第64卷第4期 数学学报中文版 Vol.64, No.4
2021年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)04-0551-18 **文献标识码: A**

一类带权重的拟线性椭圆型方程大解的精确渐近行为

万海涛 李希亮

山东工商学院数学与信息科学学院 烟台 264005
E-mail: wanhaitao200805@163.com; lixiliang@amss.ac.cn

摘 要 本文研究了如下拟线性椭圆型方程 $\Delta_p u = b(x)f(u)$, $u(x) > 0$, $x \in \Omega$ 大解的精确渐近行为, 其中 $b \in C(\Omega)$ 是定义在 Ω 上非负非平凡的函数, $f \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上正的不减函数. 具体而言, 当 $\Omega = \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ 时, 我们通过区域截断技术和上下解方法研究了该方程整体大解在无穷远处的精确渐近行为. 当 Ω 为带有 C^4- 边界的有界区域时, 我们研究了区域边界的平均曲率 $H(\bar{x})$ 对边界行为的影响. 因为 (Δ_p) $(p \neq 2)$ 是非线性算子并且 $H(\bar{x})$ 是定义在 $\partial\Omega$ 上的函数, 因此该边界行为的计算和 $p = 2$ 时的情形完全不同.

关键词 大解; 精确渐近行为; Γ- 变化函数
MR(2010) 主题分类 35J60
中图分类 O175.25

The Exact Asymptotic Behavior of Large Solutions to a Class of Quasilinear Elliptic Equations with Weights

Hai Tao WAN Xi Liang LI

School of Mathematics and Information Science,
Shandong Technology and Business University, Yantai 264005*, P. R. China*
E-mail: *wanhaitao*200805*@*163*.com*; *lixiliang@amss.ac.cn*

Abstract We study the exact asymptotic behavior of large solutions to the following equation $\Delta_p u = b(x)f(u)$, $u(x) > 0$, $x \in \Omega$, where $b \in \mathrm{C}(\Omega)$ is non-negative and non-trivial in Ω, $f \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$ is positive and non-decreasing on $(0,\infty)$. When $\Omega = \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$, by using truncation technique and the upper and lower solution methods, we establish the exact asymptotic behavior of entire large solutions to the above equation. When Ω is a C^4-bounded domain, we revel the influence of the mean curvature $H(\bar{x}(x))$ of $\partial\Omega$ to boundary behavior of large solutions. Since (Δ_p) $(p \neq 2)$ is a non-linear operator and $H(\bar{x}(x))$ is a variable function on $\partial\Omega$, the calculation of the result is quite different from the one $p = 2$.

收稿日期: 2019-10-23; 接受日期: 2020-07-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11971273)

Keywords large solutions; exact asymptotic behavior; Γ-varying functions
MR(2010) Subject Classification 45B40
Chinese Library Classification O175.25

1 引言和主要结果

本文的目的是建立如下拟线性椭圆型方程

$$\Delta_p u = b(x)f(u), \quad u(x) > 0, \quad x \in \Omega \tag{1.1}$$

大解的精确渐近行为, 其中 $\Delta_p := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 表示 p-Laplace 算子并且 $1 < p < N$ $(N \geq 3)$. 假设 $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C(\Omega)$, 若对于 Ω 的任意紧子区域 D, 都有

$$\int_D |\nabla u|^{p-2}\nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx = -\int_D b(x)f(u(x))\varphi(x)dx, \quad \varphi \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega),$$

则称 u 是方程 (1.1) 的局部弱解.

当 $\Omega = \mathbb{R}^N$ 时, 我们称方程 (1.1) 的大解为整体大解, 其含义是 $u \in C(\mathbb{R}^N)$ 是方程 (1.1) 在 $\mathbb{R}^N$ 中的局部弱解, 并且 $u(x) \to \infty$, $|x| \to \infty$. 当 Ω 为有界区域时, 我们称方程 (1.1) 的大解为边界爆破解, 其含义是 $u \in C(\Omega)$ 是方程 (1.1) 在 Ω 中的局部弱解, 并且 $u(x) \to \infty$, $d(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \to 0$.

本文假设 f 满足:

(f_1) $f \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上正的不减函数, 并且 $f(0) = 0$;

权重 b 满足:

(b_1) $b \in C(\Omega)$ 是定义在 Ω 上非负非平凡的函数.

首先, 我们回顾方程 (1.1) 在 $\mathbb{R}^N$ 中整体大解的相关工作. 方程 (1.1) 在共形几何领域被许多学者所研究. 当 $p = 2$ 时, Ni [36] 首先证明了方程 (1.1) 古典整体大解的存在性和渐近行为. 如果 $f(u) = u^\gamma$ 并且 $\gamma > 1$, Cheng 和 Ni [11] 证明了方程 (1.1) 最大正解的存在性和唯一性, 并且给出了正解的一个完全分类. 随后, Lair [27], Cîrstea 和 Rădulescu [13] 对于 $p = 2$ 的情形证明: 如果 f 满足 (f_1) 和

$$\int_1^\infty (F(s))^{-1/2}ds < \infty, \quad F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau,$$

b 满足 (b_1) 和

$$\int_0^\infty r\phi(r)dr < \infty, \text{ 其中 } \phi(r) = \max_{|x|=r} b(x),$$

并且存在满足如下 C- 正则性条件, 使得有界光滑区域序列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$:

(C) 任取 x_0 属于区域 Ω_n $(n \geq 1)$, 若 $b(x_0) = 0$, 则存在包含 x_0 且满足 $\Omega_n^0 \subseteq \Omega_n$ 的子区域 Ω_n^0, 使得 $b(x) > 0$, $x \in \partial\Omega_n^0$,

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n, \quad \Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}$$

成立, 则方程 (1.1) 存在至少一个整体大解. 随后, Tao 和 Zhang [40] 进一步研究了方程 (1.1) 整体大解的存在性并给出了整体大解的一个爆破下界. 当 $f(u)$在无穷远附近次线性增长时, Yang [44]

研究了整体大解的存在性和解在无穷远处的渐近行为. 在文 [46] 中, Ye 和 Zhou 对于 $p=2$ 的情形证明: 若问题

$$-\Delta u = b(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

存在解, 则方程 (1.1) 存在正的整体大解. 对于 $p>1$ 的情形, Yang [45] 和 Covei [15] 研究了方程 (1.1) 整体大解的存在性. Dupaigne 等人 [18] 证明了最小解的存在性, 并且指出: 如果解在 $\mathbb{R}^N$ 中无界, 则该解必在无穷远处发生爆破; 特别地, 他们还证明了整体大解的唯一性. Alves, Santos 和 Zhou [2] 研究了一类带有梯度项的非自治问题大解的存在性和不存在性. 最近, 对于 $p=2$ 的情形, Wan 等人 [41–43] 研究了 f 在无穷远处正规变化或快速变化的情形下方程 (1.1) 的整体大解在无穷远处的精确渐近行为; 进一步, 借助渐近行为, 在较弱的条件下得到了整体大解的唯一性. 本文的其中一个目的是研究当 f 在无穷远处 Γ- 变化时, 方程 (1.1) 在 $\mathbb{R}^N$ 中的整体大解在无穷远处的精确行为. 下面先来介绍 Γ- 变化函数的定义:

定义 1.1 f 是定义在 (A,∞) 上的不减函数, 若 $\lim_{u\to\infty} f(u)=\infty$, 并且存在 $\chi:(A,\infty)\to(0,\infty)$, 使得

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f(u+\lambda\chi(u))}{f(u)} = \mathrm{e}^{\lambda}, \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R},$$

则称 f 在无穷远处 Γ- 变化.

若 (f_1) 成立, 则通过文 [20, 定理 1.28] 可知, f 在无穷远处 Γ- 变化的充分必要条件是存在正常数 A 和定义在 $[A,\infty)$ 上正的 C^1- 函数 S, 使得当 $u\to\infty$ 时, 下式成立:

$$f(u) \sim \hat{f}(u) := \exp\left(\int_A^u \frac{dy}{S(y)}\right), \tag{1.2}$$

其中 $\lim_{u\to\infty} S'(u)=0$.

当 Ω 有界时, 基于 Γ- 变化理论, Cîrstea 和 Rădulescu [12], Huang 和 Tian [24] 以及 Mi 和 Liu [33] 研究了方程 (1.1) 大解的精确边界行为. 受以上工作的启发, 我们得到如下结果:

定理 1.2 令 $\Omega=\mathbb{R}^N$ $(N\ge 3)$, $f\in\Gamma$ 满足 (f_1), b 满足 (b_1) 和

(b_2) 存在函数 $k\in\mathscr{K}$ 和正常数 $\lambda\in(p,(N+p)/2)$, 使得

$$0<b_1:=\liminf_{|x|\to\infty}\frac{b(x)}{|x|^{-\lambda}k^{p-1}(|x|)} \le b_2 := \limsup_{|x|\to\infty}\frac{b(x)}{|x|^{-\lambda}k^{p-1}(|x|)}<\infty,$$

其中 $\mathscr{K}$ 表示定义在 $[t_0,\infty)$ 上的 Karamata 函数 k 所构成的集合, k 由下式给出:

$$k(t) := c\exp\left(\int_{t_0}^t \frac{y(s)}{s}ds\right), \quad t>t_0>0,$$

这里 $c>0$ 并且 $y\in C[t_0,\infty)$ 满足 $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$, 则方程 (1.1) 的整体大解 u 满足

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{u(x)}{\psi(|x|)}=1, \tag{1.3}$$

其中 ψ 由如下积分方程所唯一确定:

$$\int_{\psi(t)}^{\infty}\frac{L_f^{p-2}(s)}{\hat{f}(s)}ds = \left(\int_t^{\infty} s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds\right)^{p-1},$$

其中 L_f 是通过表达式

$$\int_{\mathscr{L}(u)}^{\infty}\frac{L_f^{p-2}(s)}{\hat{f}(s)}ds = u^{-p} \tag{1.4}$$

定义的缓慢变化函数, $\mathscr{L}$ 满足

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u\mathscr{L}'(u)}{L_f(\mathscr{L}(u))}=1. \tag{1.5}$$

注 1.3 在定理 1.2 中, 若 $\lambda=p$, 则需要假设 $\int_1^\infty \frac{k(s)}{s}ds<\infty$.

注 1.4 若 $t\mapsto f(t)t^{1-p}$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的不减函数, 我们则通过文 [42, 定理 1.2] 可知方程 (1.1) 的整体大解唯一确定.

