据文 [22, 引理 2.15] 结合 (3.9) 式, 可知

$$\begin{aligned}|f(z)|^p&\lesssim|f(0)|^p+\int_B|G(w)|^pdv_{\alpha'}(w)\\&=|f(0)|^p+\int_B\frac{|Rf(w)|^p}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\alpha'+1-p}}dv_{\alpha'}(w).\end{aligned}$$

上式结合 Fubini 定理就有

$$\begin{aligned}\|T_gf\|^p_{D^p(\mu)}&=\int_B|f(z)|^p|Rg(z)|^p\ \frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)\\&\lesssim\|g\|^p_{D^p(\mu)}\|f\|^p_{D^p(\mu)}\\&\quad+\int_B\left\{\frac{(1-|w|^2)^{\alpha'+1}}{\mu(|w|)}\int_B\frac{|Rg(z)|^p}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\alpha'+1-p}}\frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)\right\}|Rf(w)|^p\frac{\mu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w)\\&\le(\|g\|^p_{D^p(\mu)}+M)\|f\|^p_{D^p(\mu)}.\end{aligned}$$

这表明 $T_g$ 在 $D^p(\mu)$ 上有界.

如果 (3.8) 式成立, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $0<\delta<1$, 当 $\delta<|w|<1$ 时,

$$\frac{(1-|w|^2)^{\beta}}{\mu(|w|)}\int_B\frac{|Rg(z)|^p}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta-p}}\frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)<\varepsilon.\tag{3.10}$$

设 $\{f_j(z)\}$ 为任一在 $B$ 上内闭一致收敛于 0 且满足 $\|f_j\|_{D^p(\mu)}\le1$ 的函数序列, 因而 $\{Rf_j(z)\}$ 也在 $B$ 上内闭一致收敛于 0. 类似前面处理结合 (3.10) 式, 可得

$$\begin{aligned}\|T_gf_j\|^p_{D^p(\mu)}&\lesssim\|g\|^p_{D^p(\mu)}|f_j(0)|^p\\&\quad+\int_B\left\{\frac{(1-|w|^2)^{\beta}}{\mu(|w|)}\int_B\frac{|Rg(z)|^p}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta-p}}\frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)\right\}|Rf_j(w)|^p\frac{\mu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w)\\&\lesssim\|g\|^p_{D^p(\mu)}\Big(|f_j(0)|^p+\sup_{|w|\le\delta}|Rf_j(w)|^p\Big)+\varepsilon\|f_j\|^p_{D^p(\mu)}\\&\le\|g\|^p_{D^p(\mu)}\Big(|f_j(0)|^p+\sup_{|w|\le\delta}|Rf_j(w)|^p\Big)+\varepsilon\to\varepsilon\quad(j\to\infty).\end{aligned}$$

由 $\varepsilon$ 的任意性可得

$$\lim_{j\to\infty}\|T_gf_j\|_{D^p(\mu)}=0.$$

这表明 $T_g$ 在 $D^p(\mu)$ 上为紧算子. 本定理证毕.

**注记 3**　定理 3.4 中, 当 $T_g$ 分别是 $D^p(\mu)$ 上有界算子和紧算子时, (3.7) 和 (3.8) 式对一切 $p>0$ 都分别成立.

**定理 3.5**　设 $p>0$ 且 $\mu$ 为 $[0,1)$ 上的正规函数, 若 $\int_0^1\frac{dt}{\mu^{\frac1p}(t)(1-t^2)^{\frac np}}<\infty$, 则 $T_g$ 为 $D^p(\mu)$ 上有界算子当且仅当 $T_g$ 为 $D^p(\mu)$ 上紧算子当且仅当 $g\in D^p(\mu)$.

**证明**　当 $T_g$ 在 $D^p(\mu)$ 上有界或紧时, 显然可得 $g\in D^p(\mu)$.

反过来, 当 $g \in D^p(\mu)$ 时, 设 $\{f_j(z)\}$ 为任一在 $B$ 上内闭一致收敛于 0 且满足 $\|f_j\|_{D^p(\mu)} \le 1$ 的函数序列, 由引理 2.5 可得

$$\begin{aligned}\|T_g f_j\|^p_{D^p(\mu)} &= \int_B |f_j(z)|^p |Rg(z)|^p \frac{\mu(|z|)}{1-|z|^2} dv(z) \\ &\le \sup_{z\in B} |f_j(z)|^p \|g\|^p_{D^p(\mu)} \to 0 \quad (j\to\infty).\end{aligned}$$

这表明 $T_g$ 在 $D^p(\mu)$ 上为紧算子, 故 $T_g$ 在 $D^p(\mu)$ 上有界. 本定理证毕.

