第64卷第4期 数学学报中文版 Vol.64, No.4
2021年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)04-0587-14 **文献标识码:** A

具有双稳非线性项的非局部时滞扩散方程的柱状对称波前解

刘 佳

长安大学理学院 西安 710064
E-mail: liujia@chd.edu.cn

摘 要 本文研究了非局部时滞扩散方程柱状对称波前解的存在性和定性性质. 最近, 非局部时滞扩散方程的 V 形行波解和棱锥形行波解已经有了研究结果. 利用棱锥形波前解序列的极限, 我们建立了柱状对称波前解的存在性和定性性质, 也证明了其水平集的渐近行为和柱状对称行波解的不存在性.

关键词 非局部时滞扩散方程; 双稳非线性项; 柱状对称波前解
MR(2010) 主题分类 34K30, 35C07, 35K57
中图分类 O175.2

Cylindrically Symmetric Traveling Fronts for Nonlocal Delayed Diffusion Equation with Bistable Nonlinearity

Jia LIU

School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, *P. R. China*
E-mail: *liujia@chd.edu.cn*

Abstract This paper is concerned with the existence and qualitative properties of cylindrically symmetric traveling fronts for nonlocal delayed diffusion equations. Recently, the existence and stability of V-shaped traveling fronts and pyramidal traveling fronts for nonlocal delayed diffusion equation have been established. Using the limit of a sequence of pyramidal traveling fronts, we establish the existence and qualitative properties of cylindrically symmetric traveling fronts. Moreover, the asymptotic behaviors of level set and the nonexistence of the cylindric symmetric traveling are also proved.

Keywords nonlocal delayed diffusion equation; bistable nonlinearity; cylindrically symmetric traveling fronts
MR(2010) Subject Classification 34K30, 35C07, 35K57
Chinese Library Classification O177.2

收稿日期: 2020-05-14; 接受日期: 2020-07-15
基金项目: 国家自然科学基金 (11701041); 长安大学中央高校基本科研业务费专项资金 (300102129201)

1 引言

本文考虑如下非局部时滞扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t)=D\Delta u(\mathbf{x},t)-du(\mathbf{x},t)+\int_{\mathbb{R}}b\left(u(\mathbf{y}',y_N,t-\tau)\right)f(x_N-y_N)dy_N, \tag{1.1}$$

其中 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N$, $N\geq 2$, $t>0$, 参数 $D>0$ 和 $d>0$ 分别表示成年物种的出生率和死亡率, $\tau\geq 0$ 为物种的成熟时间, $b(\cdot)$ 为对应的出生函数. 卷积项表示空间上沿某一个方向物种的相互作用, 核函数 $f(\cdot)\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 且满足

$$f(x)\geq 0,\ \int_{\mathbb{R}}f(y)dy=1 \quad 和 \quad \int_{\mathbb{R}}|y|f(y)dy<+\infty. \tag{1.2}$$

事实上, 在生态模型和传染病模型中, 时间滞后和非局部在研究种群动力学方面起着非常重要的作用. 具有时滞的反应扩散方程的平面行波解问题已经有了广泛的研究, 可参考有关稳性方面的研究 [8, 15, 23, 32, 33, 38]. 本文主要考虑具有双稳非线性项的非局部扩散方程 (1.1). 假设

(A1) $b(\cdot)\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 并存在常数 $K>0$, 使得 $b(0)=dK-b(K)=0$;

(A2) 对 $u\in[0,K]$, $b'(u)\geq 0$ 且对某些常数 $C>1$, $d>C\max\{b'(0),b'(K)\}$;

(A3) 存在 $u^*\in(0,K)$, 使得 $du^*-b(u^*)=0$, $b'(u^*)>d$ 且 $u\in(0,u^*)\cup(u^*,K)$ 时, $du-b(u)\neq 0$.

由假设 (A1) 可知, (1.1) 至少有两个常数平衡点 0 和 K, 并且当 $b(u)$ 满足假设 (A1)–(A3) 时, 方程 (1.1) 具有双稳结构. 由文献 [15, 33] 可知, 当假设 (A1)–(A3) 成立, 方程 (1.1) 存在一对唯一解 (c,U) 满足如下方程:

$$DU''(\xi)-dU(\xi)-cU'(\xi)+\int_{\mathbb{R}}b(U(\xi-c\tau-y))f(y)dy=0 \tag{1.3}$$

和

$$U(-\infty)=0,\quad U(+\infty)=K,$$

其中函数 $U(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是单调递增的波形函数, 常数 $c\in\mathbb{R}$ 表示行波速度. 另外, 存在正常数 β_1 和 C_1, 使得

$$\max\left\{U(-\xi),|U(\xi)-1|,|U'(\pm\xi)|,|U''(\pm\xi)|\right\}\leq C_1\mathrm{e}^{-\beta_1\xi},\quad \forall\xi\geq 0.$$

近年来, 反应扩散方程和系统的非平面行波解吸引了很多专家学者的关注, 并已经发现了不同类型的非平面行波解. 例如文 [6, 7, 12, 13, 17, 18, 31, 34] 描述了 V 形行波解, 文 [12, 13, 26, 35] 考虑了柱状对称行波解, 文 [5, 14, 19, 24, 25, 37] 考虑了棱锥形行波解, 文 [20–22, 26–30, 36] 描述了其他高维行波解. 文 [2] 证明了具有双稳反应项的时滞反应扩散方程存在二维 V 形行波解, 进一步, 文 [4] 给出了棱锥形行波解的存在性. 最近, 本文作者等在文 [3] 中证明了: 当 $N\geq 3$ 时, 具有非局部时滞的反应扩散方程存在 N 维棱锥形行波解并且在三维空间中也证明了这样的锥形行波解是渐近稳定的 [16]. 然而, 对高维空间中非局部时滞扩散方程并没有柱状对称行波解的相关结果, 本文将致力于解决这一问题.

假设 $c>0$. 受方程 (1.1) 中非局部效应的影响, 我们仅考虑方程沿着 x_N 轴方向传播的行波解. 对任意的 $s>c$, 称 $u(\mathbf{x},t)=v(\mathbf{x}',x_N+st)$ 为方程 (1.1) 的柱状对称行波解, 如果 $v(\mathbf{x}',z)$ 满足

$$0=D\Delta v(\mathbf{x}',z)-s\frac{\partial}{\partial z}v(\mathbf{x}',z)-dv(\mathbf{x}',z)+\int_{\mathbb{R}}b\left(v(\mathbf{x}',z-s\tau-z_1)\right)f(z_1)dz_1 \tag{1.4}$$

和

$$\begin{cases} v(\mathbf{x}_1',z)=v(\mathbf{x}_2',z), \quad \forall\, \mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2'\in\mathbb{R}^{N-1} \text{ 且 } |\mathbf{x}_1'|=|\mathbf{x}_2'|, \quad z\in\mathbb{R}, \\ \lim\limits_{z\to+\infty} v(\mathbf{x}',z)=K, \quad \lim\limits_{z\to\infty} v(\mathbf{x}',z)=0, \quad \mathbf{x}'\in\mathbb{R}^{N-1}. \end{cases} \tag{1.5}$$

记 $\mathbf{x}=(\mathbf{x}',z)$ 和

$$m_*=\frac{\sqrt{s^2-c^2}}{c}.$$

为了证明柱状对称行波解的性质, 我们进一步假设:

(A4) 存在常数 $r_0>0$ 和 $\epsilon\in(0,u^*)$, 使得对任意的 $u\in(0,\epsilon)$, 有

$$d(u^*-u)-\int_{\mathbb{R}} b\left(u(\mathbf{x}',z-s\tau-z_1)\right) f(z_1)dz_1\geq r_0u(\epsilon-u).$$

下面给出本文的主要结果.

