第65卷第4期 数学学报中文版 Vol.65, No.4
2022年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2022

DOI: 10.12386/A20210049 **文献标识码: A**

上三角算子矩阵的局部谱性质及其应用

王晓丽

内蒙古大学数学科学学院 呼和浩特 010021
内蒙古财经大学统计与数学学院 呼和浩特 010070
E-mail: ncdwangxiaoli@163.com

阿拉坦仓

内蒙古师范大学数学科学学院 呼和浩特 010022
E-mail: alatanca@imu.edu.cn

摘　要　本文研究了 Banach 空间中上三角算子矩阵 $M_C=\begin{pmatrix} A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}\in L(X\oplus Y)$ 的局部谱性质, 其中 $A\in L(X)$, $B\in L(Y)$, $C\in L(Y,X)$, X,Y 是无穷维复 Banach 空间, $L(X,Y)$ 表示 X 到 Y 的所有有界线性算子. 首先考察了 M_C 的单值扩张性, 借助于向量值解析函数和解析核等工具给出了集合 $\mathcal{S}(M_C)=\{\lambda\in\mathbb{C}: M_C$ 在 λ 没有单值扩张性$\}$ 的刻画, 并得到对任意 $C\in L(Y,X)$ 等式 $\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$ 都成立的条件. 进一步, 研究了 M_C 的单值扩张性扰动, 得到了对于给定 $A\in L(X)$, $B\in L(Y)$, 等式 $\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$ 成立时 C 所需的条件. 同时, 举例说明了这些条件的合理性. 最后, 把所得结果运用到上三角算子矩阵的谱和局部谱上, 得到了 $\sigma(M_C)=\sigma(A)\cup\sigma(B)$ 和 $\sigma_{M_C}(x\oplus 0)=\sigma_A(x)$ 成立的条件, 并给出了 M_C 局部谱子空间的一个刻画.

关键词　算子矩阵; 局部谱; 单值扩张性; 解析函数; 扰动
MR(2010) 主题分类　47A10, 47A11, 47A53
中图分类　O177.7

The Local Spectral Properties for Upper Triangular Operator Matrices and Application

Xiao Li WANG

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021*, P. R. China*
Statistics and Mathematics College, Inner Mongolia University of Finance and Economics, Hohhot 010070*, P. R. China*
E-mail: *ncdwangxiaoli@163.com*

Alatancang

School of Mathematical Science, Inner Monogolia Normal University, Hohhot 010022*, P. R. China*
E-mail: *alatanca@imu.edu.cn*

收稿日期: 2020-11-03; 接受日期: 2021-03-26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11761029); 内蒙古自治区高等学校科学技术研究项目 (NJZY22323)

Abstract We consider the local spectral properties for the upper triangular operator matrix $M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in L(X \oplus Y)$, where $A \in L(X)$, $B \in L(Y)$, $C \in L(Y, X)$ and X, Y are infinite-dimensional complex Banach spaces. Firstly we investigate the single-valued extension property for M_C by considering the set $\mathcal{S}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T$ does not have the single-valued extension property at $\lambda\}$. By means of vector valued analytic functions and analytic kernels, we obtain the characterization of $\mathcal{S}(M_C)$ and in particular we develop some conditions on A and B under which the equality $\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$ holds for arbitrary C. Further, we show that for certain operator C the equality $\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$ holds for arbitrary A, B. Also, we give some examples to illustrate our results. At the end, we apply the obtained results to spectral perturbation and local spectral perturbation for upper triangular operator matrices, obtain conditions for which equalities $\sigma(M_C) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$ and $\sigma_{M_C}(x \oplus 0) = \sigma_A(x)$ hold true, and give a characterization for the local spectral subspaces of M_C.

Keywords operator matrix; local spectrum; the single-valued extension property; analytic function; perturbation

MR(2010) Subject Classification 47A10, 47A11, 47A53

Chinese Library Classification O177.7

1 引言

算子的谱理论在数学、物理学中有着广泛的应用, 它是泛函分析的一个重要组成部分, 其自身已经形成了一套完整的理论. 通过研究算子的谱, 不仅可以了解算子本身的构造, 还可以刻画系统的能量变化、稳定性及解的结构等. 近几十年来, 许多学者把 Hilbert 空间上正规算子的谱理论推广到了 Banach 空间上, 其中以 Dunford 的谱算子 [8] 最为著名, 之后 Colojoară, Foiaş, Lange, 王声望、邹承祖等人也在这一方面做出了很多工作, 逐渐形成了算子谱理论的一个分支, 即局部谱理论 [13, 21]. 局部谱理论是解析函数理论在谱理论中的应用, 它是利用复变解析函数论的知识, 如 Cauchy 积分定理、Liouville 定理、Taylor 展式等, 研究算子在某点的局部性质. 近些年来, 许多学者利用局部谱理论对算子谱的精细结构进行研究, 得到了很多很有意义的结论. 同时, 这些结论也进一步推动了局部谱理论的研究, 使得局部谱理论逐渐成为一门成熟的学科.

在诸多线性算子中有一类值得我们去关注, 那就是分块算子矩阵. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 如果 H 可分解为两个 Hilbert 空间 H_1 和 H_2 的直和, 即 $H = H_1 \oplus H_2$, 则 T 可以分解为 2×2 分块算子矩阵

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 T_{ij} 是 H_j 到 H_i 的有界线性算子, $i, j = 1, 2$. 若 H_1 是 H 的不变子空间, 则 $T_{21} = 0$, 此时 T 分解为一个上三角算子矩阵

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

因此, 研究 T 的性质就转化为研究较为简单的分块算子的性质 [5, 17]. 这个思想渊源于著名的有限维线性空间矩阵的 Jordan 分解理论, 它成功地应用于 Hilbert 空间的正规算子的谱分解理论,

后来又发展成为 Banach 空间上的谱算子理论. 分块算子矩阵的研究除了有上述理论意义之外, 还具有实际的应用背景. 它广泛地出现于系统理论、非线性分析以及发展方程问题等领域. 例如, 由无穷维 Hamilton 系统导出的无穷维 Hamilton 算子、电磁场论问题导出的 Dirac 算子以及 Krein 空间中的标准对称算子都具有分块算子矩阵的形式. 因此, 算子矩阵的研究不仅具有理论意义, 还具有深刻的实际意义.