## 参 考 文 献

[1] Aleman A., Siskakis A. G., An integral operator on $H^p$, *Complex Variables*, 1995, **28**: 149–158.

[2] Aleman A., Siskakis A. G., Integration operators on Bergman spaces, *Indiana Univ. Math. J.*, 1997, **46**: 337–356.

[3] Hu Z. J., Extended Cesàro operators on mixed norm space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2003, **131**(7): 2171–2179.

[4] Hu Z. J., Extended Cesàro operators on the Bloch space in the unit ball of $\mathbf{C^n}$, *Acta Math. Sci. Ser. B* (*Engl. Ed.*), 2003, **23B**(4): 561–566.

[5] Li S. L., Zhang X. J., Xu S., The Bergman type operators on the $F(p,q,s)$ type spaces in $\mathbf{C^n}$, *Chin. J. of Contemp. Math.*, 2017, **38**(4): 303–316.

[6] Miao J., The Cesàro operator is bounded on $H^p$ for $0 < p < 1$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1992, **116**: 1077–1079.

[7] Ortega J., Fabrega J., Point-wise multipliers and Corona type decomposition in BMOA, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 1996, **46**: 111–137.

[8] Ortega J., Fabrega J., Corona type decomposition in some Besov spaces, *Math. Scand.*, 1996, **78**: 93–111.

[9] Rudin W., Function Theory in the Unit Ball of $\mathbf{C^n}$, Springer-Verlag, New York, 1980.

[10] Shi J. H., Ren G. B., Boundedness of the Cesàro operator on mixed norm spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, **126**: 3553–3560.

[22] Siskakis A. G., Composition semigroups and the Cesàro operator on $H^p$, *J. London Math. Soc.*, 1987, **36**(2): 153–164.

[12] Tang X. M., Extended Cesàro operators between Bloch-type spaces in the unit ball of $\mathbf{C^n}$, *Math. Anal. Appl.*, 2007, **326**(2): 1199–1211.

[13] Xiao J., Cesàro operators on Hardy, BMOA and Bloch spaces, *Arch Math.*, 1997, **68**: 398–406.

[14] Xiao J., Tan H., $p$-Bergman spaces, $\alpha$-Bloch spaces, little $\alpha$-Bloch spaces and Cesàro means (in Chinese), *Chin. Ann. of Math.*, 1998, **19A**: 187–196.

[15] Zhang X. J., Weighted Cesàro operators on Dirichlet type spaces and Bloch type spaces of $\mathbf{C^n}$ (in Chinese), *Chin. Ann. of Math.*, 2005, **26A**(1): 139–150.

[16] Zhang X. J., Guo Y. T., Shang Q. L., et al., The Gleason's problem on $F(p,q,s)$ type spaces in the unit ball of $\mathbf{C^n}$, *Complex Anal. Oper. Theory*, 2018, **12**(5): 1251–1265.

[17] Zhang X. J., Li S. L., Shang Q. L., et al., An integral estimate and the equivalent norms on $F(p,q,s,k)$ spaces in the unit ball, *Acta Math. Sci.*, 2018, **38B**(6): 1861–1880.

[18] Zhang X. J., Lv R. X., Tang P. C., Several equivalent characterizations of general Hardy type spaces on the unit ball in $\mathbf{C^n}$, *Chin. J. of Conte. Math.*, 2019, **40**(2): 101–114.

[19] Zhang X. J., Xi L. H., Fan H. X., et al., Atomic decomposition of $\mu$-Bergman space in $\mathbf{C^n}$, *Acta Math. Sci. Ser. B* (*Engl. Ed.*), 2014, **34B**(3): 779–789.

[20] Zhao R. H., Distances from Bloch functions to some Möbius invariant spaces, *Annl. Acad. Sci. Fen. Math.*, 2008, **33**: 303–313.

[21] Zhao Y. H., Zhang X. J., Integral-type operators on Zygmund type spaces on the unit ball, *Adv. Math. China*, 2016, **45**(5): 755–766.

[22] Zhu K. H., Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball, Springer-Verlag (GTM 226), New York, 2005.