定理 1.1 假设 (A1)–(A4) 成立. 假定 $c>0$, 则对任意的 $s>c>0$, 存在函数 $W(\mathbf{x})$ 满足 (1.4) 式, 其中

$$W(\mathbf{x}_1',z)=W(\mathbf{x}_2',z), \quad \forall\,\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2'\in\mathbb{R}^{N-1} \text{ 且 } |\mathbf{x}_1'|=|\mathbf{x}_2'|, \quad z\in\mathbb{R}$$

和

$$\lim_{z\to+\infty}\|W(\mathbf{x}',z)-K\|_{C(\mathbb{R}^{N-1})}=0, \quad \lim_{z\to\infty}\|W(\mathbf{x}',z)\|_{C_{loc(\mathbb{R}^{N-1})}}=0, \quad \mathbf{x}'\in\mathbb{R}^{N-1}.$$

另外, 也有

(i) 对任意满足 $z_0\geq m_*|\mathbf{x}_0'|$ 的 $(\mathbf{x}_0',z_0)\in\mathbb{R}^N$, 有 $W(\mathbf{x}'+\mathbf{x}_0',z)\leq W(\mathbf{x}',x_N+z_0), \forall\,(\mathbf{x}',z)\in\mathbb{R}^N$;

(ii) 对所有的 $(\mathbf{x}',z)\in\mathbb{R}^N$, $\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x}',z)>0$;

(iii) 当 $x_i\in(0,\infty)$ 时, $\frac{\partial}{\partial x_i}W(\mathbf{x})>0$, $i=1,2,\dots,N-1$;

(iv) 对任意的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N$, $\frac{\partial}{\partial\nu}W(\mathbf{x})>0$, 其中 $\nu=\frac{1}{\sqrt{1+\sum_{j=1}^{N-1}\nu_j^2}}(\nu_1,\dots,\nu_{N-1},1)$;

(v) $\lim_{s\to c_+^0}\|W^s(\mathbf{x})-U(z)\|_{C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)}=0$, 其中 $W^s(\mathbf{x})$是波速为 $s>c>0$ 的柱状对称行波解.

对任意的 $(\mathbf{x}',z)\in\mathbb{R}^N$, 定义

$$\Psi(\rho,z)=\Psi(|\mathbf{x}'|,z):=W(\mathbf{x}), \tag{1.6}$$

其中 $\rho=|\mathbf{x}'|$. 定义函数 $\phi(\rho)$ 为

$$\Psi(\rho,\phi(\rho))=\theta_0,$$

其中 $\theta_0\in(0,u^*)$ 是一个给定的常数, 则我们有如下结果:

定理 1.2 假设 (A1)–(A4) 成立. 假定 $c>0$, 则 (1.6) 所定义函数 $\Psi(\rho,z)$ 满足

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{N-2}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}-s\frac{\partial\Psi}{\partial z}+f(\Psi)=0.$$

另外, $\Psi(\rho,z)$ 还满足:

(i) 对任意的 $(\rho,z)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$, 有 $\frac{\partial}{\partial\rho}\Psi(\rho,z)>0$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}\Psi(\rho,z)>0$;

(ii) $\lim_{z\to+\infty}\|\Psi(\cdot,z)-K\|_{C(0,\omega)}=0$, $\lim_{z\to\infty}\|\Psi(\cdot,z)\|_{C(0,+\infty)}=0$;

(iii) $\lim_{\rho\to\infty}\phi'(\rho)=-m_*$;

(iv) $\lim_{\rho\to\infty}\|\Psi(\rho+x,\phi(\rho)+z)-U(\frac{c}{s}(z+m_*x))\|_{C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)}=0$.

本文第 2 节给出棱锥形行波解的存在性并证明柱状对称行波解的存在性及其定性性质. 第 3 节研究了柱状对称行波解水平集的渐近行为和柱状对称行波解的不存在性.

2 定理 1.1 的证明

本节将在 $\mathbb{R}^3$ 中证明定理 1.1 并将结果一般化到 $\mathbb{R}^N$, 即 $N \geq 4$ 和 $N=2$ 的情形. 利用棱锥形行波解序列的极限, 给出方程 (1.1) 在 $\mathbb{R}^3$ 中柱状对称行波解的存在性及一些重要的定性性质.

首先, 给出当 $c>0$ 时, 方程 (1.1) 的三维棱锥形行波解的存在性结果.

定义

$$h_j\left(x_1, x_2\right):=m_*\left(x_1 \cos \theta_j+x_2 \sin \theta_j\right)$$

和

$$h(x_1, x_2):=\max_{1 \leq j \leq n} h_j(x_1, x_2)=m_* \max_{1 \leq j \leq n}\left(x_1 \cos \theta_j+x_2 \sin \theta_j\right), \quad \forall \mathbf{x}'=(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

称 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -z=h(x_1, x_2)\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 3 维棱锥. 对于 $j=1, \ldots, n$, 令

$$\Omega_j:=\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid h\left(x_1, x_2\right)=h_j\left(x_1, x_2\right)\right\},$$

则有 $\mathbb{R}^2=\bigcup_{j=1}^n \Omega_j$. 用 $\partial \Omega_j$ 表示 Ω_j 的边界. 令 $E=\bigcup_{j=1}^n \partial \Omega_j$. 对 $j=1, \ldots, n$, 我们设

$$S_j:=\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -z=h_j\left(x_1, x_2\right), \text{ 其中 } \left(x_1, x_2\right) \in \Omega_j\right\}$$

称 $\bigcup_{j=1}^n S_j \subset \mathbb{R}^3$ 为棱锥的侧面. 记

$$\Gamma_j=S_j \cap S_{j+1}, \quad \Gamma_n=S_n \cap S_1, \quad j=1, \ldots, n-1,$$

则 $\Gamma:=\bigcup_{j=1}^n \Gamma_j$ 表示棱锥所有边的集合. 很容易可以验证 $U(\frac{c}{s}(z+h_j(x_1, x_2)))$ 是方程 (1.6) 在棱锥侧面 S_j 的平面行波解. 定义

$$v^-\left(x_1, x_2, z\right)=U\left(\frac{c}{s}\left(z+h\left(x_1, x_2\right)\right)\right)=\max_{1 \leq j \leq n} U\left(\frac{c}{s}\left(z+h_j\left(x_1, x_2\right)\right)\right).$$

于是, $v^-(\mathbf{x}', z)$ 是方程 (1.6) 的一个下解. 对 $\gamma>0$, 定义

$$D(\gamma)=\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \operatorname{dist}\left(\mathbf{x}, \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j\right)>\gamma\right\}.$$

由文 [3, 定理 1.1] 和 [16, 定理 1.2], 我们有如下棱锥形行波解 $\widetilde{V}(x_1, x_2, z)$ 的存在性和稳定性结果.

定理 2.1 假设 (A1)–(A3) 成立. 令 $s>c>0$ 且 $h(x, y)$ 如 (2.1) 所示, 则存在方程 (1.5) 的一个解 $V(x_1, x_2, z)$ 满足:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \sup_{(x_1, x_2, z) \in D(\gamma)}\left|V(x_1, x_2, z)-U\left(\frac{c}{s}\left(z+h(x_1, x_2)\right)\right)\right|=0, \\
& U\left(\frac{c}{s}\left(z+h(x_1, x_2)\right)\right)<V(x, y, z)<K, \quad \text{其中 } (x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3, \\
& \frac{\partial V}{\partial z}(x_1, x_2, z)>0, \quad \text{其中 } (x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3, \\
& \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|z+p(x_1, x_2)| \geq R}\left|V_z(x_1, x_2, z)\right|=0 \text{ 和 } \inf_{\delta \leq V(\xi, \eta) \leq K-\delta} V_\eta(x_1, x_2, z)>0, \quad \text{其中 } \delta \in (0, \delta^*].
\end{aligned}$$

如果初值 $\phi(x_1,x_2,z,r)\in C(\mathbb{R}^3\times[-\tau,0],\mathbb{R})$, 且满足 $\phi(x_1,x_2,z,r)\geq v^-(x_1,x_2,z)$ 和

$$\lim_{\gamma\to+\infty}\sup_{(x_1,x_2,z)\in D(\gamma),\, r\in[-\tau,0]}|\phi(x_1,x_2,z,r)-V(x_1,x_2,z)|=0,$$

则方程 (1.1) 的解 $w(x_1,x_2,z,t;\phi)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}|w(x_1,x_2,z,t;\phi)-V(x_1,x_2,z)|=0.$$

另外, 我们知道棱锥形行波解 $V(\mathbf{x})$ 也满足如下性质.

