第64卷第4期 数学学报中文版 Vol.64, No.4
2021年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)04-0545-06 **文献标识码: A**

C*- 代数上强保 k-skew 交换性的映射

安润玲 高永兰

太原理工大学数学学院 太原 030024
E-mail: runlingan@aliyun.com; 99558261@qq.com

摘 要 设 $\mathscr{A}$ 是含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数, $\Phi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 是满射. 本文证明 Φ 强保 k-skew 交换性, 即 ${}_*[\Phi(A),\Phi(B)]_k={}_*[A,B]_k$, $\forall\, A,B\in\mathscr{A}$ 当且仅当 $\Phi(A)=\Phi(I)A$, $\forall\, A\in\mathscr{A}$, 其中 $\Phi(I)\in\mathscr{Z}(\mathscr{A})$, $\Phi(I)^*=\Phi(I)$, $\Phi(I)^{k+1}=I$, $\mathscr{Z}(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 的中心. 特别地, 若 $\mathscr{Z}(\mathscr{A})=\mathbb{C}I$, 则 $\Phi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 强保 k-skew 交换性当且仅当 $\Phi(A)=A$, $\forall\, A\in\mathscr{A}$ 或 $\Phi(A)=-A$, $\forall\, A\in\mathscr{A}$. 若 k 是偶数, 后一种情形不会出现.

关键词 $\mathbf{C}^*$- 代数; k-skew 交换子; 强保 k-skew 交换性映射
MR(2010) 主题分类 46L57, 47B49
中图分类 O177.2

Strong k-skew Commutativity Preserving Maps on $\mathbf{C}^*$-algebras

Run Ling AN Yong Lan GAO

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, *P. R. China*
E-mail: *runlingan@aliyun.com*; 99558261*@qq.com*

Abstract Let $\mathscr{A}$ be a $\mathbf{C}^*$-algebra with the unit I, $\Phi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ be a surjective map. We show that Φ preserves strong k-skew commutativity, that is, Φ satisfies ${}_*[\Phi(A),\Phi(B)]_k={}_*[A,B]_k$, $\forall\, A,B\in\mathscr{A}$ if and only if $\Phi(A)=\Phi(I)A$, $\forall\, A\in\mathscr{A}$, where $\Phi(I)\in\mathscr{Z}(\mathscr{A})$ with $\Phi(I)^*=\Phi(I)$ and $\Phi(I)^{k+1}=I$, $\mathscr{Z}(\mathscr{A})$ is the center of $\mathscr{A}$. In particular, if $\mathscr{Z}(\mathscr{A})=\mathbb{C}I$, then $\Phi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ preservers strong k-skew commutativity if and only if $\Phi(A)=A$, $\forall\, A\in\mathscr{A}$ or $\Phi(A)=-A$, $\forall\, A\in\mathscr{A}$. The latter case does not occur if k is even.

Keywords $\mathbf{C}^*$-algebras; k-skew commutator; strong k-skew commutativity preserving maps
MR(2010) Subject Classification 46L57, 47B49
Chinese Library Classification O177.2

收稿日期: 2019-09-26; 接受日期: 2020-07-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11001194)