当 Ω 为具有 C^4- 边界的有界区域时, 我们回顾方程 (1.1) 的大解在区域边界附近二阶展式的相关工作. 方程 (1.1) 在有界区域上大解的存在性、唯一性和一阶行为的工作见 [8, 17, 26, 28, 29, 34, 37, 38, 47, 49] 及其参考文献. 我们知道, 区域边界的几何性质并不影响解的一阶展式, 然而对于解的二阶展式却影响巨大. 区域的几何性质对大解渐近行为的影响最早可以追溯到 Bandle 和 Marcus 的文 [6], 该工作着重研究了当 Ω 是球域或环域时, 区域边界的平均曲率对大解二阶行为的影响. 随后, 该工作被众多学者发展和推广, 如 Anedda 等人 [3, 4], Bandle 等人 [5, 7], del Pino 和 Letelier [16], García-Melián 等人 [19], Grillot 等人 [21], Guo 和 Shang [22]. 他们揭示了区域边界的平均曲率对边界爆破解二阶行为的精确影响, 这种影响集中体现在二阶项的系数上. 粗略地讲, 区域向外弯曲的程度越大或区域越尖, 则解在这些点处发生爆破的速度就越快. 特别地, 文 [19] 证明了如下 logistic 问题大解的唯一性

$$\Delta u=b(x)u^\gamma-\lambda u,\quad x\in\Omega,\quad u|_{\partial\Omega}=+\infty,$$

其中 $\gamma>1$, $\lambda>0$ 并且 Ω 是有界 C^4- 区域. 此外, 他们证明: 若 $b\in C^\alpha(\Omega)$ $(\alpha\in(0,1))$ 是正函数且在区域边界附近满足

$$b(x)=c_0(d(x))^\beta(1+c_1d(x)+o(d(x))),$$

其中 $\beta>0$ 并且 c_0, $c_1>0$, 则以上问题的任何古典解 u 在边界附近满足

$$u(x)=\left(\frac{(\gamma+\beta+1)(2+\beta)}{c_0(\gamma-1)^2}\right)^{1/(\gamma-1)}(d(x))^{(2+\beta)/(1-\gamma)}(1+h(\bar{x}(x))d(x)+o(d(x))),$$

其中

$$h(\bar{x})=\frac{(N-1)(\gamma-1)H(\bar{x})-(\gamma+\beta+1)c_1}{(\gamma+3+\beta)(\gamma-1)},$$

并且对于 $x\in\Omega$, $\bar{x}(x)\in\partial\Omega$ 是距离 x 最近的点, $H(\bar{x})$ 表示 $\partial\Omega$ 在 $\bar{x}$ 处的平均曲率. 当 $b\equiv1$ 且 $f(u)=u^\gamma$ $(\gamma>1)$ 时, Alarcón, Díaz 和 Rey [1] 研究了方程 (1.1) 在区域边界附近的高阶展式.

方便起见, 我们介绍一类 Karamata 函数类. 令 $k\in C^1(0,\delta_0)\cap L^1(0,\delta_0)$ 是定义在 $(0,\delta_0)$ 上的单调函数且满足

$$\lim_{t\to0^+}\frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{k(t)}\right):=D_k\in[0,\infty),\quad K(t)=\int_0^t k(s)ds.$$

令 Λ 是以上定义的全体函数所构成的集合. 该集合中的不减函数最早是由 Cîrstea 和 Rădulescu 在文 [14] 中提出, 不增函数则是由 Mohammed 在文 [35] 中提出. 基于该函数类, 对于 $p=2$ 的情形, Zhang 等人 [48, 50], Huang 等人 [25], Mi 和 Liu [32] 进一步研究了区域边界的平均曲率对方程 (1.1) 的大解在边界附近二阶展式的影响. 最近, Mi [31] 研究了方程 (1.1) $(p>1)$ 的大解在区域边界附近的二阶展式, 但该结果并未体现出区域边界的几何性质对边界行为的影响.

下面介绍当 Ω 是具有 C^4- 边界的有界区域时, 区域边界 $\partial\Omega$ 的平均曲率对方程 (1.1) 大解在边界附近二阶行为的精确影响. 本文把 Zhang 在文 [48, 定理 1.2] 的工作从 $p=2$ 推广到 $p>1$ 的情形. 我们知道, 边界爆破解的一阶边界行为并不依赖于区域边界的几何性质, 故对于一阶行为而言 $(\Delta_p)\,(p>1,\,p\neq 2)$ 算子的非线性性质并不是研究的主要阻力. 但对于依赖区域边界几何性质的二阶展式而言, 这种由算子的非线性所引起的困难就显得十分棘手. 本文的困难集中体现在对如下非线性项 $(p\neq 2)$,

$$(p-2)|\nabla\cdot|^{p-4}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial\cdot}{\partial x_i}\frac{\partial\cdot}{\partial x_j}\frac{\partial^2\cdot}{\partial x_i\partial x_j} \tag{1.6}$$

的精确计算上. 从上式可以看出, 当考虑区域边界的几何性质对渐近行为的影响时, (Δ) 算子和 (Δ_p) $(p\neq 2)$ 算子在计算上存在巨大差异. 另一方面, 若只考虑方程 (1.1) 的大解在区域边界附近的二阶展式而不考虑区域的几何性质对边界行为的影响 (或 Ω 为球域), 则可以采用径向计算的办法避免对 (1.6) 的复杂计算. 通过对平均曲率 $H(\bar{x})$ 的导数项 $\mathfrak{A}_\pm(x)$ 和 $\mathfrak{B}_\pm(x)$ (见定理 1.5 的证明) 的精确计算, 我们发现

$$\frac{(p-2)\mathfrak{A}_\pm(x)}{(\mathfrak{B}_\pm(x))^2 d(x)}\to 0,\quad d(x)\to 0. \tag{1.7}$$

值得注意的是, (1.7) 是计算区域边界的平均曲率对边界行为精确影响的关键. 我们接下来的工作总结如下:

定理 1.5　令 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ $(N\geq 3)$ 是具有 C^4- 边界的有界区域, b 满足 (b_1) 和

(b_3) 存在 $B_0\in\mathbb{R}$ 和某个不减函数 $k\in\Lambda$, 并满足

$$\lim_{t\to 0^+}t^{-1}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{k(t)}\right)-D_k\right)=\eta_k\in\mathbb{R},$$

使得 $b(x)=k^p(d(x))(1+B_0 d(x)+o(d(x)))$, $d(x)\to 0$.

f 满足 (f_1).

(f_2) 存在

$$\gamma\in\begin{cases}(p-1,(p/D_k)+p-1), & p\neq 2,\quad D_k\neq 0,\\ (p-1,\infty), & D_k=0,\\ (p-1,\infty), & p=2\end{cases} \tag{1.8}$$

和某个函数 $\hbar\in C^1[t_1,\infty)$ $(t_1>0)$, 使得 $f(t)=c_0t^\gamma(1+\hbar(t))$, $t\geq t_1$, $\lim_{t\to\infty}\hbar(t)=0$, 其中 $\hbar\equiv 0$ 或者

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t\hbar'(t)}{\hbar(t)}=-\upsilon,\quad \upsilon>\frac{D_k(\gamma+1-p)}{p},$$

则方程 (1.1) 在区域 Ω 中的唯一边界爆破解 u 满足:

$$u(x)=\xi(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}(1+C_1d(x)+C_2H(\bar{x}(x))d(x)+o(d(x))),\quad d(x)\to 0, \tag{1.9}$$

其中

$$\xi=\left(\frac{(p-1)((\gamma+1-p)D_k+p)}{c_0(\gamma+1-p)}\right)^{1/(\gamma+1-p)}\left(\frac{p}{\gamma+1-p}\right)^{(p-1)/(\gamma+1-p)},$$

$$C_1=\frac{p(B_0(p+(\gamma+1-p)D_k)-(\gamma+1-p)\eta_k)}{(2-p)(\gamma+1-p)^2D_k^2-p(\gamma+1-p)(p+D_k(1+\gamma))},$$

并且

$$C_2 = \frac{(N-1)pD_k}{(p-1)((2-p)(\gamma+1-p)D_k^2 - p(p+D_k(1+\gamma)))}.$$

注 1.6 通过定理 1.5 可知, 在 (b_3) 中若 k 在零处快速变化, 即 $D_k=0$, 则区域边界的平均曲率对大解的二阶展式没有影响.

注 1.7 当 $\Omega=\mathbb{R}^N$ 时, 方程 (1.1) (包含 $p=2$ 的情形) 的整体大解在无穷远处的二阶展式仍无相关结果, 属于开问题.

2 Karamata 正规变化理论基础

本节介绍有关 Karamata 正规变化理论的基础知识, 见文 [9, 20, 30] 和 [39].

定义 2.1 假设 f 是定义在 $[a,\infty)$ 上正的连续函数, 若对于任意 $\xi>0$ 和某个 $\mu\in\mathbb{R}$, 都有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(\xi t)}{f(t)} = \xi^{\mu}, \tag{2.1}$$

则称 f 在无穷远处以指标 μ 正规变化, 记作 $f\in \mathrm{RV}_{\mu}$.

若 $f\in\mathrm{RV}_\mu$, 则 $L(t):=f(t)/t^{\mu}$ 在无穷远处缓慢变化.

同理可定义零处的正规变化函数. 假设 h 是定义在 $(0,a)$ 上正的连续函数, 若 $t\to h(1/t)\in \mathrm{RV}_{-\mu}$, 则称 h 在零处以指标 μ 正规变化, 记作 $h\in\mathrm{RV}\,Z_{\mu}$.

命题 2.2 (一致收敛定理) 若 $f\in\mathrm{RV}_\mu$, 则 (2.1) 对于 $\xi\in[c_1,c_2]$ 一致成立.

命题 2.3 (表示定理) 函数 L 在无穷远处正规变化当且仅当

$$L(t)=\varphi(t)\exp\left(\int_a^t \frac{y(s)}{s}ds\right),\quad t\ge a,$$

其中函数 φ 和 y 是连续函数且当 $t\to\infty$ 时, $y(t)\to 0$, $\varphi(t)\to c_0$, $c_0>0$. 若 $\varphi\equiv c_0$, 则称 L 在无穷远处标准缓慢变化, 且称 $f(t)=t^{\mu}L(t)$, $t\ge a$, 在无穷远处以指标 μ 标准正规变化 (记作 $f\in\mathrm{NRV}_\mu$).

对于某个常数 $a>0$, 函数 $f\in C^1([a,\infty))$ 属于 NRV_μ 当且仅当 $\lim_{t\to\infty}\frac{tf'(t)}{f(t)}=\mu$.