引理 2.2　下面结果成立:

(i) 对任意的 $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ 且 $z_0\geq h(x_0,y_0)$, $\widetilde{V}(x_1+x_0,x_2+y_0,z)\leq\widetilde{V}(x_1,x_2,z+z_0)$ 对所有的 $(x_1,x_2,z)\in\mathbb{R}^3$ 成立;

(ii) 对任意的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, $\frac{\partial}{\partial\nu}\widetilde{V}(\mathbf{x})>0$, 其中 $\nu=\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1^2+\nu_2^2}}(\nu_1,\nu_2,1)^T$ 满足 $\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}\leq\frac{1}{m_*}$;

(iii) 如果 $v^-(\mathbf{x})$ 分别关于 $x_1\in\mathbb{R}$ 和 $x_2\in\mathbb{R}$ 是偶函数, 则 $V(\mathbf{x})$ 分别关于 $x_1\in\mathbb{R}$ 和 $x_2\in\mathbb{R}$ 也是偶函数. 另外, 当 $x_1\in(0,\infty)$ 时, 有 $\frac{\partial}{\partial x_1}\widetilde{V}(\mathbf{x})>0$, 且当 $x_2\in(0,\infty)$ 时, $\frac{\partial}{\partial x_2}\widetilde{V}(\mathbf{x})>0$.

下面建立一个棱锥形行波解的序列. 令

$$h^k(x_1,x_2)=m_*\max_{1\leq i\leq 2^k}\left\{x_1\cos\frac{2(i-1)\pi}{2^k}+x_2\sin\frac{2(i-1)\pi}{2^k}\right\},\quad k=1,2,\dots$$

不难证明对任意的 $k\in\mathbb{N}$ 和 $1\leq i\leq 2^k$, 平面

$$z=m_*\left(x_1\cos\frac{2(i-1)\pi}{2^k}+x_2\sin\frac{2(i-1)\pi}{2^k}\right)$$

垂直于旋转曲面

$$z=m_*\sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

在定理 2.1 中, 用 $h^k(\mathbf{x}')$ 代替 $h(\mathbf{x}')$, 可得方程 (1.1) 的棱锥形行波解的序列, 也就是

$$V^1,V^2,\dots,V^K,\dots,$$

其中

$$V^k(\mathbf{x})=\lim_{t\to\infty}v(\mathbf{x},t;v^{k,-}),\quad v^{k,-}(\mathbf{x})=U\left(\frac{c}{s}(z+h^k(\mathbf{x}'))\right).$$

棱锥 $x_3=h^k(\mathbf{x}')$ 的边界表示为 Γ^k, 并且对 $\gamma>0$,

$$D^k(\gamma)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\mathrm{dist}\left(\mathbf{x},\bigcup_{j=1}^{2^k}\Gamma_j^k\right)>\gamma\right\}.$$

因为 $v^{k,-}(\mathbf{x})$ 对 $x_1\in(0,\infty)$ 和 $x_2\in(0,\infty)$ 是非减的, 且 $x_1\in\mathbb{R}$ 和 $x_2\in\mathbb{R}$ 是偶函数, 由定理 2.1 和引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}
&V^1\leq V^2\leq\cdots\leq V^k\leq\cdots,\quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}V^k(\mathbf{x})>0,\quad \mathbf{x}\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^2,\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}V^k(\mathbf{x})>0,\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R},\\
&\frac{\partial}{\partial\nu}V^k(\mathbf{x})>0,\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,
\end{aligned}$$

其中

$$\nu=\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1^2+\nu_2^2}}(\nu_1,\nu_2,1) \quad 且 \quad \sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}\le\frac{1}{m^*}.$$

因为

$$h^k(x_1,x_2)=h^k\left(x_1\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}+x_2\sin\frac{\pi}{2^{k-1}},-x_1\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}+x_2\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}\right),$$

有

$$V^k(\mathbf{x})=V^k(\mathbf{x}',z)=V^k(B_k\mathbf{x}',z), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,$$

其中

$$B_k=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2^{k-1}} & \sin\frac{\pi}{2^{k-1}}\\ -\sin\frac{\pi}{2^{k-1}} & \cos\frac{\pi}{2^{k-1}}\end{pmatrix}.$$

选取 $z^k\in\mathbb{R}$, 使得 $z^k\ge z^{k+i}$ 并且 $V^k(0,0,z^k)=\theta_0$, 其中 $\theta_0\in(0,u^*)$ 是一个给定常数. 令

$$\widetilde{V}^k(\mathbf{x})=V^k(\mathbf{x}',z+z^k), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3.$$

再一次利用定理 2.1 和引理 2.2, $\widetilde{V}^k(\mathbf{x})$ 满足如下性质:

(a) $\widetilde{V}^k(\mathbf{0})=\theta_0$;

(b) 对任意的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, $\frac{\partial}{\partial\nu}\widetilde{V}^k(\mathbf{x})>0$, 其中 $k\in\mathbb{N}$, $\nu=\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1^2+\nu_2^2}}(\nu_1,\nu_2,1)$ 且 $\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}\le\frac{1}{m_*}$;

(c) 对任意的 $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ 且 $z_0\ge h^k(x_0,y_0)$, 有

$\widetilde{V}^k(x_1+x_0,x_2+y_0,z)\le\widetilde{V}^k(x_1,x_2,z+z_0)$ 对 $(x_1,x_2,z)\in\mathbb{R}^3$ 成立;

(d) 当 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ 时, $\widetilde{V}^k(\mathbf{x}',z)=\widetilde{V}^k(B_k\mathbf{x}',z)$;

(e) 当 $x_1\in\times(0,\infty)$ 和 $x_2\in\times(0,\infty)$ 时, 分别有 $\frac{\partial}{\partial x_1}\widetilde{V}^k>0$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_2}\widetilde{V}^k>0$;

(f) 有 $\lim_{z\to\infty}\|\widetilde{V}^k(\cdot,z)-K\|_{C(\mathbb{R}^2)}=0$ 和 $\lim_{z\to-\infty}\|\widetilde{V}^k(\cdot,z)\|_{C_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)}=0$.

因为 $\widetilde{V}^k$ 满足 $0<\widetilde{V}^k(\mathbf{x})<K$ 和

$$0=D\Delta\widetilde{V}^k(\mathbf{x}',z)-s\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{V}^k(\mathbf{x}',z)-d\widetilde{V}^k(\mathbf{x}',z)+\int_{\mathbb{R}}b(\widetilde{V}^k(\mathbf{x}',z-s\tau-z_1))f(z_1)dz_1.$$

由 Schauder 内估计可知 $\widetilde{V}^k(\cdot)$ 在 $W^{2,p_1}(K_1)$ 中有界, 其中 $K_1\subset\mathbb{R}^3$ 是紧集并且 $p_1\ge3$. 因此, 选取其中子序列并利用紧嵌入 $W^{2,p_1}(K_1)\subset C^{1,\alpha}(\overline{K}_1)$, 其中 $\alpha<1-\frac{3}{p_1}$, $\widetilde{V}^k(\cdot)$ 的子序列在空间 $C^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^3)$ 中收敛到函数 $W(\mathbf{x})$, 也就是当 $k\to\infty$ 时, 在 $\|\cdot\|_{C^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^3)}$ 意义下

$$\widetilde{V}^k(\cdot)\to W(\mathbf{x}).$$

因此, $W(\mathbf{x})\in C^2(\mathbb{R}^3)$ 满足 $W(\mathbf{0})=\theta_0$ 和

$$0=D\Delta W(\mathbf{x}',z)-s\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x}',z)-dW(\mathbf{x}',z)+\int_{\mathbb{R}}b\left(W(\mathbf{x}',z-s\tau-z_1)\right)f(z_1)dz_1, \tag{2.2}$$

其中 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$. 利用 $\widetilde{V}^k(\mathbf{x})$ 的性质 (b) 和 (c), 可以验证 $W(\mathbf{x})$ 满足如下性质.