目前, 国内外学者主要研究上三角算子矩阵 $M_C = \left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \in L(X \oplus Y)$ 谱的精细结构, 其中 $A \in L(X)$, $B \in L(Y)$, $C \in L(Y, X)$, X, Y 是无穷维复 Banach 空间, $L(X, Y)$ 表示 X 到 Y 的所有有界线性算子. 值得注意的是, 近年来, 不少学者给出了关于

$$\sigma_*(A) \cup \sigma_*(B) \backslash \sigma_*(M_C) \tag{1.3}$$

的刻画 [1, 3, 4, 6, 15, 22]. 例如, 阿拉坦仓等在文 [1] 中给出了 Hilbert 空间上的分块算子矩阵 M_C 的满谱、近似点谱以及谱的刻画, 曹小红等人在文 [4] 中给出了 Hilbert 空间上的分块算子矩阵 M_C 的半 Fredholm 谱刻画, Rashid 在文 [15] 中给出了 Banach 空间中 M_C 的 Weyl 谱和本质 Weyl 谱刻画. 近些年来, 局部谱理论中一些强有力的新工具极大地丰富了算子谱理论的研究, 其中一个非常重要的概念 — 单值扩张性, 更是在研究算子谱的精细结构中发挥了重要作用. 可以说, 如果一个算子没有单值扩张性, 其谱的精细结构很难得到让人满意的结果 [18]. 目前, 利用算子的单值扩张性去刻画线性算子的各类谱集是国内外研究的热点之一. 对于线性算子来说, 有关单值扩张性的刻画有很多 [2, 9, 13], 但是关于算子矩阵的单值扩张性刻画却不多见. 因此, 本文研究了上三角算子矩阵 M_C 的单值扩张性, 通过考察集合

$$\mathcal{S}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T \text{ 在 } \lambda \text{ 没有单值扩张性}\}, \tag{1.4}$$

给出 $\mathcal{S}(M_C)$ 的刻画, 进而给出任意 $C \in L(Y, X)$ 等式 $\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$ 成立的条件; 进一步研究了 M_C 的单值扩张性扰动, 给出了单值扩张性扰动不变的充分条件; 最后把所得结果应用在上三角算子矩阵 M_C 的局部谱和谱上, 得到了等式 $\sigma(M_C) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$ 和 $\sigma_{M_C}(x \oplus 0) = \sigma_A(x)$, $\forall\, x \in X$ 成立的新条件, 并给出了局部谱子空间的刻画.

2 预备知识

设 X, Y 为无穷维复 Banach 空间, $L(X, Y)$ 为 X 到 Y 的有界线性算子全体. 当 $Y = X$ 时记 $L(X, X) = L(X)$. 对于 $T \in L(X)$, 令 $T^*, \rho(T), \sigma(T), \sigma_{\mathrm{p}}(T), \sigma_{\mathrm{su}}(T), \sigma_{\mathrm{ap}}(T), N(T)$ 和 $R(T)$ 分别表示 T 的共轭算子, 预解集, 谱, 点谱, 满谱, 近似点谱, 零空间以及值域. 对于 $T \in L(X)$, 向量 $x \in X$, $U \subseteq \mathbb{C}$, 方程

$$(T - \lambda) f(\lambda) = x, \quad \forall\, \lambda \in U \tag{2.1}$$

的解析解 $f(\lambda)$ 的存在性和唯一性值得人们关注. 在 T 的预解集 $\rho(T)$ 上, 这个解析解很容易得到. 事实上, 对任意的 $\lambda \in \rho(T)$, 方程 (2.1) 两侧同乘 $(T - \lambda I)^{-1}$ 就可以得到唯一解 $f(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1} x$. 但是, 对于某些 $x \in X$, 方程 (2.1) 的解析解有可能在包含谱点的开集中存在. 在这种情况下, 研究方程 (2.1) 解的唯一性就有着特别的意义, 因而引出下面的定义.

定义 2.1 [8] 设 $T \in L(X)$, 如果对于任意 $U \subseteq \mathbb{C}$, 满足方程

$$(T - \lambda) f(\lambda) = 0, \quad \forall\, \lambda \in U$$

的唯一解析函数 $f: U \to X$ 是 $f \equiv 0$, 则称 T 有单值扩张性 (the single-valued extension property), 简称 T 有 SVEP.

显然, 当 T 有 SVEP 时, 方程 (2.1) 的解析解是唯一的. 这个性质最早是由 Dunford 在研究正规算子的一类重要推广 — 谱算子时引入的, 后来, Finch 将这一概念局部化, 得到了算子 T 在点 λ 有 SVEP 的定义.

定义 2.2 [9] 设 $T \in L(X)$, 如果对于 λ 的每一邻域 U, 满足方程

$$(T-\mu)f(\mu)=0, \quad \forall\, \mu \in U$$

的唯一的解析函数 $f: U \to X$ 是 $f \equiv 0$, 则称 T 在 λ 有 SVEP. 如果 T 在任一点 λ 有 SVEP, 则称 T 有 SVEP.

由定义 2.2 知, T 在预解集 $\rho(T)$ 以及 $\operatorname{iso}\sigma(T)$ 中的每一点都有 SVEP. 更一般地, 如果 $\operatorname{int}\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ 为空, 则 T 有 SVEP. 因此, 特别地, 所有具有实谱的算子都有 SVEP. 另一方面, 有很多例子表明当 T 有 SVEP 时, $\operatorname{int}\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ 不一定是空集 [13].

考虑如下集合

$$\mathcal{S}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}: T \text{ 在 } \lambda \text{ 没有 SVEP}\}.$$

根据定义 2.2, $\lambda \in \mathcal{S}(T)$ 当且仅当存在邻域 λ 的一个邻域 G_λ 和非零解析函数 $f: G_\lambda \to X$ 使得对一切 $\mu \in G_\lambda$,

$$(T-\mu)f(\mu)=0$$

都成立. 显然, 如果 T 有 SVEP, 则 $\mathcal{S}(T)=\emptyset$. 另外, 由解析函数恒等定理 [13], $\mathcal{S}(T)$ 是一个开集, 并且 $\mathcal{S}(T) \subseteq \operatorname{int}\sigma(\mathrm{T})$. 根据文 [9], 所有满但不可逆的算子都没有 SVEP, 因此有

$$\sigma(T)=\mathcal{S}(T)\cup\sigma_{\mathrm{su}}(T). \tag{2.2}$$

特别地,

$$\partial\mathcal{S}(T)\subset\sigma_{\mathrm{su}}(T), \tag{2.3}$$

其中 $\partial\mathcal{S}(T)$ 表示 $\mathcal{S}(T)$ 的拓扑边界. 显然, 如果 T 有 SVEP, 则 $\sigma(T)=\sigma_{\mathrm{su}}(T)$. 如果 T^* 有 SVEP, 则 $\sigma(T)=\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$. 如果 T, T^* 都有 SVEP, 则

$$\sigma(T)=\sigma_{\mathrm{su}}(T)=\sigma_{\mathrm{ap}}(T). \tag{2.4}$$

关于 SVEP 的更多内容, 可见文 [2, 9, 13, 21].