命题 2.4 若 $h_1\in\mathrm{NRV}_{\mu_1}$, $h_2\in\mathrm{NRV}_{\mu_2}$ 且 $\lim_{t\to\infty}h_2(t)=\infty$, 则 $h_1\circ h_2\in\mathrm{NRV}_{\mu_1\mu_2}$.

命题 2.5 若 $h_1\in\mathrm{NRVZ}_{\mu_1}$, $h_2\in\mathrm{NRVZ}_{\mu_2}$ 且 $\lim_{t\to0^+}h_2(t)=\infty$ ($\lim_{t\to0^+}h_2(t)=0$), 则 $h_1\circ h_2\in\mathrm{NRVZ}_{\mu_1\mu_2}$.

命题 2.6 若 $h_1\in\mathrm{NRV}_{\mu_1}$, $h_2\in\mathrm{NRV}_{\mu_2}$, 则 $h_1\cdot h_2\in\mathrm{NRV}_{\mu_1+\mu_2}$.

命题 2.7 若 L, L_1 在无穷远处缓慢变化, 则

(i) 对于任意 $\mu\in\mathbb{R}$, $c_1\ge0$, $c_2\ge0$ 且 $c_1+c_2>0$, 我们有 L^μ, $c_1L+c_2L_1$, $L\circ L_1$ (若 $L_1(t)\to\infty,\ t\to\infty$) 在无穷远处缓慢变化;

(ii) 对于任意 $\mu>0$, 当 $t\to\infty$ 时, 有 $t^\mu L(t)\to\infty$ 和 $t^{-\mu}L(t)\to0$;

(iii) 对于任意 $\mu\in\mathbb{R}$, 当 $t\to\infty$ 时, 有 $\ln(L(t))/\ln t\to0$ 和 $\ln(t^\mu L(t))/\ln t\to\mu$.

命题 2.8 若 L, L_1 在零处缓慢变化, 则

(i) 对于任意 $\mu\in\mathbb{R}$, $c_1\ge0$, $c_2\ge0$ 且 $c_1+c_2>0$, 我们有 L^μ, $c_1L+c_2L_1$, $L\circ L_1$ (若 $L_1(t)\to0,\ t\to0^+$) 在零处缓慢变化;

(ii) 对任意 $\mu>0$, 当 $t\to0^+$ 时, 有 $t^\mu L(t)\to0$ 和 $t^{-\mu}L(t)\to\infty$;

(iii) 对于任意 $\mu\in\mathbb{R}$, 当 $t\to0^+$ 时, 有 $\ln L(t)/\ln t\to0$ 和 $\ln(t^\mu L(t))/\ln t\to\mu$.

命题 2.9 (渐近行为) 令 L 在无穷远处缓慢变化且 $a \geq 0$.

(i) $\int_t^{\infty} s^{\mu} L(s)ds \sim (-\mu-1)^{-1} t^{1+\mu} L(t),\ t \to \infty,\ \mu < -1$;

(ii) $\int_a^t s^{\mu} L(s)ds \sim (\mu+1)^{-1} t^{1+\mu} L(t),\ t \to \infty,\ \mu > -1$.

3 辅助引理

引理 3.1 由 (1.4), (1.5) 所确定的函数 $\mathscr{L}$ 满足:

(i) $\lim_{t\to\infty} \frac{f(\mathscr{L}(t))}{t^p L_f^{p-1}(\mathscr{L}(t))} = \frac{1}{p}$;

(ii) $\hat{f}^{-1} \in \mathrm{NRV}_0$ 并且 $(\hat{f}^{-1})' \in \mathrm{NRV}_{-1}$;

(iii) $\hat{f} \circ \mathscr{L} \in \mathrm{NRV}_p$;

(iv) $\mathscr{L} \in \mathrm{NRV}_0$ 并且 $\mathscr{L}' \in \mathrm{NRV}_{-1}$, 即 $\lim_{t\to\infty} \frac{t\mathscr{L}''(t)}{\mathscr{L}'(t)} = -1$.

证明 (i) 通过 (1.4), 我们有

$$\frac{t\mathscr{L}'(t)}{L_f(\mathscr{L}(t))} = \frac{pf(\mathscr{L}(t))}{t^p L_f^{p-1}(\mathscr{L}(t))}. \tag{3.1}$$

(3.1) 结合 (1.5) 可知 (i) 成立.

(ii) 通过 $\hat{f}$ 的定义 (见 (1.2)) 我们看到 $\hat{f}$ 的逆 $\hat{f}^{-1}$ 是如下积分方程

$$\exp\left(\int_B^{\hat{f}^{-1}(t)} \frac{ds}{T(s)}\right) = t, \quad t > 0$$

的唯一解. 通过简单计算可知

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t(\hat{f}^{-1}(t))'}{\hat{f}^{-1}(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{T(\hat{f}^{-1}(t))}{\hat{f}^{-1}(t)} = \lim_{t\to\infty} T'(t) = 0, \tag{3.2}$$

并且

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t(\hat{f}^{-1}(t))''}{(\hat{f}^{-1}(t))'} = \lim_{t\to\infty} (T'(f^{-1}(t)) - 1) = -1. \tag{3.3}$$

(3.2), (3.3) 表明 $\hat{f}^{-1} \in \mathrm{NRV}_0$, 并且 $(\hat{f}^{-1})' \in \mathrm{NRV}_{-1}$.

(iii) 在积分方程 (1.4) 中令 $\tau = \hat{f}(s)$, 即得

$$\int_{\mathscr{L}(t)}^{\infty} \frac{L_f^{p-2}(s)}{\hat{f}(s)} ds = \int_{\hat{f}(\mathscr{L}(t))}^{\infty} \frac{L_f^{p-2}(\hat{f}^{-1}(\tau))(\hat{f}^{-1}(\tau))'}{\tau} d\tau = \frac{1}{t^p}, \quad t > 0. \tag{3.4}$$

定义

$$\mathscr{A}(t) = \int_t^{\infty} \frac{L_f^{p-2}(\hat{f}^{-1}(\tau))(\hat{f}^{-1}(\tau))'}{\tau} d\tau.$$

由于 $L_f \in \mathrm{NRV}_0$, $\hat{f}^{-1} \in \mathrm{NRV}_0$ 并且 $(\hat{f}^{-1})' \in \mathrm{NRV}_{-1}$, 故通过命题 2.4 和 2.6 可知

$$(L_f^{p-2} \circ \hat{f}^{-1})(\hat{f}^{-1})' \in \mathrm{NRV}_{-1}.$$

因此, 存在某个常数 $a > 0$ 和函数 $L \in \mathrm{NRV}_0$, 使得

$$L_f^{p-2}(\hat{f}^{-1}(t))(\hat{f}^{-1}(t))' = t^{-1} L(t), \quad t > a.$$

通过命题 2.9 (i), 即得

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t\mathscr{A}'(t)}{\mathscr{A}(t)} = -1,$$

即 $\mathscr{A}\in\mathrm{NRV}_{-1}$. 再结合 (3.4) 可得 $\mathscr{A}\circ\hat{f}\circ\mathfrak{L}\in\mathrm{NRV}_{-p}$. 令 $\mathscr{A}^{-1}$ 表示 $\mathscr{A}$ 的反函数, 则 $\mathscr{A}^{-1}$ 由如下积分方程唯一确定

$$\int_{\mathscr{A}^{-1}(t)}^{\infty}\frac{L_f^{p-2}(\hat{f}^{-1}(\tau))(\hat{f}^{-1}(\tau))'}{\tau}d\tau=\int_{\mathscr{A}^{-1}(t)}^{\infty}\tau^{-2}L(\tau)d\tau=t.$$

通过命题 2.9 (i) 得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t(\mathscr{A}^{-1}(t))'}{\mathscr{A}^{-1}(t)}=-1,$$

即 $\mathscr{A}^{-1}\in\mathrm{NRV}_{-1}$. 通过命题 2.4 得 $\hat{f}\circ\mathscr{L}=\mathscr{A}^{-1}\circ\mathscr{A}\circ\hat{f}\circ\mathscr{L}\in\mathrm{NRV}_{p}$.

(iv) 结合 (ii), (iii) 和命题 2.4 可知 $\mathscr{L}=\hat{f}^{-1}\circ(\hat{f}\circ\mathscr{L})\in\mathrm{NRV}_0$. 通过直接计算可知

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}''(t)L_f^{p-2}(\mathfrak{L}(t))+(p-2)(\mathscr{L}'(t))^2L_f^{p-3}(\mathscr{L}(t))L_f'(\mathscr{L}(t))\\&=-p(p+1)t^{-p-2}\hat{f}(\mathscr{L}(t))+pt^{-p-1}(\hat{f}(\mathscr{L}(t)))'.\end{aligned}$$

因此, 通过 $L_f\in\mathrm{NRV}_0$, $\mathscr{L}\in\mathrm{NRV}_0$, (3.1) 和 (iii), 我们有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t\mathscr{L}''(t)}{\mathscr{L}'(t)}=-\lim_{t\to\infty}\frac{L_f'(\mathscr{L}(t))\mathscr{L}(t)}{L_f(\mathscr{L}(t))}\cdot\frac{t\mathscr{L}'(t)}{\mathscr{L}(t)}-p-1+\lim_{t\to\infty}\frac{pt^{-p-1}\hat{f}(\mathscr{L}(t))}{L_f^{p-2}(\mathscr{L}(t))\mathscr{L}'(t)}\cdot\frac{\hat{f}'(\mathscr{L}(t))t}{\hat{f}(\mathscr{L}(t))}=-1.$$

证毕.

引理 3.2 (文 [10, 引理 2.4]) 令 $k\in\mathscr{K}$, 则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{k(t)}{\int_{t_0}^{t}\frac{k(s)}{s}ds}=0.$$

若 $\int_{t_0}^{\infty}\frac{k(s)}{s}ds<\infty$, 则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{k(t)}{\int_{t}^{\infty}\frac{k(s)}{s}ds}=0.$$

引理 3.3 (文 [47, 引理 2.1]) 令 $k\in\Lambda$ 是定义在 $(0,\delta_0)$ 上的不减函数, 则

(i) $D_k\in[0,1]$, $\lim_{t\to0^+}\frac{K(t)}{k(t)}=0$ 并且 $\lim_{t\to0^+}\frac{K(t)k'(t)}{k^2(t)}=1-D_k$;

(ii) 当 $D_k>0$ 时, $k\in\mathrm{NRVZ}_{(1-D_k)/D_k}$;

(iii) 当 $D_k=0$ 时, 则对于任意 $m>0$, $\lim_{t\to0^+}t^{-m}K(t)=0$.