引理 2.3 (i) $W(\mathbf{x}_1',z)=W(\mathbf{x}_2',z)$ 对所有的 $\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2'\in\mathbb{R}^2$ 满足 $|\mathbf{x}_1'|=|\mathbf{x}_2'|$, $z\in\mathbb{R}$ 成立.

(ii) 对任意 $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ 且 $z_0\ge h^*(x_0,y_0)$, 有

$$W(x_1+x_0,x_2+y_0,z)\le W(x_1,x_2,z+z_0), \quad \forall\,(x_1,x_2,z)\in\mathbb{R}^3.$$

引理 2.4 当 $\mathbf{x}\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}$ 时, 分别有 $\frac{\partial}{\partial x_1}W(\mathbf{x})>0$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_2}W(\mathbf{x})>0$ 成立. 另外, $\frac{\partial}{\partial x_3}W(\mathbf{x})>0$ 对 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ 成立.

证明　由性质 (e) 可知对任意的 $\mathbf{x}\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial}{\partial x_1}W(\mathbf{x})\geq 0$ 且对任意的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}W(\mathbf{x})\geq 0$. 下面, 首先证明 $\frac{\partial}{\partial x_1}W(\mathbf{x})>0$ 对任意的 $\mathbf{x}\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ 成立.

令 $\varphi_1(\mathbf{x}):=\frac{\partial}{\partial x_1}W(\mathbf{x})\geq 0$, 其中 $\mathbf{x}\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$. 由 (2.2) 可知

$$0=D\Delta\varphi_1(\mathbf{x})-s\frac{\partial}{\partial z}\varphi_1(\mathbf{x})-d\varphi_1(\mathbf{x})+\int_{\mathbb{R}}b'(W(\mathbf{x}',z-s\tau-z_1))\varphi_1(\mathbf{x}',z-s\tau-z_1)f(z_1)dz_1$$

对 $\mathbf{x}\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^2$ 成立. 由 (A1), $b'(u)\geq 0$, 其中 $u\in[0,K]$. 我们有

$$\begin{aligned}&D\,\Delta\varphi_1(\mathbf{x})-s\frac{\partial}{\partial z}\varphi_1(\mathbf{x})-d\varphi_1(\mathbf{x})\\&\quad=-\int_{\mathbb{R}}b'\left(W(\mathbf{x}',z-s\tau-z_1)\right)\varphi_1(\mathbf{x}',z-s\tau-z_1)f(z_1)dz_1\leq 0,\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x}\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^2$. 注意到 $W(\cdot)\not\equiv\theta_0$. 事实上, 如果 $W(\cdot)\equiv\theta_0$, 则 θ_0 是 (1.1) 的解, 这与双稳定非线性项的条件矛盾, 则

$$\varphi_1(\mathbf{x})=\frac{\partial}{\partial x_1}W(\mathbf{x})\not\equiv 0,$$

其中 $\mathbf{x}\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^2$. 强最大值原理表明

$$\frac{\partial}{\partial x_1}W(\mathbf{x})=\varphi_1(\mathbf{x})>0,\quad 其中\ \mathbf{x}\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^2.$$

类似地, 我们也有

$$\frac{\partial}{\partial x_2}W(\mathbf{x})>0,\quad 其中\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

因此, 当 $x_1>0$ 和 $x_2>0$ 时, 我们有 $W(x_1,x_2,0)>W(0,0,0)$. 由引理 2.3 (ii), $W(0,0,z)\geq W(x_1,x_2,0)>W(0,0,0)$ 对任意的 $z>m_*\sqrt{x_1^2+x_2^2}>0$ 成立, 这表明 $\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x})\geq 0$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x})\not\equiv 0$, 其中 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$. 进一步, 对 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, 由最大值原理可得 $\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x})>0$. 证明完毕.

引理 2.5　我们有

$$\lim_{z\to\infty}\|W(\cdot,z)-K\|_{C(\mathbb{R}^2)}=0\quad 和\quad \lim_{z\to-\infty}\|W(\cdot,z)\|_{C_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)}=0.$$

证明　由引理 2.3 和 2.4, 可知

$$W(0,0,z)\leq W(x_1,x_2,z)\leq W(0,0,z+z_0),\quad\forall\,(x_1,x_2,z)\in\mathbb{R}^3,\tag{2.3}$$

其中 $z_0\geq m_*\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. 利用 $\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x})>0$,

$$\alpha:=\lim_{z\to-\infty}W(0,0,z),\quad\beta:=\lim_{z\to+\infty}W(0,0,z),$$

则从 (2.3) 可得

$$\lim_{z\to-\infty}\|W(\cdot,\cdot,z)-\alpha\|_{C_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)}=0\quad 和\quad\lim_{z\to+\infty}\|W(\cdot,\cdot,z)-\beta\|_{C(\mathbb{R}^2)}=0.$$

因此, 存在两个序列 $\{z_n^+\}$ 和 $\{z_n^-\}$ 分别满足 $z_n^+\to+\infty$ 和 $z_n^-\to-\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|W(\cdot,\cdot,z+z_n^-)-\alpha\|_{C_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)}=0\quad 和\quad\lim_{n\to\infty}\|W(\cdot,\cdot,z+z_n^+)-\beta\|_{C(\mathbb{R}^2)}=0$$

成立. 注意到 $W(\cdot)$ 是 (2.2) 的解, 则 α 和 β 分别是如下方程的解:

$$0=-du+\int_{\mathbb{R}}b(u(\mathbf{y}',z_1))f(z-z_1)dz_1.$$

因为 $0<W(\mathbf{0})=\theta_0<u^*$, 我们有 $0\le\alpha<\theta_0<u^*$ 且 $\theta_0<\beta\le K$, 则要么 $\alpha=0$ 且 $\beta=K$, 或者 $\alpha=0$ 且 $\beta=u^*$. 如果前者成立, 则引理证明完毕. 下面证明后者是不可能发生的. 假设 $\alpha=0$ 且 $\beta=u^*$, 则对任意的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, $0\le W(\mathbf{x})\le u^*$. 令

$$\overline{W}(x_1,x_2,z):=u^*-W(x_1,x_2,-z),\quad \forall\,(x_1,x_2,z)\in\mathbb{R}^3,$$

则 $\overline{W}(x_1,x_2,z)$ 满足

$$D\Delta\overline{W}+s\frac{\partial}{\partial z}\overline{W}+g(\overline{W})=0,$$

其中

$$g(u)=d(u^*-u)-\int_{\mathbb{R}}b(u^*-u(\mathbf{x}',-z-s\tau-z_1))f(z_1)dz_1.$$

明显, 对 $x_1>0$, 有 $\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{W}<0$; 对 $x_2>0$, 有 $\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{W}<0$, 以及对 $z\in\mathbb{R}$, 有 $\frac{\partial}{\partial z}\overline{W}>0$, $\overline{W}(-x_1,x_2,z)=\overline{W}(x_1,x_2,z)$ 且 $\overline{W}(x_1,-x_2,z)=\overline{W}(x_1,x_2,z)$ 成立. 另外, $\overline{W}(0,0,0)=u^*-\theta_0$. 因此 $\overline{W}(x_1,x_2,z-st)$ 是如下方程的行波解:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t)=D\Delta u+g(u),\quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\quad t>0. \tag{2.4}$$