定义 2.3 [13] 对于 $T \in L(X)$, $x \in X$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$, 如果存在 λ 的一个邻域 U_λ 和解析函数 $f: U_\lambda \to X$, 使得对于所有 $\mu \in U_\lambda$,

$$(T-\mu)f(\mu)=x$$

成立, 则 $\lambda \in \rho_T(x)$, $\rho_T(x)$ 称为 T 在 x 处的局部预解集. T 在 x 的局部谱 $\sigma_T(x)$ 定义为

$$\sigma_T(x)=\mathbb{C}\backslash\rho_T(x).$$

易知 $\rho_T(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 的开子集, $\sigma_T(x)$ 是闭子集, 并且 $\rho(T)\subseteq\rho_T(x), \sigma_T(x)\subseteq\sigma(T)$. 由文 [2] 知, 如果 T 没有 SVEP, 则存在 $0\neq x\in X$ 满足 $\sigma_T(x)=\emptyset$. 由文 [13] 知

$$\sigma_{\mathrm{su}}(T)=\bigcup_{x\in X}\sigma_T(x), \tag{2.5}$$

$$\partial\sigma_T(x)\subseteq\sigma_{\mathrm{ap}}(T). \tag{2.6}$$

因此, 由 (2.2), 如果 T 有 SVEP, 则

$$\sigma(T)=\sigma_{\mathrm{su}}(T)=\bigcup_{x\in X}\sigma_T(x). \tag{2.7}$$

下面这个概念在谱分解理论中起到重要作用, 这就是局部谱子空间.

定义 2.4 [13] 对于 $T\in L(X)$, T 的局部谱子空间定义为

$$X_T(F):=\{x\in X:\sigma_T(x)\subseteq F\},$$

其中 F 是复平面 $\mathbb{C}$ 的子集.

显然, $X_T(F)=X_T(\sigma(T)\cap F)$, 当 $F\subseteq G$ 时, $X_T(F)\subseteq X_T(G)$. 另外, 由文 [13] 知, $X_T(F)$ 是 T 的超不变子空间, 但不一定是闭的. 然而, 如果 T 有 SVEP, 则 $X_T(\emptyset)$ 是闭的, 且 T 有 SVEP 当且仅当 $X_T(\emptyset)=\{0\}$.

下面, 我们来考察算子矩阵的单值扩张性 (SVEP). 对于对角算子矩阵, 不难得到如下结论.

引理 2.5 设 $A\in L(X)$, $B\in L(Y)$, 则对于 $M_0=\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)$, 有

$$\mathcal{S}(M_0)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B). \tag{2.8}$$

证明 如果 $\lambda\in\mathcal{S}(M_0)$, 则存在 λ 的一个邻域 G_λ 以及 G_λ 到 $X\oplus Y$ 的非零解析函数 $F(\mu)=f(\mu)\oplus g(\mu)$ 满足

$$(M_0-\mu)F(\mu)=0, \tag{2.9}$$

即

$$\begin{cases}(A-\mu)f(\mu)=0,\\(B-\mu)g(\mu)=0.\end{cases} \tag{2.10}$$

由于 $F(\mu)$ 是非零的, 我们得到 $\lambda\in\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$.

反之, 如果 $\lambda\in\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$, 不妨设 $\lambda\in\mathcal{S}(A)$, 则存在 λ 的一个邻域 G_λ 以及非零解析函数 $f:G_\lambda\to X$, 使得对任意 $\mu\in G_\lambda$,

$$(A-\mu)f(\mu)=0 \tag{2.11}$$

成立. 令 $F(\mu)=f(\mu)\oplus 0$, 则 $F(\mu)$ 是 G_λ 到 $X\oplus Y$ 的非零解析函数, 且满足对 $\forall\,\mu\in G_\lambda$,

$$(M_0-\mu)F(\mu)=\begin{pmatrix}A-\mu&0\\0&B-\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(\mu)\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

因此 $\lambda\in\mathcal{S}(M_0)$. 证毕.

由以上引理可以看出, 对角算子矩阵的 SVEP 可以完全由对角算子刻画. 但是对于上三角算子矩阵 $M_C=\left(\begin{smallmatrix}A&C\\0&B\end{smallmatrix}\right)$ 的 SVEP, 有如下结论.

引理 2.6 对于任意 $A\in L(X)$, $B\in L(Y)$, $C\in L(Y,X)$, 有

$$\mathcal{S}(A)\subseteq\mathcal{S}(M_C)\subseteq\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B). \tag{2.13}$$

证明 设 $\lambda\in\mathcal{S}(A)$, 则存在 λ 的一个邻域 G_λ 以及非零解析函数 $f:G_\lambda\to X$, 使得对任意 $\mu\in G_\lambda$,

$$(A-\mu)f(\mu)=0$$

成立. 令 $F(\mu)=f(\mu)\oplus 0$, 则 $F(\mu)$ 是 G_λ 到 $X\oplus Y$ 的非零解析函数, 且满足对 $\forall\,\mu\in G_\lambda$,

$$(M_C-\mu)F(\mu)=\begin{pmatrix} A-\mu & C \\ 0 & B-\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(\mu) \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

因此 $\lambda\in\mathcal{S}(M_C)$.

下面证第二个 "$\subseteq$". 设 $\lambda\in\mathcal{S}(M_C)$, 则存在 λ 的一个邻域 G_λ 以及 G_λ 到 $X\oplus Y$ 的非零解析函数 $F(\mu)=f(\mu)\oplus g(\mu)$ 满足

$$(M_C-\mu)F(\mu)=0,$$

即

$$\begin{cases} (A-\mu)f(\mu)+Cg(\mu)=0, \\ (B-\mu)g(\mu)=0. \end{cases} \tag{2.15}$$

由于 $F(\mu)$ 是非零的, 我们得到 $\lambda\in\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$. 证毕.