引理 3.4 令 $\hbar$ 满足定理 1.5 中的假设, 并且 $k\in\Lambda$, 则

$$\lim_{t\to0^+}t^{-1}\hbar(\xi(K(t))^{-p/(\gamma+1-p)})=0.\tag{3.5}$$

证明 当 $\hbar\equiv0$ 时, 结果显然. 下面兹证明当 $\hbar$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t\hbar'(t)}{\hbar(t)}=-\upsilon,\quad \upsilon>D_k(\gamma+1-p)/p$$

的情形下, (3.5) 成立.

若 $D_k=0$, 则通过引理 3.3 (iii) 和命题 2.7 (ii), 即得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}t^{-1}\hbar(\xi(K(t))^{-p/(\gamma+1-p)})&=\lim_{t\to0^+}\xi^{-\upsilon/2}t^{-1}(K(t))^{p\upsilon/2(\gamma+1-p)}\\&\quad\times\lim_{t\to0^+}(\xi(K(t))^{-p/(\gamma+1-p)})^{-\upsilon/2}L(\xi(K(t))^{-p/(\gamma+1-p)})\\&=0,\quad L\in\mathrm{RV}_0.\end{aligned}$$

若 $D_k>0$, 则通过引理 3.3 (ii) 可知 $K\in \mathrm{NRVZ}_{1/D_k}$. 命题 2.5 表明

$$\hbar\circ(\xi K)^{-p/(\gamma+1-p)}\in \mathrm{NRVZ}_{p\upsilon/D_k(\gamma+1-p)}.$$

由于 $p\upsilon/D_k(\gamma+1-p)>1$, 故通过命题 2.8 (ii) 可得 (3.5) 成立. 证毕.

引理 3.5 (弱比较原理) 令 Ω 为有界区域, $G:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是定义在 $\Omega\times\mathbb{R}$ 上的函数, 且关于第二个变量不增并连续. 令 $u,\ w\in W^{1,p}(\Omega)$ 分别满足不等式

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi dx\le\int_\Omega G(x,u)\varphi dx,\quad \varphi\in W_0^{1,p}(\Omega),\\&\int_\Omega|\nabla w|^{p-2}\nabla w\cdot\nabla\varphi dx\ge\int_\Omega G(x,w)\varphi dx,\quad \varphi\in W_0^{1,p}(\Omega),\end{aligned}\tag{3.6}$$

若 $u(x)\le w(x)$, $x\in\partial\Omega$, 则 $u(x)\le w(x)$, $x\in\Omega$.

4 定理 1.2 的证明

证明 令 $\varepsilon\in(0,b_1p/2)$ 并且定义 $\tau_1:=(\xi_1^p-\varepsilon\xi_1^p/(b_1p))^{1/p}$, $\tau_2:=(\xi_2^p+\varepsilon\xi_2^p/(b_2p))^{1/p}$. 通过简单计算可知 $(1/2)^{1/p}\xi_1<\tau_1<\tau_2<(3/2)^{1/p}\xi_2$, 其中 $\xi_i=(\frac{b_ip^p}{(N+p-2\lambda)(p-1)^{p-1}})^{1/p}$, $i=1,2$. 令常数 $R>t_0$ (t_0 通过 $\mathscr{K}$ 的定义给出), 并定义 $\Omega_R:=\{x\in\mathbb{R}^N:|x|>R\}$.

通过 (b_1), (b_2), (1.4), 命题 2.9 (i), 引理 3.1 和 3.2 可知, 分别存在充分小和充分大的常数 $\delta_\varepsilon>0$ 和 $R_\varepsilon>0$, 使得对于任意 $(x,r)\in\Omega_{R_\varepsilon}\times(0,2\delta_\varepsilon)$, 有下式成立:

$$\mathscr{L}'(1/r)>0,\quad \frac{\mathscr{L}'(1/r)}{(1/r)\mathscr{L}''(1/r)}<0,\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}&-\bigg(\frac{p-1}{p}\frac{|x|^{(p-\lambda)/(p-1)}k(|x|)}{\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds}+1-\lambda+(p-1)\frac{|x|k'(|x|)}{k(|x|)}+N-1\bigg)\\&\qquad\times\frac{\mathscr{L}'(1/r)}{(1/r)\mathscr{L}''(1/r)}>0,\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}J_i(x,r):=\bigg|&-\Big(\frac{\tau_i(p-1)}{p}\Big)^p(p-1)\bigg(\frac{|x|^{(p-\lambda)/(p-1)}k(|x|)}{\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds}-\frac{p-\lambda}{p-1}\bigg)\\&-\bigg(2\Big(\frac{\tau_i(p-1)}{p}\Big)^p(p-1)\frac{\mathscr{L}'(1/r)}{(1/r)\mathscr{L}''(1/r)}\frac{|x|^{(p-\lambda)/(p-1)}k(|x|)}{\int_{|x|}^\infty s^{(p-\lambda)/(p-1)}k(s)ds}\bigg)\\&+2\Big(\frac{\tau_i(p-1)}{p}\Big)^p(p-\lambda)-\bigg(\tau_i^p\Big(\frac{p-1}{p}\Big)^{p-1}\bigg(\frac{p-1}{p}\frac{|x|^{(p-\lambda)/(p-1)}k(|x|)}{\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds}\\&+1-\lambda+(p-1)\frac{|x|k'(|x|)}{k(|x|)}+N-1\bigg)\frac{\mathscr{L}'(1/r)}{(1/r)\mathscr{L}''(1/r)}+\tau_i^p\Big(\frac{p-1}{p}\Big)^{p-1}\frac{p-\lambda+p(N-\lambda)}{p}\bigg)\bigg|\\&<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}-pb_2-\frac{\varepsilon}{2}<&\frac{b(x)}{|x|^{-\lambda}k^{p-1}(|x|)}\Big(\frac{L_f(\mathscr{L}(1/r))}{(1/r)\mathscr{L}'(1/r)}\Big)^{p-1}\frac{\mathscr{L}'(1/r)}{(1/r)\mathscr{L}''(1/r)}\\&\times\frac{f(\mathscr{L}(1/r))}{(1/r)^pL_f^{p-1}(\mathscr{L}(1/r))}<-pb_1+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

令 $\sigma\in(0,\delta_\varepsilon)$ 且满足 $\sigma<(1/2)^{1/p}\xi_1(\int_{R_\varepsilon}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds)^{\frac{p-1}{p}}$. 令 u 是方程 (1.1) 的任意整体大解. 定义

$$D_-^\sigma:=\Omega_{R_\varepsilon}\setminus\Omega_-^\sigma,\quad D_+^\sigma=\Omega_{R_\varepsilon}\setminus\Omega_+^\sigma,$$

其中

$$\Omega_-^\sigma := \bigg\{x\in\Omega_{R_\varepsilon} : \tau_1\bigg(\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds\bigg)^{\frac{p-1}{p}}\le\sigma\bigg\},$$

$$\Omega_+^\sigma := \bigg\{x\in\Omega_{R_\varepsilon+r_0} : \mathscr{L}\bigg(\bigg(\tau_2\bigg(\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds\bigg)^{\frac{p-1}{p}}+\sigma\bigg)^{-1}\bigg)\le u(x)\bigg\}. \tag{4.5}$$

在 (4.5) 中, r_0 是一个充分大的常数, 使得 Ω_+^σ 是以 $R_\varepsilon+r_0$ 为半径且以原点为中心的球的外部区域. 通过 $\Omega_\mp^\sigma$ 的定义可知 $D_\mp^\sigma$ 均为环域.

不妨设 $(3/2)^{\frac{p-1}{p}}\xi_2(\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds)^{\frac{p-1}{p}}<\delta_\varepsilon$, $x\in\Omega_{R_\varepsilon}$, 并且定义

$$\overline{u}_\varepsilon=\mathscr{L}(1/(r_1-\sigma)),\quad x\in D_-^\sigma,\quad \underline{u}_\varepsilon=\mathscr{L}(1/(r_2+\sigma)),\quad x\in D_+^\sigma,$$

其中

$$r_i=\tau_i\bigg(\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds\bigg)^{\frac{p-1}{p}},\quad i=1,2.$$