1 引言

设 $\mathscr{A}$ 是 $*$- 环, $A, B \in \mathscr{A}$. A, B 的 skew-Lie 乘积为 ${}_*[A, B] = AB - BA^*$. Skew-Lie 乘积在许多研究领域有着重要的应用 [1, 3, 4]. 例如, 固定 $B \in \mathscr{A}$, 定义可加映射 $\delta : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, $\delta(A) = AB - BA^*$, $\forall\, A \in \mathscr{A}$, 则 $\delta(A^2) = A\delta(A) + \delta(A)A^*$, $\forall\, A \in \mathscr{A}$, δ 是 Jordan $*$- 导子 [4]. 最近一些学者研究强保 skew 交换性的映射, 即 $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 满足 ${}_*[\Phi(A), \Phi(B)] = {}_*[A, B]$, $\forall\, A, B \in \mathscr{A}$. 在文 [1] 中, Cui 和 Park 证明了因子 von Neumann 代数 $\mathscr{A}$ 上的非线性满射 Φ 强保 skew 交换性当且仅当 $\Phi(A) = \Psi(A) + h(A)I, \forall\, A \in \mathscr{A}$, 其中 $\Psi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 是强保 skew 交换性的线性双射, $h : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ 是满足 $h(0) = 0$ 的非线性泛函. 在文 [3] 中, 作者证明了含非平凡对称幂等元和单位元的 $*$- 环 $\mathscr{A}$ 上的非线性满射 Φ 强保 skew 交换性当且仅当 $\Phi(A) = ZA + f(A), \forall\, A \in \mathscr{A}$, 其中 Z 是满足 $Z^2 = I$ 的中心对称元, f 是中心对称元值映射. 对正整数 $k \geq 1$, 侯晋川在文 [6] 中引入了 k-skew 交换子的概念. 对 $A, B \in \mathscr{A}$, A, B 的 k-skew 交换子 ${}_*[A, B]_k$ 递推定义为

$$
{}_*[A, B]_0 = B, \quad {}_*[A, B]_1 = {}_*[A, B] = AB - BA^*, \quad {}_*[A, B]_k = {}_*[A, {}_*[A, B]_{k-1}],
$$

$$
{}_*[A, B]_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i A^{k-i} B (A^*)^i,
$$

其中 $C_k^i = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!}$. 称映射 $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 强保 k-skew 交换性, 若

$$
{}_*[\Phi(A), \Phi(B)] = {}_*[A, B]_k, \quad \forall\, A, B \in \mathscr{A}.
$$

显然, 若 $k = 1$, 强保 k-skew 交换性映射是强保 skew 交换性映射. 在文 [6] 中, 作者证明了含有非平凡对称幂等元的 $*$- 素环 $\mathscr{A}$ 上的满射 Φ 强保 2-skew 交换性的充分必要条件是存在 $\mathscr{A}$ 的扩展中心对称元 $\lambda \in \mathbf{C}_S$, 使得 $\lambda^3 = I$ 且 $\Phi(A) = \lambda A$, $\forall\, A \in \mathscr{A}$. 在文 [2] 中, 作者证明了自伴标准算子代数 $\mathscr{A}$ 上的值域包含所有一秩投影的映射 $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 强保 k-skew 交换性当且仅当 $\Phi(A) = A$, $\forall\, A \in \mathscr{A}$ 或 $\Phi(A) = -A$, $\forall\, A \in \mathscr{A}$. 本文刻画含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数上强保 k-skew 交换性的满射 ($k \geq 2$), 将文 [2] 中的结果推广到含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数上. 注意到, 文 [1–3, 6] 中强保 k-skew 交换性映射的刻画依赖于环或代数的素性, 秩一投影的性质以及谱映射定理, 而 $\mathbf{C}^*$- 代数一般不是素代数, 也不一定含秩一投影, 因此文 [1–3, 6] 中的方法不适用于 $\mathbf{C}^*$- 代数. 为了刻画 $\mathbf{C}^*$- 代数上强保 k-skew 交换性的映射, 必须寻找新的思路和方法.

设 $\mathscr{A}$ 是含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数, 令 $\mathscr{Z}(\mathscr{A}) = \{T \in \mathscr{A}, TA = AT, \forall\, A \in \mathscr{A}\}$ 为 $\mathscr{A}$ 的中心, $\mathscr{Z}_s(\mathscr{A}) = \{A \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}), A^* = A\}$. 令 H 是复 Hilbert 空间, $\mathscr{B}(H)$ 表示 H 上的所有有界线性算子全体构成的代数. 包含单位算子 I 的 C^* 子代数 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(H)$ 是 von Neumann 代数, 若 $\mathscr{A}'' = \mathscr{A}$, 其中 $\mathscr{A}' = \{T \in \mathscr{B}(H), TA = AT, \forall\, A \in \mathscr{A}\}$, $\mathscr{A}'' = \{\mathscr{A}'\}'$. 若 $Z(A) = \mathbb{C}I$, 则称 $\mathscr{A}$ 是因子 von Neumann 代数.