注 2.7 我们注意到, (2.13) 中的第二个包含关系可以是严格的. 例如, 令

$$x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)\in l^2,\quad M_C=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\in L(l^2\oplus l^2),$$

其中

$$Ax=(0,x_1,x_2,x_3,\ldots),\quad B=A^*,\quad C=I-AA^*, \tag{2.16}$$

则 M_C 是酉算子, 因此 $\mathcal{S}(M_C)=\emptyset$. 而

$$\mathcal{S}(A)=\emptyset,\quad \mathcal{S}(B)=\{\lambda:|\lambda|<1\}, \tag{2.17}$$

因此 $\mathcal{S}(M_C)\neq\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$.

由引理 2.6 可以得到下面的推论.

推论 2.8 对于 $M_C=\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)\in L(X\oplus Y)$, 如果 A,B 在 λ 有 SVEP, 则 M_C 在 λ 有 SVEP; 如果 M_C 在 λ 有 SVEP, 则 A 在 λ 有 SVEP.

推论 2.9 对于 $M_C=\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)\in L(X\oplus Y)$, 如果 B 有 SVEP, 则 M_C 在 λ 有 SVEP 当且仅当 A 在 λ 有 SVEP.

注意到, 在一般情况下, T 有 SVEP 并不能推出 T^* 有 SVEP, 所以有必要研究共轭算子 $M_C^*=\left(\begin{smallmatrix} A^* & 0 \\ C^* & B^* \end{smallmatrix}\right)$ 的 SVEP 性质. 事实上, 由共轭算子的定义, 我们不难得到如下结论.

引理 2.10

$$\mathcal{S}(B^*)\subseteq\mathcal{S}(M_C^*)\subseteq\mathcal{S}(A^*)\cup\mathcal{S}(B^*). \tag{2.18}$$

特别地, 如果 A^*,B^* 在 λ 有 SVEP, 则 M_C^* 在 λ 有 SVEP; 如果 M_C^* 在 λ 有 SVEP, 则 B^* 在 λ 有 SVEP. 如果 A^* 有 SVEP, 则 M_C^* 在 λ 有 SVEP 当且仅当 B^* 在 λ 有 SVEP.

由以上结论, 我们很自然地提出以下两个问题:

问题 2.1 A,B 满足什么条件时, 等式

$$\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B) \tag{2.19}$$

对于任意 $\forall\,C\in L(Y,X)$ 成立?

问题 2.2 给定 A 和 B, 对于哪些算子 $C\in L(Y,X)$ (2.19) 成立?

为了解决问题 2.1, 我们首先考察亏集 $(\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B))\backslash\mathcal{S}(M_C)$, 然后得到等式 (2.19) 对任意 C 都成立时 A,B 所需的条件. 问题 2.2 等价于 $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ 在某个幂零算子矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 扰动下是否能

保持 SVEP 不变. 我们将在本文第 4 节中证明在某些扰动下上三角矩阵的 SVEP 是稳定的. 注意到当 X,Y 都是有限维空间时, 等式 (2.19) 对于任意 $C\in L(Y,X)$ 显然都成立. 因此, 以下总假设 X,Y 都是无限维空间.

3 M_C 的单值扩张性刻画

由引理 2.6 可知, 在一个幂零算子矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}0 & C\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ 扰动下, 算子矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}A & C\\ 0 & B\end{smallmatrix}\right)$ 不具有 SVEP 的点集在 $\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$ 中退化. 那么剩余部分 $(\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B))\backslash\mathcal{S}(M_C)$ 有多少? 下面的定理给出了答案.

定理 3.1 设 $A\in L(X)$, $B\in L(Y)$. 对任意 $C\in L(Y,X)$, 有

$$\mathcal{S}(M_C)\cup(\sigma_{\rm su}(A)\cap\mathcal{S}(B))=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B). \tag{3.1}$$

证明 首先, $\mathcal{S}(M_C)\cup(\sigma_{\rm su}(A)\cap\mathcal{S}(B))\subseteq\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$ 是显然的, 因此只需证明

$$(\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B))\backslash\mathcal{S}(M_C)\subseteq\sigma_{\rm su}(A)\cap\mathcal{S}(B) \tag{3.2}$$

即可. 令 $\lambda\in[\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)]\backslash\mathcal{S}(M_C)$, 由引理 2.6 知 $\lambda\in\mathcal{S}(B)$. 下面我们断言 $\lambda\in\sigma_{\rm su}(A)$. 若不然, $\lambda\in\mathcal{S}(B)\backslash\sigma_{\rm su}(A)$, 则存在 λ 的一个邻域 V_λ 满足 $V_\lambda\cap\sigma_{\rm su}(A)=\emptyset$ 以及非零解析函数 $g:V_\lambda\to Y$, 使得

$$(B-\mu)g(\mu)=0,\quad\forall\,\mu\in V_\lambda. \tag{3.3}$$

因为 $\mu\notin\sigma_{\rm su}(A)$, 由 Leiterer 定理 ([13]), 存在解析函数 $f:V_\lambda\to X$ 满足

$$(A-\mu)f(\mu)=-Cg(\mu),\quad\forall\,\mu\in V_\lambda. \tag{3.4}$$

令 $(f\oplus g)(\mu)=f(\mu)\oplus g(\mu)$, 则 $f\oplus g$ 是 $V_\lambda\to X\oplus Y$ 的非零解析函数且满足

$$(M_C-\mu)(f(\mu)\oplus g(\mu))=0,\quad\forall\,\mu\in V_\lambda, \tag{3.5}$$

因此 $\lambda\in\mathcal{S}(M_C)$, 这与已知矛盾. 故 $\lambda\in\sigma_{\rm su}(A)$, 因此 (3.2) 成立, 从而定理得证.

注 3.2 (3.2) 中的包含关系可以是严格的. 例如, 令

$$A=S,\quad B=S^*,\quad C=0,$$

其中 S 是 l^2 上的右移算子, 即 $Sx=(0,x_1,x_2,x_3,\ldots)$, 则

$$(\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B))\backslash\mathcal{S}(M_C)=\emptyset\neq\sigma_{\rm su}(A)\cap\mathcal{S}(B)=\{\lambda:|\lambda|<1\}. \tag{3.6}$$

注 3.3 有人可能会想 (3.2) 中右边的集合能不能比 $\sigma_{\rm su}(A)\cap\mathcal{S}(B)$ 更小一些, 但是在一般情况下这是不可能的. 事实上, 令

$$A=S,\quad B=S^*,\quad C=I-SS^*,$$

其中 S 是 l^2 上的右移算子, 则

$$\mathcal{S}(M_C)=\emptyset,\quad\mathcal{S}(A)=\emptyset,\quad\mathcal{S}(B)=\{\lambda:|\lambda|<1\},\quad\sigma_{\rm su}(A)=\{\lambda:|\lambda|\leq1\}. \tag{3.7}$$

因此

$$(\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B))\backslash\mathcal{S}(M_C)=\{\lambda:|\lambda|<1\}=\sigma_{\rm su}(A)\cap\mathcal{S}(B). \tag{3.8}$$

下面给出等式 $\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$ 成立的一些充分条件.