通过 (4.1)–(4.4) 和直接计算可知, 对于任意 $x\in D_-^\sigma$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\Delta_p\overline{u}_\varepsilon-b(x)f(\overline{u}_\varepsilon)\\
&\quad=(\mathscr{L}'(1/(r_1-\sigma)))^{p-2}\mathscr{L}''(1/(r_1-\sigma))(1/(r_1-\sigma)^{2p})|x|^{-\lambda}k^{p-1}(|x|)\\
&\qquad\times\bigg[(\tau_1(p-1)/p)^p(p-1)\frac{|x|^{(p-\lambda)/(p-1)}k(|x|)}{\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds}+2(\tau_1(p-1)/p)^p(p-1)\frac{\mathscr{L}'(1/(r_1-\sigma))}{(1/(r_1-\sigma))\mathscr{L}''(1/(r_1-\sigma))}\\
&\qquad\times\frac{|x|^{(p-\lambda)/(p-1)}k(|x|)}{\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds}+\tau_1^p\bigg(\frac{p-1}{p}\bigg)^{p-1}\bigg(\frac{p-)}{p}\frac{|x|^{(p-\lambda)/(p-1)}k(|x|)}{\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds}+1-\lambda\\
&\qquad+(p-1)\frac{|x|k'(|x|)}{k(|x|)}+N-1\bigg)\frac{\mathscr{L}'(1/(r_1-\sigma))}{(1/(r_1-\sigma))\mathscr{L}''(1/(r_1-\sigma))}\frac{r-\sigma}{r}\\
&\qquad-\frac{b(x)}{|x|^{-\lambda}k(|x|)}\frac{f(\mathscr{L}(1/(r_1-\sigma)))}{(\mathscr{L}'(1/(r_1-\sigma)))^{p-2}\mathscr{L}''(1/(r_1-\sigma))(1/(r_1-\sigma)^{2p})}\bigg]\\
&\quad\le-(\mathscr{L}'(1/(r_1-\sigma)))^{p-2}\mathscr{L}''(1/(r_1-\sigma))(1/(r_1-\sigma)^{2p})|x|^{-\lambda}k^{p-1}(|x|)\\
&\qquad\times\bigg[\bigg(\tau_1\frac{p-1}{p}\bigg)^p(p-\lambda)+\tau_1^p\bigg(\frac{p-1}{p}\bigg)^{p-1}\frac{p-\lambda+p(N-\lambda)}{p}\\
&\qquad-\bigg(\tau_1\frac{p-1}{p}\bigg)^p(p-1)\bigg(\frac{|x|^{(p-\lambda)/(p-1)}k(|x|)}{\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds}-\frac{p-\lambda}{p-1}\bigg)\\
&\qquad-\bigg(2(\tau_1(p-1)/p)^p(p-1)\frac{\mathscr{L}'(1/(r_1-\sigma))}{(1/(r_1-\sigma))\mathscr{L}''(1/(r_1-\sigma))}\frac{|x|^{(p-\lambda)/(p-1)}k(|x|)}{\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds}\\
&\qquad+2(\tau_1(p-1)/p)^p(p-\lambda)-\bigg(\tau_1^p\bigg(\frac{p-1}{p}\bigg)^{p-1}\bigg(\frac{p-1}{p}\frac{|x|^{(p-\lambda)/(p-1)}k(|x|)}{\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds}+1-\lambda+(p-1)\\
&\qquad\times\frac{|x|k'(|x|)}{k(|x|)}+N-1\bigg)\frac{\mathscr{L}'(1/(r_1-\sigma))}{(1/(r_1-\sigma))\mathscr{L}''(1/(r_1-\sigma))}+\tau_1^p\bigg(\frac{p-1}{p}\bigg)^{p-1}\frac{p-\lambda+p(N-\lambda)}{p}\bigg)\\
&\qquad+\frac{b(x)}{|x|^{-\lambda}k(|x|)}\bigg(\frac{L_f(\mathscr{L}(1/(r_1-\sigma)))}{(1/(r_1-\sigma))\mathscr{L}(1/(r_1-\sigma))}\bigg)^{p-1}\frac{\mathscr{L}'(1/(r_1-\sigma))}{(1/(r_1-\sigma))\mathscr{L}''(1/(r_1-\sigma))}\\
&\qquad\times\frac{f(\mathscr{L}(1/(r_1-\sigma)))}{(1/(r_1-\sigma))^pL_f^{p-1}(\mathscr{L}(1/(r_1-\sigma)))}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\mathscr{L}'(1/(r_1-\sigma)))^{p-2}\mathscr{L}''(1/(r_1-\sigma))(1/(r_1-\sigma)^{2p})|x|^{-\lambda}k^{p-1}(|x|)\\
&\quad\times\bigg[J_1(x,r_1-\sigma)+\frac{b(x)}{|x|^{-\lambda}k(|x|)}\bigg(\frac{L_f(\mathscr{L}(1/(r_1-\sigma)))}{(1/(r_1-\sigma))\mathscr{L}'(1/(r_1-\sigma))}\bigg)^{p-1}\frac{\mathscr{L}'(1/(r_1-\sigma))}{(1/(r_1-\sigma))\mathscr{L}''(1/(r_1-\sigma))}\\
&\quad\times\frac{f(\mathscr{L}(1/(r_1-\sigma)))}{(1/(r_1-\sigma))^pL_f^{p-1}(\mathscr{L}(1/(r_1-\sigma)))}+pb_1+\tau_1^p\Big(\frac{p-1}{p}\Big)^{p-1}(N+p-2\lambda)-pb_1\bigg]\le 0,
\end{aligned}
$$

即 $\overline{u}_\varepsilon$ 是方程 (1.1) 在 D_-^σ 中的上解. 通过相似的计算可知, $\underline{u}_\varepsilon$ 是方程 (1.1) 在 D_σ^+ 中的下解. 我们断言, 存在不依赖于 σ 的常数 M, 使得下式成立:

$$u(x)\le\overline{u}_\varepsilon(x)+M,\quad x\in D_-^\sigma, \tag{4.6}$$

$$\underline{u}_\varepsilon(x)\le u(x)+M,\quad x\in\Omega_{R_\varepsilon}. \tag{4.7}$$

事实上, 总存在不依赖于 σ 的正常数 M, 使得

$$u(x)\le\overline{u}_\varepsilon(x)+M,\quad \underline{u}_\varepsilon(x)\le u(x)+M,\quad x\in\{x\in\mathbb{R}^N:|x|=R_\varepsilon\}. \tag{4.8}$$

此外, 因为

$$u(x)<\overline{u}_\varepsilon(x)=\infty,\quad x\in\bigg\{x\in\mathbb{R}^N:\tau_1\bigg(\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds\bigg)^{\frac{p-1}{p}}=\sigma\bigg\}.$$

故我们总可以选择一个充分小的正常数 ρ, 使得

$$\sup_{x\in D_-^\sigma}u(x)\le\overline{u}_\varepsilon(x),\quad x\in D_-^\sigma\setminus\tilde{D}_-^\sigma, \tag{4.9}$$

其中 $\tilde{D}_-^\sigma=\Omega_{R_\varepsilon}\setminus\Omega_-^{\sigma(1+\rho)}$. 结合 (4.8) 和 (4.9) 可得 $u(x)\le\overline{u}_\varepsilon(x)+M$, $x\in\partial(\tilde{D}_-^\sigma)$. 此外, 结合 (4.8) 和 Ω_σ^+ 的定义 (见文 (4.5)), 有 $\underline{u}_\varepsilon(x)\le u(x)+M$, $x\in\partial(D_+^\sigma)$. 因为 u 和 $\underline{u}_\varepsilon$ 分别在 $\tilde{D}_-^\sigma$ 和 D_+^σ 中满足 (3.6). 通过 (f_1) 可知 $\overline{u}_\varepsilon+M$ 和 $u+M$ 分别在区域 $\tilde{D}_-^\sigma$ 和 D_+^σ 中为原方程的上解. 通过引理 3.6 即得

$$u(x)\le\overline{u}_\varepsilon(x)+M,\quad x\in\tilde{D}_-^\sigma,\quad \underline{u}_\varepsilon(x)\le u(x)+M,\quad x\in D_+^\sigma. \tag{4.10}$$

结合 (4.10), (4.9) 和 (4.5), 即得 (4.6), (4.7) 成立. 因此, 令 $\sigma\to0$ 可得, 对于任意 $x\in\Omega_{R_\varepsilon}$, 有

$$
\begin{aligned}
\frac{u(x)}{\mathscr{L}(\tau_1(\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds)^{(1-p)/p})}&\le 1+\frac{M}{\mathscr{L}(\tau_1(\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds)^{(1-p)/p})};\\
\frac{u(x)}{\mathscr{L}(\tau_2(\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds)^{(1-p)/p})}&\ge 1-\frac{M}{\mathscr{L}(\tau_2(\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds)^{(1-p)/p})}.
\end{aligned}
$$

故

$$\limsup_{|x|\to\infty}\frac{u(x)}{\mathscr{L}(\tau_1(\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds)^{(1-p)/p})}\le1,\quad \liminf_{|x|\to\infty}\frac{u(x)}{\mathscr{L}(\tau_2(\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds)^{(1-p)/p})}\ge1.$$

进一步有

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{u(x)}{\mathscr{L}((\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(1-p)}k(s)ds)^{(1-p)/p})}=1.$$

又因为 $\psi(|x|)=\phi((\int_{|x|}^\infty s^{(1-\lambda)/(p-1)}k(s)ds)^{\frac{p-1}{p}})$, $\mathscr{L}(1/t)=\phi(t)$, 其中 ϕ 是积分方程的解:

$$\int_{\phi(t)}^\infty\frac{L_f^{p-2}(s)}{\hat{f}(s)}ds=t^p.$$

故 (1.3) 成立. 证毕.

5 定理 1.5 的证明

证明 任取 $\delta>0$, 定义 $\mathfrak{D}_\delta=\{x\in\Omega:0<d(x)<\delta\}$. 由于 Ω 具有 C^4- 光滑边界, 故存在 $\delta_1>0$, 使得 $d\in C^4(\mathfrak{D}_{\delta_1})$, 并且 $|\nabla d(x)|=1$, $\Delta d(x)=-(N-1)H(\bar{x}(x))+o(1)$, $x\in\mathfrak{D}_{\delta_1}$. 方便起见, 定义 $\bar{x}:=\bar{x}(x)$, $x\in\mathfrak{D}_{\delta_1}$. 对于固定的 $\varepsilon>0$, 令

$$w_\pm(x,d(x))=\xi(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}(1+(C_1\pm\varepsilon)d(x)+C_2H(\bar{x})d(x)),\quad x\in\mathfrak{D}_{\delta_1},$$

即得

$$\begin{aligned}f(w_\pm(x,d(x)))=&\,c_0\xi^\gamma(K(d(x)))^{-\gamma p/(\gamma+1-p)}(1+\hbar(w_\pm(x,d(x))))(1+\gamma(C_1\pm\varepsilon)d(x)\\&+\gamma C_2H(\bar{x})d(x)),\quad x\in\mathfrak{D}_{\delta_1}.\end{aligned}$$