2 主要结论及其证明

本节刻画含单位元 I 的 C^*- 代数上强保 k-skew 交换性的满射. 下面是本文的主要结果.

定理 2.1 设 $\mathscr{A}$ 是含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数, $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 是满射, 则 Φ 强保 k-shew 交换性, 即

$$
{}_*[\Phi(A), \Phi(B)]_k = {}_*[A, B]_k, \quad \forall\, A, B \in \mathscr{A} \tag{2.1}
$$

当且仅当 $\Phi(A) = \Phi(I)A$, $\forall\, A \in \mathscr{A}$, $\Phi(I) \in \mathscr{Z}(\mathscr{A})$, $\Phi(I)^* = \Phi(I)$, $\Phi(I)^{k+1} = I$.

为证明定理 2.1, 我们需要下列引理.

引理 2.2　设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbf{C}^*$- 代数,

(1) 若 $A\in\mathscr{A}, A^*=-A$, 则 ${}_*[A,B]_k=(A\circ B)_k$, 其中 $A\circ B=AB+BA$, $(A\circ B)_k=(A\circ(A\circ B)_{k-1})=\sum_{i=0}^k C_k^i A^{k-i}BA^i$, $\forall B\in\mathscr{A}$.

(2) 若 $A\in\mathscr{A}$, $A^*=-A$, 则 ${}_*[A,B]_k=(-1)^k[B,A]_k$, 其中 $[B,A]=BA-AB$, $[B,A]_k=[[B,A]_{k-1},A]=\sum_{i=0}^k(-1)^iC_k^iA^iBA^{k-i}$, $\forall B\in\mathscr{A}$.

(3) 若 $A,B\in\mathscr{A}$, $A^*=A$, $B^*=B$, 则

$$[B,A]_k^*=\begin{cases}[B,A]_k, & k=2m, \quad m\in\mathbb{N};\\ [B,A]_k, & k=2m-1, \quad m\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

(4) ${}_*[ZA,B]_k=Z^k{}_*[A,B]_k$, $\forall Z\in\mathscr{Z}_s(\mathscr{A})$.

(5) 若 $Z\in\mathscr{Z}_s(\mathscr{A})$, 则 ${}_*[ZA,ZB]_k=Z^{k+1}{}_*[A,B]_k$, $\forall A,B\in\mathscr{A}$.

(6) 对 $A,B\in\mathscr{A}$ 和任意正整数 k,

$${}_*[B,A^*]_k=(-1)^k{}_*[B,A]_k^*=\begin{cases}{}_*[B,A]_k^*, & k=2m, \quad m\in\mathbb{N};\\ -{}_*[B,A]_k^*, & k=2m-1, \quad m\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

(7) 设 $S\in\mathscr{A}$, ${}_*[X,S]_k=0$, $\forall X\in\mathscr{A}$ 当且仅当 $S=0$.

证明　(1)–(4) 显然成立, 下证 (5)–(7).

(5) 若 $Z\in\mathscr{Z}_s(\mathscr{A})$, 对任意的 $A,B\in\mathscr{A}$,

$$\begin{aligned}{}_*[ZA,ZB]_k&=\sum_{i=0}^k(-1)^iC_k^i(ZA)^{k-i}(ZB)((ZA)^*)^i\\&=\sum_{i=0}^k(-1)^iC_k^iZ^{k+1}A^{k-i}B(A^*)^i=Z^{k+1}{}_*[A,B]_k.\end{aligned}$$