定义

$$\widehat{W}(x_1,x_2,z,t)=\min\left\{\overline{W}(x_1,x_2,z-st),\overline{W}(x_1,x_2,-z-st)\right\},$$

其中 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,z)\in\mathbb{R}^3$ 且 $t\ge0$, 则 $\widehat{W}(x_1,x_2,z,t)$ 是 (2.4) 的一个上解. 特别地, 我们有

$$\lim_{t\to+\infty}\widehat{W}(x_1,x_2,z,t)=0\quad 一致于\ (x_1,x_2,z)\in\mathbb{R}^3. \tag{2.5}$$

记 $u_0(\mathbf{x})\in C_0(\mathbb{R}^3)$ 满足 $0\le u_0(\mathbf{x})\le\widehat{W}(\mathbf{x},0)$, 其中 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, $C_0(\mathbb{R}^3)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中具有紧支集的连续函数的集合. 利用比较原理, 对任意的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N$ 和 $t>0$, 我们有 $0\le u(\mathbf{x},t;u_0)\le\widehat{W}(\mathbf{x},t)$, 其中 $u(\mathbf{x},t;u_0)$ 是方程 (2.4) 满足 $u(\mathbf{x},0;u_0)=u_0$ 的解. 由 (2.5) 可得

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}u(\mathbf{x},t;u_0)=0.$$

因此, 存在常数 T_0 足够大, 使得

$$0\le u(\mathbf{x},t+T_0;u_0)\le\epsilon,\quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\quad t>0.$$

另外, 从 (A4) 可知

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t)=D\Delta u+g(u)\ge D\Delta u+r_0u(\epsilon-u),$$

这表明 $u(t,x;u_0)$ 是

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t)=D\Delta u+r_0u(\epsilon-u) \tag{2.6}$$

的解. 记 $v_0(\cdot)\in C_0(\mathbb{R}^3)$ 且满足 $0\le v_0(\cdot)\le u_0(\cdot)\le\epsilon$. 由比较原理可得

$$0\le v(\mathbf{x},t;v_0)\le u(\mathbf{x},t;u_0),\quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\quad t>0,$$

这表明 $\lim_{t\to\infty}v(\mathbf{x},t;v_0)=0$ 对 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ 一致成立, 这与文 [1, 推论 1] 的结果矛盾. 因此 $\beta=u^*$ 是不可能发生的, 则只能有 $\beta=K$. 证明完毕.

由引理 2.3–2.5, 可得如下主要定理.

定理 2.6 假设 (A1)–(A4) 成立. 对任意的 $s > c > 0$, 存在函数 $W(\mathbf{x}) \in C^2(\mathbb{R}^3)$, 满足

$$0 = D\Delta W(\mathbf{x}', z) - s\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x}', z) - dW(\mathbf{x}', z) + \int_{\mathbb{R}} b\left(W(\mathbf{x}', z - s\tau - z_1)\right) f(z_1)dz_1, \tag{2.7}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. 另外, 也有

(i) $W(\mathbf{0}) = \theta_0$;

(ii) $W(\mathbf{x}'_1, z) = W(\mathbf{x}'_2, z)$, 其中 $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2 \in \mathbb{R}^2$ 满足 $|\mathbf{x}'_1| = |\mathbf{x}'_2|$, $z \in \mathbb{R}$;

(iii) 对任意的 $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ 且 $z_0 \geq h^*(x_0, y_0)$,

$$W(x_1 + x_0, x_2 + y_0, z) \leq W(x_1, x_2, z + z_0), \ \forall (x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3;$$

(iv) $\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x}) > 0$ 对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 成立;

(v) 当 $x_1 \in (0, \infty)$ 和 $x_2 \in (0, \infty)$ 时, 分别有 $\frac{\partial}{\partial x_1}W(\mathbf{x}) > 0$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_2}W(\mathbf{x}) > 0$;

(vi) 我们有

$$\lim_{z\to\infty} \|W(\cdot, z) - K\|_{C(\mathbb{R}^2)} = 0 \quad 和 \quad \lim_{z\to-\infty} \|W(\cdot, z) - 0\|_{C(\mathbb{R}^2)} = 0;$$

(vii) 对 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial}{\partial \nu}W(\mathbf{x}) > 0$, 其中 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\nu = \frac{1}{\sqrt{1+\nu_1^2+\nu_2^2}}(\nu_1, \nu_2, 1)$.

定理 2.7 假设 $s > c > 0$, 并用 $W^s(\mathbf{x})$ 表示定理 2.6 中给出的柱状对称行波解 $W(\mathbf{x})$. 令 $U(\mathbf{0}) = W^s(\mathbf{0}) = \theta_0$, 则

$$\lim_{s\to c_+^0} \|W^s(\mathbf{x}) - U(z)\|_{C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)} = 0,$$

其中 (U, c) 是方程 (1.3) 连接 0 和 K 的平面行波解.

证明 注意到, $\|W^s(\cdot)\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)} < \infty$ 对任意 $s \in (c, c+1)$ 成立, 其中 $\alpha \in (0, 1)$ 是一个常数. 定义序列 s_n 满足 $s_n < s_{n+1} < c + 1$, 并令 $s_n \to c$, 则存在函数 $\widehat{U}(\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$, 使得当 $n \to \infty$, $W^{s_n}(0, 0, \cdot) \to \widehat{U}(\cdot)$. 由定理 2.6 (iii), 可得

$$W^{s_n}(0, 0, z) \leq W^{s_n}(x_1, x_2, z) \leq W^{s_n}\left(0, 0, z + m_*^n\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right),$$

其中 $m_*^n = \sqrt{\frac{s_n^2 - c^2}{c}}$. 由于当 $n \to \infty$ 时, $m_*^n \to 0$; 可知当 $n \to \infty$ 时, $W^{s_n}(x_1, x_2, z)$ 在任意的紧集 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中一致收敛到 $\widehat{U}(z)$; 当 $n \to \infty$ 时, $W^{s_n}(x_1, x_2, z)$ 在 $\|\cdot\|_{C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)}$ 意义下收敛到 $\widehat{U}(z)$. 从以上可知 $\widehat{U}(\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$, 且满足

$$D\widehat{U}''(\xi) - d\widehat{U}(\xi) - c\widehat{U}'(\xi) + \int_{\mathbb{R}} b(\widehat{U}(\xi - c\tau - y))f(y)dy = 0.$$

利用 $\widehat{U}(0) = \theta_0$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}\widehat{U}(z) \geq 0$, 与定理 2.6 的证明类似, 我们有 $\widehat{U}(+\infty) = K$ 和 $\widehat{U}(-\infty) = 0$, 以及 $\frac{\partial}{\partial z}\widehat{U}(z) > 0$ 对所有 $z \in \mathbb{R}$ 成立, 则利用方程 (1.1) 连接 0 和 K 的行波解的唯一性可知对所有的 $z \in \mathbb{R}$, $\widehat{U}(z) \equiv U(z)$. 证明完毕.

3 证明定理 1.2

本节将证明定理 1.2 和柱状对称行波解的不存在性. 下面主要考虑 $N = 3$ 的情形, $N = 2$ 和 $N \geq 4$ 的情形可类似得到.