令 $r=d(x)$, 通过直接计算我们发现如下事实:

$$\begin{aligned}&\Delta_p w_\pm(x,r)\\&\quad=\operatorname{div}(|\nabla w_\pm|^{p-2}\nabla w_\pm)\\&\quad=(p-2)|\nabla w_\pm|^{p-4}\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial w_\pm}{\partial x_i}\frac{\partial w_\pm}{\partial x_j}\frac{\partial^2 w_\pm}{\partial x_j\partial x_i}+|\nabla w_\pm|^{p-2}\Delta w_\pm\\&\quad=|\nabla w_\pm|^{p-2}\bigg((p-2)\frac{\partial^2 w_\pm}{\partial^2 r}+(p-2)\bigg(\frac{(\gamma+1-p)D_k+p}{\gamma+1}\bigg)^{3/(\gamma+1-p)}\bigg(\frac{(p-1)(\gamma+1)}{c_0(\gamma+1-p)}\bigg)^{3/(\gamma+1-p)}\\&\qquad\times\bigg(\frac{p}{\gamma+1-p}\bigg)^{3p/(\gamma+1-p)}\frac{\gamma+1}{\gamma+1-p}(K(r))^{(p-(4(\gamma+1)))/(\gamma+1-p)}\cdot k^4(r)\mathfrak{A}_\pm(x)/|\nabla w_\pm|^2+\Delta w_\pm\bigg)\\&\quad=|\nabla w_\pm|^{p-2}\bigg(\frac{(\gamma+1-p)D_k+p}{\gamma+1}\bigg)^{1/(\gamma+1-p)}\bigg(\frac{(p-1)(\gamma+1)}{c_0(\gamma+1-p)}\bigg)^{1/(\gamma+1-p)}k^2(r)r\bigg[\frac{(p-2)}{r}\\&\qquad\times\bigg(-\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}\cdot\frac{k'(r)K(r)}{k^2(r)}+1\bigg)+(p-2)\bigg(-\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}\cdot\frac{k'(r)K(r)}{k^2(r)}+1\bigg)(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))\\&\qquad-\frac{2(p-2)(\gamma+1-p)}{(\gamma+1)}\cdot\frac{K(r)}{rk(r)}(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))\\&\qquad+\frac{(p-2)\mathfrak{A}_\pm(x)}{(\mathfrak{B}_\pm(x))^2r}+\bigg(\frac{(\gamma+1-p)D_k+p}{\gamma+1}\bigg)^{-1/(\gamma+1-p)}\bigg(\frac{(p-1)(\gamma+1)}{c_0(\gamma+1-p)}\bigg)^{-1/(\gamma+1-p)}\\&\qquad\times\bigg(\frac{p}{\gamma+1-p}\bigg)^{-p/(\gamma+1-p)}\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}(K(r))^{(2(\gamma+1)-p)/(\gamma+1-p)}\cdot\frac{\Delta w_\pm}{k^2(r)r}\bigg],\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_\pm(x)=&\bigg(\frac{\gamma+1-p}{p}\bigg)^2\bigg(\frac{K(r)}{k(r)}\bigg)^2\bigg(-\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}\cdot\frac{K(r)k'(r)}{k^2(r)}+1\bigg)(1+(C_1\pm\varepsilon\\&+C_2H(\bar{x}))r)\bigg[C_2^2r^2\bigg(\sum_{i,j}\frac{\partial H(\bar{x})}{\partial x_i}\frac{\partial H(\bar{x})}{\partial x_j}-|\nabla H(\bar{x})|^2\bigg)\bigg]-\frac{2(\gamma+1-p)^3}{p^2\gamma+1}\bigg(\frac{K(r)}{k(r)}\bigg)^3\\&\times\bigg[(C_2r)^2(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))\bigg(\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial H(\bar{x})}{\partial x_i}\frac{\partial H(\bar{x})}{\partial x_j}-|\nabla H(\bar{x})|^2\bigg)\bigg]\\&+\frac{4r(\gamma+1-p)^2}{p(\gamma+1)}\bigg(\frac{K(r)}{k(r)}\bigg)^2(C_2(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))\nabla H(\bar{x})\nabla d(x))-\frac{2C_2r(\gamma+1-p)}{\gamma+1}\frac{K(r)}{k(r)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times(1+(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))r)^2\nabla H(\bar{x})\nabla d(x)+\frac{(\gamma+1-p)^2}{p(\gamma+1)}\left(\frac{K(r)}{k(r)}\right)^2\Bigg(2C_2\nabla H(\bar{x})\nabla d(x)+C_2r\\
&\times\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial^2H(\bar{x})}{\partial x_j\partial x_i}\frac{\partial d}{\partial x_j}\frac{\partial d}{x_i}\Bigg)\left(\frac{\gamma+1-p}{p}\right)^2\left(\frac{K(r)}{k(r)}\right)^3(1+(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))r)^2-\frac{2(\gamma+1-p)}{\gamma+1}\\
&\times(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))\Bigg(2C_2\nabla H(\bar{x})\nabla d(x)+C_2r\sum_{i,j}^{N}\frac{\partial^2H(\bar{x})}{\partial x_j\partial x_i}\frac{\partial d}{\partial x_j}\frac{\partial d}{x_i}\Bigg)-\frac{(\gamma+1-p)^3}{p^2(\gamma+1)}\left(\frac{K(r)}{k(r)}\right)^3\\
&\times\left[(1+(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))r)(C_2r)^2\sum_{i,j=1}^{N}\frac{H(\bar{x})}{\partial x_i}\frac{H(\bar{x})}{\partial x_j}\frac{\partial^2d}{\partial x_j\partial x_i}\right]+\frac{(\gamma+1-p)^4}{p^3(\gamma+1)}\left(\frac{K(r)}{k(r)}\right)^4\\
&\times(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))(C_2r)^2\sum_{i,j}^{N}\frac{\partial H(\bar{x})}{\partial x_i}\frac{\partial H(\bar{x})}{\partial x_j}\frac{\partial^2d}{\partial x_j\partial x_i}+\frac{(\gamma+1-p)^2}{p(\gamma+1)}\left(\frac{K(r)}{k(r)}\right)^2\\
&\times\left(r-\frac{\gamma+1-p}{p}\cdot\frac{K(r)}{k(r)}\right)C_2^2r(1+(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))r)(2|\nabla H(\bar{x})|^2+2(\nabla H(\bar{x})\nabla d(x))^2)\\
&-\frac{(\gamma+1-p)^3}{p^2(\gamma+1)}\left(\frac{K(r)}{k(r)}\right)^3 2(C_2r)^2\Bigg[\sum_{i,j}^{N}\frac{\partial^2H(\bar{x})}{\partial x_j\partial x_i}\frac{\partial H(\bar{x})}{\partial x_j}\frac{\partial d}{\partial x_i}(1+(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))r)\\
&+(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))(|\nabla H(\bar{x})|^2+(\nabla H(\bar{x})\nabla d(x))^2)+C_2r|\nabla H(\bar{x})|^2\nabla H(\bar{x})\nabla d(x)\Bigg]\\
&+\frac{(\gamma+1-p)^4}{p^3(\gamma+1)}\left(\frac{K(r)}{k(r)}\right)^4\Bigg[C_2^2r(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))(2|\nabla H(\bar{x})|^2+2\nabla H(\bar{x})\nabla d(x))^2\\
&+2C_2^3r^2|\nabla H(\bar{x})|^2\nabla H(\bar{x})\nabla d(x)+2(C_2r)^2(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))\sum_{i,j}^{N}\frac{\partial^2H(\bar{x})}{\partial x_j\partial x_i}\frac{\partial H(\bar{x})}{\partial x_j}\frac{\partial d}{\partial x_i}\\
&+(C_2r)^3\sum_{i,j}^{N}\frac{\partial H(\bar{x})}{\partial x_i}\frac{\partial H(\bar{x})}{\partial x_j}\frac{\partial^2H(\bar{x})}{\partial x_j\partial x_i}\Bigg]+\frac{4(\gamma+1-p)^2}{p(\gamma+1)}\left(\frac{K(r)}{k(r)}\right)^2C_2r^2(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))^2\\
&\times\nabla H(\bar{x})\nabla d(x)-\frac{2(\gamma+1-p)^3}{p^2(\gamma+1)}\left(\frac{K(r)}{k(r)}\right)^3(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))^2\Bigg(3C_2r\nabla H(\bar{x})\nabla d(x)\\
&+C_2r^2\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial^2H(\bar{x})}{\partial x_j\partial x_i}\frac{\partial d}{\partial x_j}\frac{\partial d}{\partial x_i}\Bigg)+\frac{(\gamma+1-p)^4}{p^3(\gamma+1)}\left(\frac{K(r)}{k(r)}\right)^4(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))^2\\
&\times\left(2C_2\nabla H(\bar{x})\nabla d(x)+C_2r\sum_{i,j}^{N}\frac{\partial^2H(\bar{x})}{\partial x_j\partial x_i}\frac{\partial d}{\partial x_j}\frac{\partial d}{\partial x_i}\right);
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{B}_\pm(x)=(1+\mathfrak{J}_\pm(x))^{1/2}$,

这里

$$
\mathfrak{J}_\pm(x)=2(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))\left(r-\frac{\gamma+1-p}{p}\cdot\frac{K(r)}{k(r)}\right)+\Re_\pm(x),
$$

并且

$$
\begin{aligned}
\Re_\pm(x)=&\left(-\frac{C_2(\gamma+1-p)}{p}\cdot\frac{rK(r)}{k(r)}\right)^2\Big|\nabla H(\bar{x})|^2+(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))^2\left(r-\frac{\gamma+1-p}{p}\cdot\frac{K(r)}{k(r)}\right)^2\\
&+2\left[1+(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))\left(r-\frac{\gamma+1-p}{p}\cdot\frac{K(r)}{k(r)}\right)\right]\left(-\frac{C_2(\gamma+1-p)}{p}\right)\frac{rK(r)}{k(r)}\cdot\nabla H(\bar{x})\nabla d(x).
\end{aligned}
$$

通过利用 Taylor 公式, 得

$$(\mathfrak{B}_\pm(x))^{2-p}=\sum_{i=0}^{n}\binom{\varpi}{i}\mathfrak{J}_\pm^i(x)+\binom{\varpi}{n+1}(1+\mu_\pm\mathfrak{J}_\pm(x))^{\varpi-(n+1)}\mathfrak{J}_\pm^{n+1}(x),$$