(6) 对任意的 $A,B\in\mathscr{A}$, 由

$$\begin{aligned}{}_*[B,A^*]_k&=\sum_{i=0}^k(-1)^iC_k^iB^{k-i}A^*(B^*)^i=\left[\sum_{i=0}^k(-1)^iC_k^iB^iA(B^*)^{k-i}\right]^*\\&=(-1)^k\left[\sum_{i=0}^k(-1)^{k-i}C_k^iB^iA(B^*)^{k-i}\right]^*\xlongequal{t=k-i}(-1)^k\left[\sum_{i=0}^k(-1)^tC_k^tB^{k-t}A(B^*)^t\right]^*\\&=(-1)^k{}_*[B,A]_k^*.\end{aligned}$$

(7) 充分性显然, 下证必要性. 设 $X=\lambda I$, $\overline{\lambda}\neq\lambda$, 则

$$0={}_*[\lambda I,S]_k=\sum_{i=0}^k(-1)^iC_k^i(\lambda I)^{k-i}S((\lambda I)^*)^i=S\sum_{i=0}^k(-1)^iC_k^i\lambda^{k-i}(\overline{\lambda})^iI=(\lambda-\overline{\lambda})^kS,$$

则 $(\lambda-\overline{\lambda})^kSS^*=0$. 因为 $\lambda\neq\overline{\lambda}$, 所以 $SS^*=0$, $S=0$. 证毕.

下面引理是文 [5, 定理 1].

引理 2.3　设 $\mathscr{A}$ 是含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数, $Y,Z\in\mathscr{A}$, $Y^*=-Y$, $Z^*=-Z$, 若 $[[Z,Y],Y]=0$, 则 $[Z,Y]=0$.

引理 2.4　设 $\mathscr{A}$ 是含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数, $Y\in\mathscr{A}$, $Y^*=Y$.

(1) 若 $Z\in\mathscr{A}$, $Z^*=Z$, 且 $[[Z,Y],Y]=0$, 则 $[Z,Y]=0$.

(2) 若 $Z\in\mathscr{A}$, $Z^*=-Z$, 且 $[[Z,Y],Y]=0$, 则 $[Z,Y]=0$.

证明 (1) 因为 $(\mathrm{i}Y)^*=-\mathrm{i}Y$, $(\mathrm{i}Z)^*=-\mathrm{i}Z$, 由 $[[\mathrm{i}Z,\mathrm{i}Y],\mathrm{i}Y]=-i[[Z,Y],Y]$ 和引理 2.3 知, 若 $[[Z,Y],Y]=0$, 则 $[[\mathrm{i}Z,\mathrm{i}Y],\mathrm{i}Y]=0$. 所以 $[\mathrm{i}Z,\mathrm{i}Y]=-[Z,Y]=0$, $[Z,Y]=0$.

(2) 因为 $(\mathrm{i}Y)^*=-\mathrm{i}Y$, 由 $[[Z,\mathrm{i}Y],\mathrm{i}Y]=-[[Z,Y],Y]$, 引理 2.3 及上述类似讨论知结论成立. 证毕.

引理 2.5 设 $\mathscr{A}$ 是含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数, $Y,Z\in\mathscr{A}$, $Y^*=Y$, $Z^*=Z$, 若 $[Z,Y]_k=0$, 则 $[Z,Y]=0$.

证明 当 $k=2$ 时, 则由引理 2.4 (1) 知结论成立.

假设结论对 $k=n-1$ 成立, 则 $k=n$ 时, 若 n 为偶数, 则由

$$([Z,Y]_{n-2})^*=[Z,Y]_{n-2},\quad [Z,Y]_n=[[[Z,Y]_{n-2},Y],Y]=0$$

及引理 2.2 (3) 知 $[[Z,Y]_{n-2},Y],Y]=[Z,Y]_{n-1}=0$, 由归纳假设知 $[Z,Y]=0$. 若 n 为奇数, 由引理 2.2 (3) 知 $([Z,Y]_{n-2})^*=-[Z,Y]_{n-2}$, 再由引理 2.4 (2),

$$[Z,Y]_n=[[[Z,Y]_{n-2},Y],Y]=0$$

及归纳假设知结论成立. 证毕.