回顾 $W(\mathbf{x}) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ 满足 (2.7) 和

$$W(\mathbf{x}'_1, z) = W(\mathbf{x}'_2, z), \quad 其中\ \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2 \in \mathbb{R}^2 \ 且\ |\mathbf{x}'_1| = |\mathbf{x}'_2|, \quad z \in \mathbb{R}.$$

定义

$$\Psi(\rho,z):=\Psi(|\mathbf{x}'|,z)=W(\mathbf{x}),\quad \forall\,(\mathbf{x}',z)\in\mathbb{R}^3, \tag{3.1}$$

其中 $\rho=|\mathbf{x}'|$. 由定理 2.6, $\Psi(\rho,z)$ 满足

$$0=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Psi+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Psi-s\frac{\partial}{\partial z}\Psi-d\Psi+\int_{\mathbb{R}}b(\Psi(\rho,z-s\tau-z_1))f(z_1)dz_1,$$

其中 $\rho>0$ 和 $z\in\mathbb{R}$. 另外, 再次根据定理 2.6, $\Psi(\rho,z)$ 也满足如下引理.

引理 3.1 我们有

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Psi(\rho,z)>0,\quad \forall\,\rho>0,\ z\in\mathbb{R}\ \text{ 和 }\ \frac{\partial}{\partial z}\Psi(\rho,z)>0,\quad \forall\,\rho\geq 0,\quad z\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{z\to-\infty}\|\Psi(\cdot,z)\|_{C([0,w])}=0\quad \text{和}\quad \lim_{z\to+\infty}\|\Psi(\cdot,z)-K\|_{C([0,+\infty))}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\Psi(\rho,z)>0,\quad \forall\,\rho>0,\quad z\in\mathbb{R}.$$

对任意的 $\rho\geq 0$, 利用 $\Psi(\rho,\phi(\rho)=\theta_0$ 定义函数 $\phi\in C^2((0,\infty),\mathbb{R})$, 其中 $\theta_0\in(0,u^*)$, 我们有

$$\phi'(\rho)=-\frac{\Psi_\rho(\rho,\phi(\rho))}{\Psi_z(\rho,\phi(\rho))},\quad \forall\,\rho\in[0,\infty)\quad \text{和}\quad -m_*\leq\phi'(\rho)<0,\quad \rho\in[0,\infty),\quad \phi(0)=\theta_0,\quad \phi'(0)=0.$$

因此, 由 Schauder 估计可得 $\sup_{\mathbb{R}^3}|\nabla\Psi|<\infty$ 和 $\|\Psi\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3)}<\infty$, 见文 [9, 定理 9.11]. 根据文 [26] 中相似的策略, 当 $\rho\to\infty$ 时, 对 $\phi(\rho)$ 的渐近行为有如下引理.

引理 3.2 我们有

$$\limsup_{\rho\to\infty}\phi'(\rho)<0\quad \text{和}\quad \liminf_{\rho\to\infty}\frac{\phi(\rho)}{\rho}=-m_*.$$

证明 证明类似于文 [26, 引理 5.3 和 5.4], 这里省略具体过程.

根据引理 3.2, 对任意的 $\rho>0$, 我们有 $-m_*\leq\phi'(\rho)\leq 0$ 和

$$\liminf_{\rho\to\infty}\int_0^\rho\phi'(r)dr=-m_*.$$

如同文 [26] 存在序列 $\{\rho_i\}\subset(0,\infty)$, 使得

$$\lim_{i\to\infty}\rho_i=0,\quad \lim_{i\to\infty}\phi'(\rho_i)=-m_*\quad \text{和}\quad \sup_{i\in\mathbb{N}}|\rho_{i+1}-\rho_i|<\infty.$$

令 $\nu_0:=\frac{1}{\sqrt{1+m_*^2}}(-1,m_*)^T$, 则

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\partial}{\partial\nu_0}\Psi(\rho,z)\bigg|_{(\rho,z)=(\rho_i,\phi(\rho_i))}=0.$$

根据引理 3.1, 对所有的 $\rho\geq 0$, $z\in\mathbb{R}$, 有

$$\frac{\partial}{\partial\nu_0}\Psi(\rho,z)>0.$$

对 $\frac{\partial\Psi}{\partial\nu_0}$ 利用 Harnack 不等式 (见文 [9, 推论 9.25]) 可知, 对任意给定的 $r>0$, 存在正常数 $p>0$ 和 $C>0$, 使得

$$\left\|\frac{\partial\Psi}{\partial\nu_0}\right\|_{L^p(B((\rho_i,\phi(\rho_i),r)))}\leq C\frac{\partial}{\partial\nu_0}\Psi(\rho_i,\phi(\rho_i))\to 0,$$

其中 $i\to\infty$. 因为 $\sup_{i\in\mathbb{N}}|\rho_{i+1}-\rho_i|<\infty$, 则对任意 $r>1$ 充分大, 有

$$\lim_{\rho\to\infty}\left\|\frac{\partial\Psi}{\partial\nu_0}\right\|_{L^p(B((\rho_i,\phi(\rho_i),r)))}=0. \tag{3.2}$$

引理 3.3

$$\lim_{\rho\to\infty}\phi'(\rho)=-m_* \quad 和 \quad \lim_{\rho\to\infty}\Psi(\rho+x,\phi(\rho)+z)=U\left(\frac{c}{s}(z+m_*x)\right) \ 在\ C^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)\ 中$$

成立.

证明 对任意的 $\rho>0$, 定义 $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ 如下:

$$\begin{pmatrix} x-\rho \\ z-\phi(\rho)\end{pmatrix}=\xi\left(\begin{array}{c}\dfrac{-1}{\sqrt{1+m_*^2}}\\ \dfrac{m_*}{\sqrt{1+m_*^2}}\end{array}\right)+\eta\left(\begin{array}{c}\dfrac{m_*}{\sqrt{1+m_*^2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+m_*^2}}\end{array}\right).$$

令 $\{\rho_i\}$ 为递增正序列且当 $i\to\infty$ 时, $\rho_i\to\infty$. 令

$$\widetilde{U}(\xi,\eta):=\lim_{i\to\infty}\Psi\left(\rho_i+\frac{-\xi+m_*\eta}{\sqrt{1+m_*^2}},\,\phi(\rho_i)+\frac{m_*\xi+\eta}{\sqrt{1+m_*^2}}\right),$$

则 $\widetilde{U}(\xi,\eta)\in C^2(\mathbb{R}^2)$, 并满足

$$0=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\widetilde{U}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\widetilde{U}-c\frac{\partial}{\partial\eta}\widetilde{U}-d\widetilde{U}+\int_{\mathbb{R}}b(\widetilde{U}(\xi,\eta-s\tau-z_1))f(z_1)dz_1,$$

其中 $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$. 由 (3.2) 可得 $\frac{\partial}{\partial\eta}\widetilde{U}(\xi,\eta)\equiv 0$, 这表明 $\widetilde{U}(\xi,\eta)$ 是独立于 ξ 并仅依赖于 η. 用 $\widetilde{U}(\eta)$ 表示 $\widetilde{U}(\xi,\eta)$, 则有

$$0=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\widetilde{U}-c\frac{\partial}{\partial\eta}\widetilde{U}-d\widetilde{U}+\int_{\mathbb{R}}b(\widetilde{U}(\eta-s\tau-z_1))f(z_1)dz_1$$

和

$$\widetilde{U}(0)=\theta_0\in(0,u^*),\quad \frac{\partial}{\partial\eta}\widetilde{U}\geq 0,\quad \forall\,\eta\in\mathbb{R}.$$

与引理 2.4, 2.5 相似, 可得 $\frac{\partial}{\partial\eta}\widetilde{U}>0$, $\lim_{\eta\to-\infty}\widetilde{U}(\eta)=0$ 和 $\lim_{\eta\to+\infty}\widetilde{U}(\eta)=K$, 则由方程 (1.4) 行波解的唯一性可得

$$\widetilde{U}(\cdot)\equiv U(\cdot).$$

利用 ρ_i 的任意性,

$$\lim_{\rho\to\infty}\left\|U(\eta)-\Psi\left(\rho+\frac{-\xi+m_*\eta}{\sqrt{1+m_*^2}},\,\phi(\rho)+\frac{m_*\xi+\eta}{\sqrt{1+m_*^2}}\right)\right\|_{C^2_{\rm loc}(\mathbb{R})}=0, \tag{3.3}$$