其中

$$\varpi=\frac{2-p}{2},\quad \mu_\pm\in(0,1).$$

定义

$$\begin{aligned}
I_{1\pm}(x)&=\frac{p-1}{r}(\mathfrak{B}_\pm(x))^{2-p}\bigg[1-\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}\cdot\frac{K(r)k'(r)}{k^2(r)}-\frac{(\gamma+1-p)D_k+p}{\gamma+1}\cdot(1+\hbar(w_\pm(x,r)))\bigg];\\
I_{2\pm}(x)&=(C_1\pm\varepsilon)(p-1)\bigg[1-\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}\bigg(\frac{K(r)k'(r)}{k^2(r)}+\frac{2K(r)}{rk(r)}\bigg)\\
&\quad+(p-2)\bigg(1-\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}\cdot\frac{K(r)k'(r)}{k^2(r)}\bigg)\bigg(1-\frac{\gamma+1-p}{p}\cdot\frac{K(r)}{rk(r)}\bigg)\\
&\quad-\frac{((\gamma+1-p)D_k+p)\gamma}{\gamma+1}(1+\hbar(w_\pm(x,r)))(\mathfrak{B}_\pm(x))^{2-p}\bigg]\\
&\quad-(B_0\mp a_0\varepsilon)(p-1)\frac{(\gamma+1-p)D_k+p}{\gamma+1}(1+\hbar(w_\pm(x,r)))(\mathfrak{B}_\pm(x))^{2-p};\\
I_{3\pm}(x)&=H(\bar{x})\bigg[C_2(p-1)\bigg(1-\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}\bigg(\frac{K(r)k'(r)}{k^2(r)}+\frac{2K(r)}{rk(r)}\bigg)\\
&\quad+(p-2)\bigg(1-\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}\cdot\frac{K(r)k'(r)}{k^2(r)}\bigg)\bigg(1-\frac{\gamma+1-p}{p}\cdot\frac{K(r)}{rk(r)}\bigg)\\
&\quad-\frac{((\gamma+1-p)D_k+p)\gamma}{\gamma+1}(1+\hbar(w_\pm(x,r)))(\mathfrak{B}_\pm(x))^{2-p}\bigg)\\
&\quad+\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}\cdot\frac{(N-1)K(r)}{rk(r)}\bigg]+o(1);\\
I_{4\pm}(x)&=\frac{(p-2)D_\pm(x)}{(\mathfrak{B}_\pm(x))^2r}-\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}\cdot\frac{K(r)}{k(r)}\Big[(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))\Delta d(x)+2C_2\nabla H(\bar{x})\nabla d(x)\Big]\\
&\quad+\frac{(\gamma+1-p)^2}{(\gamma+1)p}\frac{K(r)}{rk(r)}\frac{K(r)}{k(r)}\bigg[(C_1\pm\varepsilon+C_2H(\bar{x}))\Delta d(x)\\
&\quad+2C_2\nabla H(\bar{x})\nabla d(x)+C_2r\Delta H(\bar{x})\bigg]-(p-1)(B_0\mp a_0\varepsilon)\frac{((\gamma+1-p)D_k+p)\gamma}{\gamma+1}\\
&\quad\times(1+\hbar(w_\pm(x,r)))(\mathfrak{B}_\pm(x))^{2-p}((C_1\pm\varepsilon)r+C_2H(\bar{x})r+o(1))\\
&\quad+\frac{1}{r}\bigg(1-\frac{\gamma+1-p}{\gamma+1}\cdot\frac{K(r)k'(r)}{k^2(r)}\bigg)\bigg[\sum_{i=2}^{n}\binom{\varpi}{i}\mathfrak{J}_\pm^i(x)\\
&\quad+\binom{\varpi}{n+1}(1+\mu_\pm\mathfrak{J}_\pm(x))^{\varpi-(n+1)}\mathfrak{J}_\pm^{n+1}(x)+\Re_\pm(x)\bigg],
\end{aligned}$$

其中

$$a_0\in(0,\min\{1,\ (\gamma+1-p)(p(p+(\gamma+1)D_k)-(2-p)(\gamma+1-p)D_k^2)/(\gamma+1)^2\}),$$

并且 $\varpi=\frac{2-p}{2}$, $\mu_\pm\in(0,1)$.

通过引理 3.3, 引理 3.4 以及 ξ, C_1 和 C_2 的定义 (见定理 1.5), 我们有如下引理:

引理 5.1 在定理 1.5 的条件下, 下式成立:

(i) $\lim_{d(x)\to 0} I_{1\pm}(x)=\frac{(\gamma+1-p)(p-1)\eta_k}{\gamma+1}$;

(ii) $\lim_{d(x)\to 0} I_{2\pm}(x)=(p-1)[(C_1\pm\varepsilon)(\gamma+1-p)((2-p)(\gamma+1-p)D_k^2$
$-p(p+(\gamma+1)D_k))/(p(\gamma+1))-(B_0\mp a_0\varepsilon)(p+(\gamma+1-p)D_k)/(\gamma+1)]$;

(iii) $\lim_{d(x)\to 0} I_{3\pm}(x)=\lim_{d(x)\to 0} I_{4\pm}(x)=0$.

通过 (b_1), (b_3) 和引理 5.1 可知, 存在充分小的 $\delta_{1\varepsilon}\in(0,\min\{1,\delta_1/2\})$, 使得

(i) $k^p(d(x))(1+(B_0-a_0\varepsilon)d(x))\le b(x)\le k^p(d(x))(1+(B_0+a_0\varepsilon)d(x))$, $x\in\mathfrak{D}_{2\delta_{1\varepsilon}}$;

(ii) $I_{1+}(x)+I_{2+}(x)+I_{3+}(x)+I_{4+}(x)\le 0$, $x\in\mathfrak{D}_{2\delta_{1\varepsilon}}$;

(iii) $I_{1-}(x)+I_{2-}(x)+I_{3-}(x)+I_{4-}(x)\ge 0$, $x\in\mathfrak{D}_{2\delta_{1\varepsilon}}$.

定义

$$D_-^\sigma:=\mathfrak{D}_{2\delta_{1\varepsilon}}\setminus\bar{\mathfrak{D}}_\sigma,\quad D_+^\sigma:=\mathfrak{D}_{2\delta_{1\varepsilon}-\sigma}$$

和

$$d_1(x):=d(x)-\sigma,\quad x\in D_-^\sigma,\quad d_2(x):=d(x)+\sigma,\quad x\in D_+^\sigma.$$

令 $\overline{u}_\varepsilon(x,d_1(x)):=\xi(K(d_1(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}(1+(C_1+\varepsilon)d_1(x)+C_2H(\bar{x})d_1(x))$, $x\in D_-^\sigma$, 则

$$f(\overline{u}_\varepsilon(x,d_1(x)))=c_0\xi^\gamma(K(d_1(x)))^{-\gamma p/(\gamma+1-p)}(1+\hbar(\overline{u}_\varepsilon(x,d_1(x))))(1+\gamma(C_1+\varepsilon)d_1(x)$$
$$+\gamma C_2H(\bar{x})d_1(x)+o(d_1(x))),\quad x\in D_-^\sigma.$$

通过直接计算可知, 对于任意 $x\in D_-^\sigma$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\Delta\,\overline{u}_\varepsilon(x,d_1(x))\\
&=\bigg(\frac{(p-1)((\gamma+1-p)D_k+p)}{c_0(\gamma+1-p)}\bigg)^{1/(\gamma+1-p)}\bigg[\bigg(\frac{p}{\gamma+1-p}\bigg)^{p/(\gamma+1-p)}\frac{\gamma+1}{\gamma+1-p}\\
&\quad\times(K(d_1(x)))^{-(2(\gamma+1)-p)/(\gamma+1-p)}k^2(d_1(x))(1+(C_1+\varepsilon)d_1(x)+C_2H(\bar{x})d_1(x))\\
&\quad-\bigg(\frac{p}{\gamma+1-p}\bigg)^{p/(\gamma+1-p)}(K(d_1(x)))^{-(\gamma+1)/(\gamma+1-p)}k'(d_1(x))(1+(C_1+\varepsilon)d_1(x)+C_2H(\bar{x})d_1(x))\\
&\quad-\bigg(\frac{p}{\gamma+1-p}\bigg)^{p/(\gamma+1-p)}(K(d_1(x)))^{-(\gamma+1)/(\gamma+1-p)}k(d_1(x))(1+(C_1+\varepsilon)d_1(x)+C_2H(\bar{x})d_1(x))\\
&\quad\times\Delta d(x)-2\bigg(\frac{p}{\gamma+1-p}\bigg)^{p/(\gamma+1-p)}(K(d_1(x)))^{-(\gamma+1)/(\gamma+1-p)}k(d_1(x))(C_1+\varepsilon+C_2H(\bar{x})\\
&\quad+C_2d_1(x)\nabla H(\bar{x})\nabla d(x))+\bigg(\frac{p}{\gamma+1-p}\bigg)^{(p-1)/(\gamma+1-p)}(K(d_1(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}(2C_2\nabla H(\bar{x})\nabla d(x)\\
&\quad+(C_1+\varepsilon+C_2H(\bar{x}))\Delta d(x)+C_2d_1(x)\Delta H(\bar{x}))\bigg].
\end{aligned}$$

因此, 对于任意 $x\in D_-^\sigma$ 和 $r=d_1(x)$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\Delta_p\overline{u}_\varepsilon(x,r)-k^p(r)(1+(B_0-a_0\varepsilon)r)f(\overline{u}_\varepsilon(x,r))\\
&\quad\le|\nabla\overline{u}_\varepsilon(x,r)|^{p-2}\bigg(\frac{(p-1)((\gamma+1-p)D_k+p)}{c_0(\gamma+1-p)}\bigg)^{1/(\gamma+1-p)}\bigg(\frac{p}{\gamma+1-p}\bigg)^{p/(\gamma+1-p)}\frac{\gamma+1}{\gamma+1-p}\\
&\qquad\times(K(r))^{-(2(\gamma+1)-p)/(\gamma+1-p)}k^2(r)r(I_{1+}(x)+I_{2+}(x)+I_{3+}(x)+I_{4+}(x))\le 0,
\end{aligned}$$

即 $\overline{u}_\varepsilon(x,r)$ 是方程 (1.1) 在 D_-^σ 中的上解. 通过类似的计算可知

$$\underline{u}_\varepsilon(x,d_2(x)) := \xi(K(d_2(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}(1+(C_1-\varepsilon)d_2(x)+C_2H(\bar{x})d_2(x)),\quad x\in D_+^\sigma$$

是方程 (1.1) 在 D_+^σ 中的下解.

令 u 是方程 (1.1) 的任意边界爆破解. 我们考虑如下两种情况:

(I) ($p>1$, $p\neq 2$) 与定理 1.2 的证明类似, 存在常数 $M>0$, 使得

$$u(x)\leq \overline{u}_\varepsilon(x,d_1(x))+M,\quad x\in D_-^\sigma,\quad \underline{u}_\varepsilon(x,d_2(x))\leq u(x)+M,\quad x\in D_+^\sigma.$$

因此, 令 $\sigma\to 0$, 对于任意 $x\in\Omega_{2\delta_{1\varepsilon}}$, 我们有

$$C_1+\varepsilon+C_2H(\bar{x})+\frac{M}{\xi d(x)(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}\geq (d(x))^{-1}\biggl(\frac{u(x)}{\xi(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}-1\biggr),$$

$$C_1-\varepsilon+C_2H(\bar{x})-\frac{M}{\xi d(x)(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}\leq (d(x))^{-1}\biggl(\frac{u(x)}{\xi(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}-1\biggr).$$

下面证明

$$\lim_{d(x)\to 0}\frac{M}{\xi d(x)(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}=0. \tag{5.1}$$

若 $D_k=0$, 则通过引理 3.3 (iii) 即得 (5.1) 成立.