引理 2.6 设 $\mathscr{A}$ 是含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数. 若 $S\in\mathscr{A}$, $S^*=S$, 使得 ${}_*[S,X]_k=0$, $\forall X\in\mathscr{A}$, $X^*=X$, 则 $S\in\mathscr{Z}(\mathscr{A})$.

证明 由引理 2.2 (2) 及引理 2.5 知

$${}_*[S,X]_k=(-1)^k[X,S]_k=0,\quad [X,S]_k=0.$$

所以 $[X,S]=0$, $\forall X\in\mathscr{A}$, $X^*=X$. 因此 $S\in\mathscr{Z}(\mathscr{A})$. 证毕.

定理 2.1 的证明 充分性显然. 下证必要性, 分几个断言证之.

断言 1 Φ 是双射.

只需要证明 Φ 是单射.

若 $A,B\in\mathscr{A}$, 使得 $\Phi(A)=\Phi(B)$, 则

$${}_*[\Phi(X),\Phi(A)]_k={}_*[\Phi(X),\Phi(B)]_k,\quad \forall X\in\mathscr{A}.$$

因此 ${}_*[X,A]_k={}_*[X,B]_k$, $\forall X\in\mathscr{A}$. 由引理 2.2 (7) 得 $A=B$.

断言 2 $\Phi(A+B)=\Phi(A)+\Phi(B)$, $\forall A,B\in\mathscr{A}$.

设 $A,B\in\mathscr{A}$, $\forall C\in\mathscr{A}$, 由 ${}_*[C,A+B]_k={}_*[C,A]_k+{}_*[C,B]_k$ 及 (2.1), 得

$$\begin{aligned}&{}_*[\Phi(C),\Phi(A+B)-\Phi(A)-\Phi(B)]_k\\&\quad={}_*[\Phi(C),\Phi(A+B)]_k-{}_*[\Phi(C),\Phi(A)]_k-{}_*[\Phi(C),\Phi(B)]_k\\&\quad={}_*[C,A+B]_k-{}_*[C,A]_k-{}_*[C,B]_k=0.\end{aligned}$$

由 Φ 的满射性和引理 2.2 (7) 得 $\Phi(A+B)=\Phi(A)+\Phi(B)$, $\forall A,B\in\mathscr{A}$.

断言 3 (1) $\Phi(A^*)=\Phi(A)^*$, $\forall A\in\mathscr{A}$;

(2) 若 $A\in\mathscr{A}$, 则 $A^*=A$ 当且仅当 $\Phi(A)^*=\Phi(A)$;

(3) 若 $A\in\mathscr{A}$, 则 $A^*=-A$ 当且仅当 $\Phi(A)^*=-\Phi(A)$.

先证 (1). 设 $A\in\mathscr{A}$, 对任意的 $B\in\mathscr{A}$, 由引理 2.2 (6) 得

$${}_*[\Phi(B),\Phi(A^*)]_k={}_*[B,A^*]_k=(-1)^k{}_*[\Phi(B),\Phi(A)]_k^*={}_*[\Phi(B),\Phi(A)^*]_k.$$

由 Φ 的满射性和引理 2.2 (7) 得 $\Phi(A^*) = \Phi(A)^*$.

(2), (3) 由断言 1, 断言 2 和 (1) 可知结论成立.

断言 4 $\Phi(I) \in \mathscr{Z}_s(\mathscr{A})$.

设 $A \in \mathscr{A}$, $A^* = A$, 则由断言 3 知 $\Phi(A)^* = \Phi(A)$, 因 ${}_*[\Phi(I), \Phi(A)]_k ={}_* [I, A]_k = 0$, $\forall A \in \mathscr{A}$, $A^* = A$ 及引理 2.6 得 $\Phi(I) \in \mathscr{Z}_s(\mathscr{A})$.

断言 5 $\Phi(\mathrm{i}I)^{k+1} = (\mathrm{i}I)^{k+1}$.