推论 3.4 对于任意 $A \in L(X)$, $B \in L(Y)$, 如果 $\sigma_{\rm su}(A) \cap \mathcal{S}(B) = \emptyset$, 则对于任意 $C \in L(Y, X)$,

$$\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B).$$

例 3.5 令 $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^2$, $M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in L(l^2 \oplus l^2)$, 其中

$$Ax = (x_2, x_3, x_4, \ldots), \quad B = A.$$

则

$$\sigma_{\rm su}(A) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}, \quad \mathcal{S}(B) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}, \tag{3.9}$$

因此 $\sigma_{\rm su}(A) \cap \mathcal{S}(B) = \emptyset$. 另一方面,

$$\sigma(M_C) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}, \quad \sigma_{\rm su}(M_C) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}, \tag{3.10}$$

因此, $\mathcal{S}(M_C) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$. 所以对于任意 $C \in L(Y, X)$, $\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$.

推论 3.6 如果 B 有 SVEP, 特别地, 如果 B 是紧算子或正规算子, 更一般地, 如果 B 是可分解算子, 则对任意 $A \in L(X)$, $C \in L(Y, X)$, 都有

$$\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B).$$

注 3.7 容易看出, 推论 3.6 推广了文 [12, 定理 7]. 另外, 推论 2.9 也可以由推论 3.6 得出.

推论 3.8 如果 $\sigma_{\rm su}(A)$ 没有内点, 特别地, 如果 A 是酉算子或左移算子, 则对于任意 $B \in L(Y)$, $C \in L(Y, X)$, 都有

$$\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B).$$

类似地, 对于共轭算子 $M_C^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ C^* & B^* \end{pmatrix}$, 我们有如下结果:

定理 3.9 设 $A \in L(X)$, $B \in L(Y)$. 对任意 $C \in L(Y, X)$, 有

$$\mathcal{S}(M_C^*) \cup (\sigma_{\rm su}(B^*) \cap \mathcal{S}(A^*)) = \mathcal{S}(A^*) \cup \mathcal{S}(B^*). \tag{3.11}$$

如果 $\sigma_{\rm su}(B^*) \cap \mathcal{S}(A^*) = \emptyset$, 则

$$\mathcal{S}(M_C^*) = \mathcal{S}(A^*) \cup \mathcal{S}(B^*). \tag{3.12}$$

4 扰动问题

下面考虑, 当 A 和 B 给定时, 算子 $C \in L(Y, X)$ 满足 $\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$ 所需要的条件.

定义 4.1 称算子 $T, S \in L(X)$ 相似, 如果存在可逆算子 $P \in L(X)$, 使得

$$P^{-1}TP = S.$$

根据文 [2], 相似的算子具有下面的性质.

引理 4.2 [2] 如果 T, S 相似, 则 T 在 λ 有 SVEP 当且仅当 S 在 λ 有 SVEP.

给定 $A \in L(X)$, $B \in L(Y)$, 定义算子 δ_{AB} 为

$$\delta_{AB} : X \to AX - XB, \quad X \in L(Y, X).$$

利用引理 4.2, 我们得到下面结论

定理 4.3 设 $A \in L(X)$, $B \in L(Y)$. 对于任意 $C \in R(\delta_{AB})$, 都有

$$\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B).$$

证明 对于任意 $C\in R(\delta_{AB})$, 存在 $X\in L(Y,X)$, 使得 $C=AX-XB$. 因此有如下分解式

$$\begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

显然, M_C 相似与 M_0. 由引理 2.5 和引理 4.2, 定理得证.

根据文 [2], SVEP 保持可交换幂零扰动不变, 即

引理 4.4 [2] 如果 $T=S+N$, 其中 $SN=NS$, $N^k=0$, 则 S 有 SVEP 当且仅当 T 有 SVEP.

由引理 4.4, 我们可以得到如下定理.

定理 4.5 给定 $A\in L(X)$, $B\in L(Y)$. 对于任意 $C\in L(Y,X)$, 若满足 $AC=CB$, 则有

$$\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B).$$

证明 注意到

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这里 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 是幂零算子.

由于 $AC=CB$, 则 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 与 $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ 可交换, 故由引理 2.5 和引理 4.4 结论得证.

下面举例说明定理 4.5 中的条件 $AC=CB$ 是必要的.

例 4.6 设 $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)\in l^2$, 定义

$$Ax=(x_1,0,x_2,0,x_3,\ldots),\quad Bx=(x_1,x_3,x_5,\ldots),\quad Cx=(0,x_2,0,x_4,0,x_6,\ldots),$$

可知 $AC\neq CB$. 因为 B 在 $\lambda=0$ 满但不单, 故 $0\in\mathcal{S}(B)$.

令

$$M_C=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\in L(l^2\oplus l^2),\quad (x,y)\in(l^2\oplus l^2),$$

则经计算

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (x_1,y_2,x_2,y_4,\ldots,x_n,y_{2n},\ldots) \\ (y_1,y_3,y_5,\ldots) \end{pmatrix}=0, \tag{4.2}$$

可得 $x=0$, $y=0$, 因此 M_C 是单射, 故 $0\notin\mathcal{S}(M_C)$. 然而 $0\in\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$, 所以 $\mathcal{S}(M_C)\neq\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$.

结合定理 4.3 及定理 4.5, 可以得到以下推论.

推论 4.7 给定 $A\in L(X)$, $B\in L(Y)$. 对任意 $C\in R(\delta_{AB})+N(\delta_{AB})$, 都有

$$\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B).$$

证明 由 $C=T+P$, 其中 $T\in R(\delta_{AB})$, $P\in N(\delta_{AB})$, 可以得到

$$M_C=M_T+\begin{pmatrix} 0 & P \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这里 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & P \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 是幂零的.