若 $D_k>0$, 则通过引理 3.3 (ii), (1.8) 和命题 2.8 (ii) 可得 (5.1) 成立. 因此, 我们有

$$\begin{aligned} C_1+\varepsilon+C_2H(\bar{x})&\geq \limsup_{d(x)\to 0}(d(x))^{-1}\biggl(\frac{u(x)}{\xi(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}-1\biggr),\\ C_1-\varepsilon+C_2H(\bar{x})&\leq \liminf_{d(x)\to 0}(d(x))^{-1}\biggl(\frac{u(x)}{\xi(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}-1\biggr). \end{aligned} \tag{5.2}$$

(II) ($p=2$) 通过类似的办法可知, 存在充分大的常数 $M>0$, 使得

$$u(x)\leq \overline{u}_\varepsilon(x,d_1(x))+MV1(x),\quad x\in D_\sigma^-,\quad \underline{u}_\varepsilon(x,d_2(x))\leq u(x)+MV1(x),\quad x\in D_\sigma^+,$$

其中 $V1\in C^{2,\alpha}(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 是如下问题的唯一解:

$$-\Delta v=1,\quad v>0,\quad x\in\Omega,\quad v|_{\partial\Omega}=0.$$

通过 Höpf 极大值原理 [23] 知

$$\nabla V1(x)\neq 0,\quad \forall\, x\in\partial\Omega,\quad \text{并且 } c_2d(x)<V1(x)<c_1d(x), \tag{5.3}$$

其中 c_1, c_2 是正常数.

故令 $\sigma\to 0$, 对于任意 $x\in\Omega_{2\delta_{1\varepsilon}}$, 我们有

$$C_1+\varepsilon+C_2H(\bar{x})+\frac{MV1(x)}{\xi d(x)(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}\geq (d(x))^{-1}\biggl(\frac{u(x)}{\xi(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}-1\biggr),$$

$$C_1-\varepsilon+C_2H(\bar{x})-\frac{MV1(x)}{\xi d(x)(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}\leq (d(x))^{-1}\biggl(\frac{u(x)}{\xi(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}-1\biggr).$$

通过 (5.3) 即得

$$\lim_{d(x)\to 0}\frac{MV1(x)}{\xi d(x)(K(d(x)))^{-p/(\gamma+1-p)}}=0.$$

因此, 我们有 (5.2). 令 $\varepsilon\to 0$ 即得 (1.9) 成立. 证毕.

致谢 感谢审稿人为本文所提出的非常宝贵的意见.

参 考 文 献

[1] Alarcón S., Díaz G., Rey J. M., The influence of sources terms on the boundary behavior of the large solutions of quasilinear elliptic equations, *Z. Angew. Math. Phys.*, 2013, **64**(3): 659–677.

[2] Alves C. O., Santos C. A., Zhou J., Existence and non-existence of blow-up solutions for a non-autonomous problem with indefinite and gradient terms, *Z. Angew. Math. Phys.*, 2015, **66**(3): 891–918.

[3] Anedda C., Porru G., Second order estimates for boundary blow-up solutions of elliptic equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* (*Suppl.*), 2007, (2007): 54–63.

[4] Anedda C., Porru G., Boundary behaviour for solutions of boundary blow-up problems in a borderline case, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **352**(1): 35–47

[5] Bandle C., Asymptotic behaviour of large solutions of quasilinear elliptic problems, *Z. Angew. Math. Phys.*, 2003, **54**(5): 731–738.

[6] Bandle C., Marcus M., On second-order effects in the boundary behaviour of large solutions of semilinear elliptic problems, *Differential Integral Equations*, 1998, **11**(1): 23–34.

[7] Bandle C., Marcus M., Dependence of blowup rate of large solutions of semilinear elliptic equations, on the curvature of the boundary, *Complex Var.*, 2004, **49**(7–9): 555–570.

[8] Bieberbach L., $\Delta u = \mathrm{e}^u$ und die automorphen Funktionen, *Math. Ann.*, 1916, **77**(2): 173–212.

[9] Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L., Regular Variation, Encyclopedia Math. Appl., Vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[10] Chemmam R., Dhifli A., Mâagli H., Asymptotic behavior of ground state solutions for sublinear and singular nonlinear Dirichlet problems, *Electron. J. Differential Equations*, 2011, **2011**(88): 1–12.

[11] Cheng K., Ni W. M., On the structure of the conformal scalar curvature equation on $\mathbb{R}^N$, *Indiana Univ. Math. J.*, 1992, **41**(1): 261–278.

[12] Cîrstea F., Elliptic equations with competing rapidly varying nonlinearities and boundary blow-up, *Adv. Differential Equations*, 2007, **12**(9): 995–1030.

[13] Cîrstea F., Rădulescu V., Blow-up boundary solutions of semilinear elliptic problems, *Nonlinear Anal.*, 2002, **48**(4): 521–534.

[14] Cîrstea F., Rădulescu V., Uniqueness of the blow-up boundary solution of logistic equations with absorbtion, *C. R. Acad. Sci., Paris I*, 2002, **335**(5): 447–452.

[15] Covei D. P., Large and entire large solution for a quasilinear problem, *Nonlinear Anal.*, 2009, **70**(4): 1738–1745.

[16] Del Pino M., Letelier R., The influence of domain geometry in boundary blow-up elliptic problems, *Nonlinear Anal.*, 2002, **48**(4): 897–904.

[17] Du Y., Guo Z., Boundary blow-up solutions and their applications in quasilinear elliptic equations, *J. Anal. Math.*, 2003, **89**, 277–302.

[18] Dupaigne L., Ghergu M., Goubet O., Warnault G., Entire large solutions for semilinear elliptic equations, *J. Differential Equations*, 2012, **253**(7): 2224–2251.

[19] García-Melián J., Letelier-Albornoz R., Sabina de Lis J., Uniqueness and asymptotic behaviour for solutions of semilinear problems with boundary blow-up, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2001, **129**(12): 3593–3602.

[20] Geluk J. L., de Hann L., Regular Variation, Extensions and Tauberian Theorems, CWI Tract/Centrum Wisk. Inform., Amsterdam, 1987.

[21] Grillot M., Grillot P., The influence of domain geometry in the boundary behavior of large solutions of degenerate elliptic problems, *Port. Math.* (*N.S.*), 2007, **64**(2): 143–153.

[22] Guo Z., Shang J., Remarks on uniqueness of boundary blow-up solutions, *Nonlinear Anal.*, 2007, **66**(2): 484–497.

[23] Gilbarg D., Trudinger N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[24] Huang S., Tian Q., Asymptotic behavior of large solutions to p-Laplacian of Bieberbach-Rademacher type, *Nonlinear Anal.*, 2009, **71**(11): 5773–5780.

[25] Huang S., Tian, Q., Zhang S., Xi J., A second-order estimate for blow-up solutions of elliptic equations, *Nonlinear Anal.*, 2011, **74**(6): 2342–2350.

[26] Keller J. B., On solutions of $\Delta u = f(u)$, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1957, **10**: 503–510.

[27] Lair A. V., A necessary and sufficient condition for existence of large solutions to semilinear elliptic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **240**(1): 205–218.

[28] Loewner C., Nirenberg L., Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations. in: Contributions to Analysis (A Collection of Paper Dedicated to Lipman Bers), Academic Press,

New York, 1974.

[29] López-Gómez J., Optimal uniqueness theorems and exact blow-up rates of large solutions, *J. Differential Equations*, 2006, **224**(2): 385–439.

[30] Maric V., Regular Variation and Differential Equations, Lecture Notes in Math., Vol. 1726, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[31] Mi L., Asymptotic boundary estimates for solutions to the p-Laplacian with infinite boundary values, *Bound. Value Probl.*, 2019, No. 66, 27 pp.

[32] Mi L., Liu B., Second order expansion for blowup solutions of semilinear elliptic problems, *Nonlinear Anal.*, 2012, **75**(4): 2591–2613.

[33] Mi L., Liu B., Boundary behavior of large solutions to elliptic equations with nonlinear gradient terms, *Z. Angew. Math. Phys.*, 2013, **64**(4): 1283–1304.

[34] Mohammed A., Existence and asymptotic behavior of blow-up solutions to weighted quasilinear equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **298**(2): 621–637.

[35] Mohammed A., Boundary asymptotic and uniqueness of solutions to the p-Laplacian with infinite boundary values, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **325**(1): 480–489.

[36] Ni W. M., On the elliptic equation $\Delta u + k(x)\mathrm{e}^{2u} = 0$ and conformal metrics with prescribed Gaussian curvatures, *Invent. Math.*, 1982, **66**(2): 343–352.

[37] Osserman R., On the inequality $\Delta u \geq f(u)$, *Pacific J. Math.*, 1957, **7**: 1641–1647.

[38] Rademacher H., Einige besondere problem partieller Differentialgleichungen, in: Die Differential und Integralgleichungen, der Mechanik und Physik I, 2nd ed., Rosenberg, New York, 1943.

[39] Resnick S. I., Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes, Springer-Verlag, New York, 1987.

[40] Tao S., Zhang Z., On the existence of explosive solutions for semilinear elliptic problems, *Nonlinear Anal.*, 2002, **48**(7): 1043–1050.

[41] Wan H., Asymptotic behavior of entire large solutions to semilinear elliptic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, **448**(1): 44–59.

[42] Wan H., Asymptotic behavior and uniqueness of entire large solutions to a quasilinear elliptic equation, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2017, **2017** (30): 1–17.

[43] Wan H. Li X., Li B., Shi Y., Entire large solutions to semilinear elliptic equations with rapidly or regularly varying nonlinearities, *Nonlinear Anal.: Real World Applications*, 2019, **45**: 506–530.

[44] Yang H., On the existence and asymptotic behavior of large solutions for a semilinear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$, *Comm. Pure Appl. Anal.*, 2005, **4**(1): 197–208.

[45] Yang Z., Existence of explosive positive solutions of quasilinear elliptic equations, *Appl. Math. Comput.*, 2006, **177**(2): 581–588.

[46] Ye D., Zhou F., Invariant criteria for existence of bounded positive solutions, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, **12**(3): 413–424.

[47] Zhang Z., Boundary behavior of large solutions to semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms, *Nonlinear Anal.*, 2010, **73**(10): 3348–3363.

[48] Zhang Z., The second expansion of large solutions for semilinear elliptic equations, *Nonlinear Anal.*, 2011, **74**(11): 3445–3457.

[49] Zhang Z., Boundary behavior of large solutions to p-Laplacian elliptic equations, *Nonlinear Anal.: Real World Applications*, 2017, **33**: 40–57.

[50] Zhang Z., Ma Y., Mi L., Li X., Blow-up rates of large solutions for elliptic equations, *J. Differential Equations*, 2010, **249**(1): 180–199.