注意到 $\Phi(\mathrm{i}I)^* = -\Phi(\mathrm{i}I)$, 则由 ${}_*[\Phi(\mathrm{i}I), \Phi(\mathrm{i}I)]_k = 2^k\Phi(\mathrm{i}I)^{k+1}$, ${}_*[\mathrm{i}I, \mathrm{i}I]_k = 2^k(\mathrm{i}I)^{k+1}$ 及 (2.1) 得 $\Phi(\mathrm{i}I)^{k+1} = (\mathrm{i}I)^{k+1}$.

断言 6 $\Phi(\mathrm{i}I) \in \mathscr{Z}(\mathscr{A})$, $\Phi(I)^{k+1} = I$.

由 $\Phi(\mathrm{i}I)^* = -\Phi(\mathrm{i}I)$ 和断言 4 得

$$ {}_*[\Phi(\mathrm{i}I)^*, \Phi(I)]_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i C_k^i \Phi(\mathrm{i}I)^{k-i}\Phi(I)\Phi((\mathrm{i}I)^*)^i = 2^k\Phi(\mathrm{i}I)^k\Phi(I). \tag{2.2} $$

因此, 由 (2.1), (2.2) 和 ${}_*[\mathrm{i}I, I]_k = 2^k(\mathrm{i}I)^k$ 知 $\Phi(\mathrm{i}I)^k\Phi(I) = (\mathrm{i}I)^k$, 左乘 $\Phi(\mathrm{i}I)$ 且由断言 5 可得

$$ \Phi(\mathrm{i}I) = i\Phi(I) \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}). \tag{2.3} $$

进而 $\mathrm{i}^{k+1}\Phi(I)^{k+1} = \Phi(\mathrm{i}I)^{k+1} = (\mathrm{i}I)^{k+1}$, $\Phi(I)^{k+1} = I$.

断言 7 $\Phi(A) = \Phi(I)A$, $\forall A \in \mathscr{A}$.

定义 $\Psi(A) = \Phi(I)^k\Phi(A)$, $\forall A \in \mathscr{A}$. 由断言 4 和断言 6 得

$$ \begin{aligned} {}_*[\Psi(A), \Psi(B)]_k &={}_* [\Phi(I)^k\Phi(A), \Phi(I)^k\Phi(B)]_k \\ &= \Phi(I)^{k(k+1)}{}_*[\Phi(A), \Phi(B)]_k \\ &={}_* [A, B]_k, \end{aligned} $$

即 Ψ 是强保 k-skew 交换性满射. 因此, 由断言 3 与断言 6 得

$$ \Psi(I) = I, \quad \Psi(\mathrm{i}I)^* = -\Psi(\mathrm{i}I), \quad \Psi(\mathrm{i}I) \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}). \tag{2.4} $$

注意到对任意的 $A \in \mathscr{A}$,

$$ {}_*[\Psi(\mathrm{i}I), \Psi(A)]_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i C_k^i \Psi(\mathrm{i}I)^{k-i}\Psi(A)(\Phi(\mathrm{i}I)^*)^i = 2^k\Psi(\mathrm{i}I)^k\Psi(A), \tag{2.5} $$

${}_*[\Psi(\mathrm{i}I), \Psi(A)]_k ={}_* [(\mathrm{i}I), (A)]_k = 2^k(\mathrm{i}I)^kA$. 因此, 由 (2.4) 与 (2.5) 知 $\Psi(\mathrm{i}I)^k\Psi(A) = (\mathrm{i}I)^kA$. 由 (2.3) 与 (2.4) 得

$$ \Psi(\mathrm{i}I) = i\Psi(I) = \mathrm{i}I, \quad \Psi(\mathrm{i}I)^k = (\mathrm{i}I)^k. $$

所以 $\Psi(A) = A$, $\forall A \in \mathscr{A}$. 因此 $\Phi(A) = \Phi(I)A$, $\forall A \in \mathscr{A}$.