因为 $AP=PB$, 则 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & P \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 与 $\left(\begin{smallmatrix} A & T \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ 可交换. 故由定理 4.3 和引理 4.4, 可得

$$\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(M_T)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B).$$

证毕.

定理 4.8 给定 $A \in L(X)$, $B \in L(Y)$, 如果 $C \in L(Y,X)$ 满足 $AC=0$ 或 $CB=0$, 则

$$\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B).$$

证明 设 $\lambda \in \mathcal{S}(B)$, 则存在 λ 的邻域 G_λ 和非零解析函数 g 满足

$$(B-\mu)g(\mu)=0, \quad \forall\, \mu \in G_\lambda.$$

如果 $AC=0$, 则令

$$F(\lambda)=Cg(\lambda)\oplus\lambda g(\lambda). \tag{4.3}$$

由解析函数的级数定理 [13] 知, $Cg(\lambda)$ 是解析的, 并且

$$\begin{pmatrix} A-\mu & C \\ 0 & B-\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Cg(\mu) \\ \mu g(\mu) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\, \mu \in G_\lambda. \tag{4.4}$$

显然 $F(\lambda)$ 是 G_λ 上的非零解析函数, 因此 $\lambda \in \mathcal{S}(M_C)$.

如果 $CB=0$, 则

$$C(B-\mu)g(\mu)=0, \tag{4.5}$$

从而

$$\mu Cg(\mu)=0, \quad \forall\, \mu \in G_\lambda, \tag{4.6}$$

因此

$$Cg(\mu)=0, \quad \forall\, \mu \in G_\lambda, \quad \mu \neq 0. \tag{4.7}$$

由 $Cg(\mu)$ 的连续性知, 对于 $\mu=0$ 来说上式仍然成立. 令 $F(\lambda)=0\oplus g(\lambda)$, 因此

$$\begin{pmatrix} A-\mu & C \\ 0 & B-\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ g(\mu) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\, \mu \in G_\lambda, \tag{4.8}$$

所以我们得到 $\lambda \in \mathcal{S}(M_C)$. 再由引理 2.6, 结论得证.

下面举例说明定理 4.8 中条件 $AC=0$ 或 $CB=0$ 的必要性.

例 4.9 设 $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)\in l^2$, 定义

$$Ax=(x_1,0,x_2,0,x_3,\ldots), \quad Bx=(x_1,x_3,x_5,\ldots), \quad Cx=(0,x_2,0,x_4,0,x_6,\ldots).$$

显然 $AC\neq 0$, $CB\neq 0$, 并且由例 4.6 知 $\mathcal{S}(M_C)\neq\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$.

接下来我们引入 T 的两个很重要的不变子空间. 第一个是 T 的代数核, 这个概念最早是由 Saphar [16] 引入的.

定义 4.10 [16] 对于向量空间 X 上的线性算子 T, T 的代数核 $C(T)$ 定义为满足 $T(M)=M$ 的最大线性子空间 M.

不难证明, $C(T)$ 是由这样的 $x\in X$ 构成的, 即存在序列 $(x_n)\subset X$ 满足 $x=x_0$, $Tx_{n+1}=x_n$, $\forall\, n=0,1,2,\ldots$. 显然, 如果 $T\in L(X)$ 是满射, 则 $C(T)=X$.

另外一个子空间是由 Vrbová 在文 [19] 中引入的, 并且 Mbekhta 在文 [14] 中都对这个空间做过详细的研究. 在某种意义下, 这个空间可以被看作是代数核 $C(T)$ 的解析对应.

定义 4.11 [19] 设 X 是 Banach 空间, $T\in L(X)$. T 的解析核 $K(T)$ 是由这样的 $x\in X$ 构成的, 即存在序列 $(u_n)\subset X$ 和常数 $\delta>0$ 满足

(1) $x=u_0$, $Tu_{n+1}=u_n$, $\forall\, n=0,1,2,\ldots$;

(2) $\|u_n\|\leq\delta^n\|x\|$, $\forall\, n\in\mathbb{Z}_+$.

可以证明, $K(T)$ 是 X 的线性子空间且 $T(K(T))=K(T)$. 一般情况下, $K(T)\subseteq C(T)$, 并且 $K(T)$ 和 $C(T)$ 都不一定是闭的. 然而, 如果 $C(T)$ 是闭的, 则 $K(T)=C(T)$.

定理 4.12 给定 $A\in L(X)$, $B\in L(Y)$. 对于任意 $C\in L(Y,X)$, 如果满足 $K(B)\subseteq N(C)$ 或 $K(C)\subseteq N(A)$, 则有

$$\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B).$$

证明 不失一般性, 我们假设 $0\in\mathcal{S}(B)$. 下面证明 $0\in\mathcal{S}(M_C)$ 即可.

由于 $0\in\mathcal{S}(B)$, 故存在 0 的某个邻域 V 和非零解析函数 g 满足

$$(B-\mu)g(\mu)=0,\quad \forall\,\mu\in V.$$

将 $g(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 点泰勒展开, 得到

$$g(\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\mu^n,\quad |\mu|<r, \tag{4.9}$$

这里 r 表示收敛半径.

令 $\mu=0$, 得到 $Bx_0=0$. 因为 B 不是一对一的, 所以我们不妨假设 $\|x_0\|=1$. 另一方面,

$$\begin{aligned}0&=(B-\mu)g(\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}Bx_n\mu^n-\sum_{n=0}^{\infty}x_n\mu^{n+1}\\&=Bx_0+\sum_{n=1}^{\infty}Bx_n\mu^n-\sum_{n=1}^{\infty}x_{n-1}\mu^n=\sum_{n=1}^{\infty}(Bx_n-x_{n-1})\mu^n,\end{aligned}$$

则

$$Bx_n=x_{n-1},\quad n=1,2,\dots. \tag{4.10}$$

注意到 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{r}$, 选取 $\delta>\frac{1}{r}$, 则有 $\|x_n\|<\delta^n$, 因此 $\{x_n\}\subseteq K(B)$.

因为 $K(B)\subseteq N(C)$, 所以 $Cg(\mu)=0$, 并且有

$$\begin{pmatrix}A-\mu & C\\ 0 & B-\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ g(\mu)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \forall\,\mu\in V. \tag{4.11}$$

因此, $0\in\mathcal{S}(M_C)$. 由引理 2.6, 定理得证.

类似地, 如果 $K(C)\subseteq N(A)$, 同理可证 $\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$. 证毕.