这表明

$$\lim_{\rho\to\infty}\Psi(\rho+x,\phi(\rho)+z)=U\left(\frac{c}{s}(z+m_*x)\right)\ 在\ C^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)\ 中.$$

根据 (3.3) 有

$$\lim_{\rho\to\infty}(-\Psi_\rho(\rho,\phi(\rho))+m_*\Psi_z(\rho,\phi(\rho)))=0$$

和

$$\lim_{\rho\to\infty}(m_*\Psi_\rho(\rho,\phi(\rho))+\Psi_z(\rho,\phi(\rho)))=\frac{s}{c}U_\eta(0)>0,$$

则

$$\lim_{\rho\to\infty}\Psi_\rho(\rho,\phi(\rho))=\frac{cm_*}{s}U_\eta(0),\quad \lim_{\rho\to\infty}\Psi_z(\rho,\phi(\rho))=\frac{c}{s}U_\eta(0)\ \ 和\ \ \lim_{\rho\to\infty}\phi'(\rho)=-\frac{\Psi_\rho(\rho,\phi(\rho))}{\Psi_z(\rho,\phi(\rho))}=-m_*$$

成立. 证明完毕.

结合引理 3.1–3.3, 对 $\Psi(\rho,z)$ 有如下主要结果.

定理 3.4 假设 (A1)–(A4) 成立. 假定 $c>0$. $\Psi(\rho,z)$ 由 (3.1) 所定义, 则 $\Psi(\rho,z)$ 满足

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}-s\frac{\partial\Psi}{\partial z}+f(\Psi)=0.$$

另外:

(i) 对任意的 $(\rho,z)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$, $\frac{\partial}{\partial\rho}\Psi(\rho,z)>0$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}\Psi(\rho,z)>0$ 成立;

(ii) $\lim_{z\to+\infty}\|\Psi(\cdot,z)-K\|_{C(0,\omega)}=0$, $\lim_{z\to\infty}\|\Psi(\cdot,z)\|_{C(0,+\infty)}=0$;

(iii) $\lim_{\rho\to\infty}\phi'(\rho)=-m_*$;

(iv) $\lim_{\rho\to\infty}\|\Psi(\rho+x,\phi(\rho)+z)-U(\frac{c}{s}(z+m_*x))\|_{C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)}=0$.

下面证明柱状对称行波解的不存在性.

定理 3.5 假设 (A1)–(A4) 成立. 假定 $c>0$. 对任意的 $s>c>0$, 不存在函数 $W(\mathbf{x})$ 满足

$$0=D\Delta W(\mathbf{x})-s\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x})-dW(\mathbf{x})+\int_{\mathbb{R}}b(W(\mathbf{x}',z-s\tau-z_1))f(z_1)dz_1,\quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,$$

$$\lim_{z\to-\infty}W(\mathbf{0},z)=0,\quad \lim_{z\to\infty}W(\mathbf{0},z)=K \ \ 和\ \ \frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x})\geq 0,\quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}W(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}'=0}\leq 0,\quad i=1,2.$$

证明 记 $s>c>0$. 假设存在柱状对称的行波解 $W(\mathbf{x})$ 满足

$$0=D\Delta W(\mathbf{x})-s\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x})-dW(\mathbf{x})+\int_{\mathbb{R}}b\left(W(\mathbf{x}',z-s\tau-z_1)\right)f(z_1)dz_1,$$

$$\lim_{z\to-\infty}W(\mathbf{0},z)=0,\quad \lim_{z\to\infty}W(\mathbf{0},z)=K,\quad \frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x})\geq 0\ \ 和\ \ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}W(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}'=0}\leq 0,\quad i=1,2.$$

令 $\widetilde{U}(z)=W(0,0,z)$, 其中 $z\in\mathbb{R}$, 则

$$\begin{aligned}&-D\frac{\partial^2}{\partial z^2}\widetilde{U}(z)+s\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{U}(z)-d\widetilde{U}(z)+\int_{\mathbb{R}}b(\widetilde{U}(z-s\tau-z_1))f(z_1)dz_1\\&=D\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}W(\mathbf{x})\Big|_{(x_1=x_2=0)}+D\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}W(\mathbf{x})\Big|_{(x_1=x_2=0)}\leq 0.\end{aligned}$$

这表明 $\widetilde{U}(x+st)$ 是

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u-du+\int_{\mathbb{R}}b\left(u(x-s\tau-z_1)\right)f(z_1)dz_1 \tag{3.4}$$

的一个下解. 由文 [15, 引理 2.6] 可知 $u^+(x,t)=U(x+ct+\widehat{\xi}+\sigma_0\delta(\mathrm{e}^{\beta_0\tau}-\mathrm{e}^{-\beta_0 t}))+\delta\mathrm{e}^{-\beta_0 t}$ 是 (3.4) 的一个上解, 其中 σ_0, δ, β_0 是正的常数且 $\widehat{\xi}\in\mathbb{R}$ 是任意数. 注意到对任意的 $r\in[-\tau,0]$, 有

$$u^+(x,r)=U(x+cr+\widehat{\xi}+\sigma_0\delta(\mathrm{e}^{\beta_0\tau}-\mathrm{e}^{-\beta_0 r}))+\delta\mathrm{e}^{-\beta_0 r}\ \ 和\ \ u^-(-\infty,r)=0,\quad u^-(+\infty,r)=K,$$

则存在 $\widehat{\xi}>0$ 充分大, 使得 $u^-(x,r)\leq u^+(x,r)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $r\in[-\tau,0]$. 根据比较原理, 我们有

$$\widetilde{U}(x+st)=u^-(x,t)\leq u^+(x,t),\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0.$$

注意到 $s>c$. 当 $t\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}0<\widetilde{U}(0)&=u^-(-st,t)\leq u^+(-st,t)\\&\leq U((c-s)t+\widehat{\xi}+\sigma_0\delta(\mathrm{e}^{\beta_0\tau}-\mathrm{e}^{-\beta_0 t}))+\delta\mathrm{e}^{-\beta_0 t}\to 0.\end{aligned}$$

矛盾. 证明完毕.

定理 3.6 假设 (A1)–(A4) 成立. 对任意的 $s<c$, 不存在函数 $W(\mathbf{x})$ 满足

$$0=D\Delta W(\mathbf{x})-s\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x})-dW(\mathbf{x})+\int_{\mathbb{R}}b(W(\mathbf{x}',z-s\tau-z_1))f(z_1)dz_1,\quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\tag{3.5}$$

$$\lim_{z\to-\infty}W(0,z)=0,\quad \lim_{z\to\infty}W(0,z)=K\tag{3.6}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial z}W(\mathbf{x})\ge 0,\quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}W(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}'=0}\ge 0,\quad i=1,2.\tag{3.7}$$

证明 再一次利用反证法证明. 对任意 $s<c$, 假设存在柱状对称的行波解 $W(\mathbf{x})$ 满足 (3.5)–(3.7). 令 $\widehat{U}(x_3)=W(0,0,z)$, 其中 $z\in\mathbb{R}$, 则有

$$\begin{aligned}&-D\frac{\partial^2}{\partial z^2}\widetilde{U}(z)+s\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{U}(z)-d\widetilde{U}(z)+\int_{\mathbb{R}}b(\widetilde{U}(z-s\tau-z_1))f(z_1)dz_1\\&=D\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}W(\mathbf{x})\Big|_{(x_1=x_2=0)}+D\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}W(\mathbf{x})\Big|_{(x_1=x_2=0)}\ge 0.\end{aligned}$$