特别地, 若 $\mathscr{Z}(\mathscr{A}) = \mathbb{C}I$, 则由定理 2.1 得 $\Phi(I) = \lambda I$, $\lambda^{k+1} = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 因此

推论 2.7 设 $\mathscr{A}$ 是含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数且 $\mathscr{Z}(\mathscr{A}) = \mathbb{C}I$, 则满射 $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 强保 k-skew 交换性, 即 ${}_*[\Phi(A), \Phi(B)]_k ={}_* [A, B]_k$, $\forall A, B \in \mathscr{A}$ 当且仅当

(1) 若 k 是奇数, $\Phi(A) = A$, $\forall A \in \mathscr{A}$ 或 $\Phi(A) = -A$, $\forall A \in \mathscr{A}$;

(2) 若 k 是偶数, $\Phi(A) = A$, $\forall A \in \mathscr{A}$.

显然 von Neumann 代数是含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数, 由定理 2.1 和推论 2.7 可将文 [1] 的主要结果推广到任意 von Neumann 代数.

推论 2.8 设 $\mathscr{A}$ 是 von Neumann 代数, $\Phi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 是满射, 则 Φ 强保 k-skew 交换性, 即 $_*[\Phi(A),\Phi(B)]_k={}_*[A,B]_k$, $\forall A,B\in\mathscr{A}$ 当且仅当 $\Phi(A)=\Phi(I)A$, $\forall A\in\mathscr{A}$, $\Phi(I)\in\mathscr{Z}(\mathscr{A})$, $\Phi(I)^*=\Phi(I)$, $\Phi(I)^{k+1}=I$. 特别地, 若 $\mathscr{A}$ 是因子 von Neumann 代数, 则满射 $\Phi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 强保 k-skew 交换性当且仅当:

(1) 若 k 是奇数, $\Phi(A)=A$, $\forall A\in\mathscr{A}$ 或 $\Phi(A)=-A$, $\forall A\in\mathscr{A}$;

(2) 若 k 是偶数, $\Phi(A)=A$, $\forall A\in\mathscr{A}$.

注意到 $\mathscr{B}(H)$ 的自伴标准算子代数 $\mathscr{A}$ 是含单位元 I 的 $\mathbf{C}^*$- 代数且 $\mathscr{Z}(\mathscr{A})=\mathbb{C}I$. 因此, 由推论 2.7 可得文 [2, 定理 2.1].

推论 2.9 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}(H)$ 的自伴标准算子代数, $\Phi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 且 Φ 的值域包含所有一秩投影, 则 Φ 强保 k-skew 交换性, 即

$$_*[\Phi(A),\Phi(B)]_k={}_*[A,B]_k,\quad \forall A,B\in\mathscr{A}$$

当且仅当

(1) 当 k 是奇数, $\Phi(A)=A$, $\forall A\in\mathscr{A}$ 或 $\Phi(A)=-A$, $\forall A\in\mathscr{A}$;

(2) 当 k 是偶数, $\Phi(A)=A$, $\forall A\in\mathscr{A}$.

致谢 衷心感谢审稿人的意见和建议.

参考文献

[1] Cui J. L., Park C., Maps preserving strong skew Lie product on factor von Neumann algebra, *Acta Math. Sci.*, 2012, **32**: 531–538.

[2] Hou J. C., Wang W., Strong 2-skew commutativity preserving maps on prime rings with involution, *Bull. Mala. Math. Sci.*, 2019, **42**: 33–49.

[3] Liu L., Strong skew commutativity preserving maps on rings, *Lin. Multilin. Alg.*, 2016, **100**: 78–85.

[4] Semrl P., Jordan $*$-derivations of standard operator algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1994, **120**: 515–519.

[5] Singer I. M., Uniformly continuous representation of Lie groups, *Annals of Math.*, 1952, **56**: 242–247.

[6] Wang W, Hou J. C., Strong k-skew commutativity preserving maps on self-adjoint standard operator algebras, *Acta Math. Sin. Chin. Ser.*, 2017, **60**: 39–52.