注 4.13 定理 4.12 中关于解析核的条件不能减弱为代数核. 因为从证明中可以看出条件 $\|x_n\|<\delta^n$ 是必须的, 所以 $K(B)$ 和 $K(C)$ 不能换成 $C(B)$ 和 $C(C)$.

下面举例说明 C 如果不满足条件 $K(B)\subseteq N(C)$ 或 $K(C)\subseteq N(A)$, 那么等式 $\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$ 一般不成立.

例 4.14 设

$$x=(x_1,x_2,x_3,\dots)\in l^2,\quad Ax=(0,x_1,x_2,\dots),\quad Bx=(x_2,x_3,x_4,\dots),\quad Cx=(x_1,0,x_2,0,x_3\dots).$$

显然 $N(A)=N(C)=\{0\}$, $K(B)=l^2$, $K(C)\neq\{0\}$. 故 $K(B)\nsubseteq N(C)$ 且 $K(C)\nsubseteq N(A)$.

由于 B 在 $\lambda=0$ 是满射但不是单射, 因此 $0\in\mathcal{S}(B)$. 令 $M_C=\left(\begin{smallmatrix}A & C\\ 0 & B\end{smallmatrix}\right)\in L(l^2\oplus l^2)$, 由

$$\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(y_1,x_1,x_2+y_2,x_3,x_4+y_3,\dots)\\ (y_2,y_3,y_4,\dots)\end{pmatrix}=0, \tag{4.12}$$

可得 $x=0$, $y=0$, 故 M_C 是单射. 因此 $0\notin\mathcal{S}(M_C)$, 而 $0\in\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$.

5 应用

本节是结论的应用. 首先将结果 $\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$ 运用到 M_C 的谱上, 得到如下定理.

定理 5.1 给定 $A\in L(X), B\in L(Y)$, 如果对于任意 $C\in L(Y,X)$, 等式 $\mathcal{S}(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$ (或 $\mathcal{S}(M_C^*)=\mathcal{S}(A^*)\cup\mathcal{S}(B^*)$) 成立, 则等式

$$\sigma(M_C)=\sigma(A)\cup\sigma(B) \tag{5.1}$$

对于任意 $C\in L(Y,X)$ 也成立.

证明 由 $\sigma(M_C)=\mathcal{S}(M_C)\cup\sigma_{\rm su}(M_C)$, 可得

$$\sigma(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)\cup\sigma_{\rm su}(M_C). \tag{5.2}$$

而 $\sigma_{\rm su}(M_C)\subseteq\sigma_{\rm su}(A)\cup\sigma_{\rm su}(B)$, 因此

$$\mathcal{S}(B)\cup\sigma_{\rm su}(M_C)\subseteq\sigma_{\rm su}(A)\cup\sigma(B). \tag{5.3}$$

另一方面, 注意到

$$\mathcal{S}(B)\cup\sigma_A(x)\subseteq\mathcal{S}(B)\cup\sigma_{M_C}(x\oplus 0),\quad \forall\, x\in X. \tag{5.4}$$

事实上, 如果 $\lambda\notin\sigma_{M_C}(x\oplus 0)$, 则存在 λ 的一个邻域 G_λ 和一个解析函数 $F: G_\lambda\to X\oplus Y$, 使得

$$(M_C-\mu)F(\mu)=x\oplus 0,\quad \forall\,\mu\in G_\lambda.$$

令 $F=f\oplus g$, 其中 $f: G_\lambda\to X$, $g: G_\lambda\to Y$ 都是解析函数, 有

$$\begin{cases}(A-\mu)f(\mu)+Cg(\mu)=x,\\ (B-\mu)g(\mu)=0.\end{cases}$$

如果 $\lambda\notin\mathcal{S}(B)$, 则有 $g(\mu)=0, \forall\,\mu\in G_\lambda$. 因此

$$(A-\mu)f(\mu)=x,\quad \forall\,\mu\in G_\lambda,$$

从而 $\lambda\notin\sigma_A(x)$, 所以

$$\mathcal{S}(B)\cup\sigma_A(x)\subseteq\mathcal{S}(B)\cup\sigma_{M_C}(x\oplus 0),\quad \forall\, x\in X.$$

因此由 (2.5) 可得

$$\mathcal{S}(B)\cup\sigma_{\rm su}(A)\subseteq\mathcal{S}(B)\cup\sigma_{\rm su}(M_C). \tag{5.5}$$

因为 $\sigma_{\rm su}(B)\subseteq\sigma_{\rm su}(M_C)$, 故

$$\sigma_{\rm su}(A)\cup\sigma(B)\subseteq\mathcal{S}(B)\cup\sigma_{\rm su}(M_C). \tag{5.6}$$

结合 (5.3) 和 (5.6) 可得

$$\mathcal{S}(B)\cup\sigma_{\rm su}(M_C)=\sigma_{\rm su}(A)\cup\sigma(B). \tag{5.7}$$

所以

$$\sigma(M_C)=\mathcal{S}(A)\cup\sigma_{\rm su}(A)\cup\sigma(B)=\sigma(A)\cup\sigma(B).$$

对于 $\mathcal{S}(M_C^*)=\mathcal{S}(A^*)\cup\mathcal{S}(B^*)$ 的情况, 同理可得 $\sigma(M_C^*)=\sigma(A^*)\cup\sigma(B^*)$, 并注意到 $\sigma(T^*)=\sigma(T)$, 从而定理得证.

注 5.2 注意到 Houimdi 等人在文 [11] 中证明, 当 A^* 有 SVEP 或 B 有 SVEP 时, 等式 $\sigma(M_C)=\sigma(A)\cup\sigma(B)$ 成立. 显然他们的结果是定理 5.1 的一个特例.

定理 5.1 的逆命题在一般情况下是不成立的, 即由 $\sigma(M_C) = \sigma(A)\cup\sigma(B)$ 成立不能推出 $\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$ 成立.

例 5.3 令 A, B 为定义在 $l^2\oplus l^2$ 上的算子,

$$A = S\oplus I,\quad B = S^*\oplus I,\quad C = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & I-SS^* & & \\ & & I-SS^* & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

这里 S 是 l^2 上的右移算子, 则

$$\sigma(A) = \mathbb{D},\quad \sigma(B) = \mathbb{D},\quad \sigma(M_C) = \mathbb{D}, \tag{5.8}$$

这里 $\mathbb{D} = \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$. 所以 $\sigma(M_C) = \sigma(A)\cup\sigma(B)$ 成立. 而

$$\mathcal{S}(A) = \emptyset,\quad \mathcal{S}(B) = \{\lambda : |\lambda| < 1\},\quad \mathcal{S}(M_C) = \emptyset, \tag{5.9}$$

所以 $\mathcal{S}(M_C) \ne \mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$.