这表明 $u^+(x,t)=\widetilde{U}(x+st)$ 是方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u-du+\int_{\mathbb{R}}b\left(u(x-s\tau-z_1)\right)f(z_1)dz_1\tag{3.8}$$

的一个下解. 由文 [15, 引理 2.6] 可知, $u^-(x,t)=U(x+ct-\widetilde{\xi}+\sigma_0\delta(\mathrm{e}^{\beta_0\tau}-\mathrm{e}^{-\beta_0 t}))-\delta\mathrm{e}^{-\beta_0 t}$ 是方程 (3.8) 的一个上解. 再次利用比较原理, 有

$$\widetilde{U}(x+st)=u^+(x,t)\ge u^-(x,t),\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0.$$

由于 $c>s$, 则当 $t\to\infty$ 时, 有

$$K>\widetilde{U}(0)\ge U((c-s)t-\widetilde{\xi}+\sigma_0\delta(\mathrm{e}^{\beta_0\tau}-\mathrm{e}^{-\beta_0 t}))-\delta\mathrm{e}^{-\beta_0 t}\to K.$$

矛盾. 证明完毕.

致谢 感谢审稿人给出的意见和建议.

参 考 文 献

[1] Aronson D. G., Weinberger H. F., Multidimensional nonlinear diffusions arising in population genetics, *Adv. Math.*, 1978, **30**: 33–76.

[2] Bao X., Huang W. H., Traveling curved front of bistable reaction-diffusion equations with delay, *E. J. Differential Equations*, 2015, **252**: 1–17.

[3] Bao X., Liu J., Pyramidal traveling fronts in a nonlocal delayed diffusion equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, **463**: 294–313.

[4] Bao X., Wang Z. C., Pyramidal traveling front of bistable reaction-diffusion equations with delay, *Ann. of Diff. Eqs.*, 2014, **30**: 127–136.

[5] Bao X., Li W. T., Wang Z. C., Uniqueness and stability of time-periodic pyramidal fronts for a periodic competition-diffusion system, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2020, **19**: 253–277.

[6] Bonnet A., Hamel F., Existence of nonplanar solutions of a simple model of premixed Bunsen flames, *SIAM J. Math. Anal.*, 1999, **31**: 80–118.

[7] Bu Z. H., Wang Z. C., Curved fronts of monostable reaction-advection-diffusion equations in space-time periodic media, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2016, **15**: 139–160.

[8] Faria T., Huang W., Wu J., Traveling waves for delayed reaction diffusion equations with nonlocal reponse, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 2006, **462**: 229–261.

[9] Gibarg D., Trudinger N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[10] Gourley S. A., Ruan S., Convergence and travelling fronts in functional differential equations with nonlocal terms: a competition model, *SIAM J. Math. Anal.*, 2003, **35**: 806–822.

[11] Gourley S. A., So J. H. W., Wu J., Non-locality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics, *J. Math. Sci.*, 2004, **124**: 5119–5153.

[12] Hamel F., Monneau R., Roquejoffre J. M., Existence and qualitative properties of multidimensional conical bistable fronts, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, **13**: 1069–1096.

[13] Hamel F., Monneau R., Roquejoffre J. M., Asymptotic properties and classification of bistable fronts with Lipschitz level sets, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2006, **14**: 75–92.

[14] Kurokawa Y., Taniguchi M., Multi-dimensional pyramidal travelling fronts in the Allen–Cahn equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2011, **141**: 1031–1054.

[15] Ma S., Wu J., Existence, uniqueness and asymptotic stability of traveling wavefronts in a non-local delayed diffusion equation, *J. Dynam. Differential Equations*, 2007, **19**: 391–436.

[16] Liu J., Asymptotic stability of pyramidal traveling front for nonlocal delayed diffusion equation, submitted.

[17] Ninomiya H., Taniguchi M., Existence and global stability of traveling curved fronts in the Allen–Cahn equations, *J. Differential Equations*, 2005, **213**: 204–233.

[18] Ninomiya H., Taniguchi M., Global stability of traveling curved fronts in the Allen–Cahn equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2006, **15**: 819–832.

[19] Sheng W. J., Li W. T., Wang Z. C., Periodic pyramidal traveling fronts of bistable reaction-diffusion equations with time-periodic nonlinearity, *J. Differential Equations*, 2012, **252**: 2388–2424.

[20] Sheng W. J., Li W. T., Wang Z. C., Multidimensional stability of V-shaped traveling fronts in the Allen–Cahn equation, *Sci. China Math.*, 2013, **56**: 1969–1982.

[21] Sheng W. J., Time periodic traveling curved fronts of bistable reaction-diffusion equations in $\mathbb{R}^N$, *Applied Mathematics Letters*, 2016, **54**: 22–30.

[22] Sheng W. J., Time periodic traveling curved fronts of bistable reaction-diffusion equations in $\mathbb{R}^3$, *Annali di Matematica*, 2017, **196**: 617–639.

[23] So J. W. H., Wu J., Zou X., A reaction-diffusion model for a single species with age structure. I. Traveling wavefronts on unbounded domains, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 2001, **457**: 1841–1853.

[24] Taniguchi M., Traveling fronts of pyramidal shapes in the Allen–Cahn equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 2007, **39**: 319–344.

[25] Taniguchi M., The uniqueness and asymptotic stability of pyramidal traveling fronts in the Allen–Cahn equations, *J. Differential Equations*, 2009, **246**: 2103–2130.

[26] Taniguchi M., Multi-dimensional traveling fronts in bistable reaction-diffusion equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2012, **32**: 1011–1046.

[27] Taniguchi M., An $(N-1)$-dimensional convex compact set gives an N-dimensional traveling front in the Allen–Cahn equation, *SIAM J. Math. Anal.*, 2015, **47**: 455–476.

[28] Taniguchi M., Convex compact sets in $\mathbb{R}^{N-1}$ give traveling fronts of cooperative-diffusion system in $\mathbb{R}^N$, *J. Differential Equations*, 2016, **260**: 4301–4338.

[29] Taniguchi M., Axially asymmetric traveling fronts in balanced bistable reaction-diffusion equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2019, **36**: 1791–1816.

[30] Taniguchi M., Axially asymmetric traveling fronts in balanced bistable reaction-diffusion equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* Doi: 10.3934/dcds.2020126.

[31] Wang Z. C., Traveling curved fronts in monotone bistable systems, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2012, **32**: 2339–2374.

[32] Wang Z. C., Li W. T., Ruan S., Existence and stability of traveling wave fronts in reaction advection diffusion equations with nonlocal delay, *J. Differential Equations*, 2007, **238**: 153–200.

[33] Wang Z. C., Li W. T., Ruan S., Entire solutions in bistable reaction-diffusion equations with nonlocal delayed nonlinearity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2009, **361**: 2047–2084.

[34] Wang Z. C., Wu J., Periodic traveling curved fronts in reaction-diffusion equation with bistable time-periodic nonlinearity, *J. Differential Equations*, 2011, **250**: 3196–3229.

[35] Wang Z. C., Cylindrically symmetric traveling fronts in periodic reaction-diffusion equations with bistable nonlinearity, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2015, **145**: 1053–1090.

[36] Wang Z. C., Bu Z. H., Nonplanar traveling fronts in reaction-diffusion equations with combustion and degenerate Fisher-KPP nonlinearities, *J. Differential Equations*, 2016, **260**: 6405–6450.

[37] Wang Z. C., Li W. T., Ruan S., Existence, uniqueness and stability of pyramidal traveling fronts in bistable reaction-diffusion systems, *Sci. China Math.*, 2016, **59**: 1869–1908.

[38] Wu J., Theory and Applications of Partial Functional-Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, 119, Springer-Verlag, New York. 1996.