下面将结果 $\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$ 运用到 M_C 的局部谱上. 通常, $\sigma_{M_C}(x\oplus 0) \subseteq \sigma_A(x)$, $\forall x\in X$. 但是在下面的定理中, 我们可以得到更多.

定理 5.4 设 $A\in L(X)$, $B\in L(Y)$. 对于任意 $C\in L(Y,X)$, 若 $\mathcal{S}(M_C) = \mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)$, 则

$$\mathcal{S}(M_C)\cup\sigma_{M_C}(x\oplus 0) = \mathcal{S}(M_C)\cup\sigma_A(x),\quad \forall x\in X, \tag{5.10}$$

证明 显然

$$\mathcal{S}(M_C)\cup\sigma_{M_C}(x\oplus 0) \subseteq \mathcal{S}(M_C)\cup\sigma_A(x),\quad \forall x\in X, \tag{5.11}$$

又由 (5.4) 知

$$\mathcal{S}(M_C)\cup\sigma_{M_C}(x\oplus 0) \supseteq \mathcal{S}(M_C)\cup\sigma_A(x),\quad \forall x\in X.$$

由此等式 (5.10) 得证.

推论 5.5 如果 M_C 有 SVEP, 则 $\sigma_{M_C}(x\oplus 0) = \sigma_A(x)$, $\forall x\in X$.

下面来考察 M_C 的局部谱子空间. 一般地, 我们有 $X_A(F)\oplus 0 \subseteq (X\oplus 0)_{M_C}(F)$. 但是, 如果 M_C 有 SVEP, 我们可以得到更多.

推论 5.6 如果 M_C 有 SVEP, 则对于集合 $F\subseteq\mathbb{C}$,

$$X_A(F)\oplus 0 = (X\oplus 0)_{M_C}(F),$$

其中 $(X\oplus 0)_{M_C}(F) = \{x\oplus 0\in X\oplus 0 : \sigma_{M_C}(x\oplus 0)\subseteq F\}$.

证明 如果 $x\in X_A(F)$, 则 $\sigma_A(x)\subseteq F$. 因为 $\sigma_{M_C}(x\oplus 0)\subseteq\sigma_A(x)$, $\forall x\in X$, 所以 $\sigma_{M_C}(x\oplus 0)\subseteq F$. 因此

$$X_A(F)\oplus 0 \subseteq (X\oplus 0)_{M_C}(F). \tag{5.12}$$

另一方面, 因为 M_C 有 SVEP, 由推论 5.5 知 $\sigma_{M_C}(x\oplus 0) = \sigma_A(x)$. 如果 $x\oplus 0\subseteq (X\oplus 0)_{M_C}(F)$, 则 $\sigma_{M_C}(x\oplus 0)\subseteq F$. 所以 $\sigma_A(x)\subseteq F$, 即 $x\in X_A(F)$. 因此

$$(X\oplus 0)_{M_C}(F) \subseteq X_A(F)\oplus 0. \tag{5.13}$$

结合 (5.12) 与 (5.13) 定理得证.

致谢 非常感谢审稿人对本文的审阅和所提出的修改意见.

参 考 文 献

[1] Alatancang, Qing M., Wu D. Y., Spectra of 2×2 upper triangular operator matrices with unbounded entries (in Chinese), *Science China Math.*, 2016, **46**(2): 157–168.

[2] Aiena P., Fredholm and Local Spectral Theory, with Application to Multipliers, Kluwer Acad. Publisher, New York, 2004.

[3] Amouch M., Weyl type theorems for operators satisfying the single-valued extension property, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **326**(2): 1476–1484.

[4] Cao X. H., Guo M. Z., Meng B., Semi-Fredholm spectrum and Weyl's theorem for operator matrices, *Acta. Math. Sinica, English Series*, 2006, **22**(1): 169–178.

[5] Conway J. B., A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[6] Diordjević S. V., Zguitti H., Essential point spectral of operator matrices through local spectral theory, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **338**(1): 258–291.

[7] Duggal B. P., Upper triangular operator matrices, SVEP and Browder, Weyl's theorems, *Integr. Equ. Oper. Theory*, 2009, **63**(1): 17–28.

[8] Dunford N., Schwartz J. T., Linear Operators, III: Spectral Operators, Interscience Publishers, New York, 1971.

[9] Finch J. K., The single-valued extension property on a Banach space, *Pacific J. Math.*, 1975, **58**(1): 61–69.

[10] Finch J. K., On the local spectrum and its adjoint, *Pacific J. Math.*, 1981, **94**(2): 297–202.

[11] Houimdi M., Zguitti H., Local spectral property of operator matrices, *Acta Math. Vietnamica*, 2000, **25**(2): 137–144.

[12] Kim Y., Ko E., Lee J. E., Operators with the single-valued extension property, *Bull. Korean Math. Soc.*, 2006, **43**(3): 509–517.

[13] Laursen K. B., Neumann M. M., An Introduction to Local Spectral Theory, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[14] Mbekhta M., Müller V., On the axiomatic theory of the spectrum II, *Studia Math.*, 1996, **119**(2): 129–149.

[15] Rashid M. H. M., Upper triangular operator matrices, SVEP and property (w), *Acta Math. Vietnamica*, 2019, **44**(2): 993–1004.

[16] Saphar P., Contribution á l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach, *Bull. Soc. Math. France*, 1964, **92**(1): 363–384.

[17] Tretter C., Spectral Theory of Block Operators Matrices and Applications, Imperial College Press, London, 2008.

[18] Vasilescu F. H., On the residual decomposability in dual spaces, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1971, **16**(1): 1573–1587.

[19] Vrbová P., On local spectral properties of operators in Banach spaces, *Czechosovak Math. J.*, 1973, **23**(98): 483–492.

[20] Zhang H. Y., Du H. K., A note on Browder spectra of upper-triangular operator matrices, *Adv. Math. China*, 2013, **42**(5): 706–712.

[21] Zou C. Z., Spectral Decomposition Theory of Linear Operators (in Chinese), Jilin University Press, Changchun, 1987.

[22] Zerouali E. H., Zguitti H., Perturbation of spectra of operator matrices and local spectral theory, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **324**(2): 992–1005.