第64卷第4期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.64, No.4
2021年7月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES　　Jul., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)04-0529-16　　文献标识码: A

复 Banach 空间 $\ell^p(\Gamma)$ $(1 \le p < \infty)$ 的 Mazur–Ulam 性质

王瑞东　周文乔

天津理工大学理学院 天津 300384
E-mail: wangruidong@tjut.edu.cn; 763868160@qq.com

摘　要　1978 年, Tingley 提出著名的 Tingley 问题 (等距延拓问题), 受到许多学者的重视. 遗憾的是到目前为止, 即使对于二维 Banach 空间, 这个问题仍是一个开问题. 目前的研究主要集中在同类型或不同类型的经典 Banach 空间之间, 并得到了肯定的回答. 本文对复 Banach 空间 $\ell^p(\Gamma)$ $(1 \le p < \infty)$ 与复 Banach 空间 E 之间的 Tingley 问题给出了肯定的回答, 即复 Banach 空间 $\ell^p(\Gamma)$ $(1 \le p < \infty)$ 满足 Mazur–Ulam 性质.

关键词　Tingley 问题; Mazur–Ulam 性质; 复 Banach 空间 $\ell^p(\Gamma)$
MR(2010) 主题分类　46B20
中图分类　O177.2

The Mazur–Ulam Property for Complex Banach Space $\ell^p(\Gamma)$ $(1 \le p < \infty)$

Rui Dong WANG　　Wen Qiao ZHOU

Science of College, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, P. R. China
E-mail: *wangruidong@tjut.edu.cn*; 763868160@*qq.com*

Abstract　The Tingley's Probelm, which is named after the pioneering contribution of Tingley, is also known as the extension problem. It is nowadays a central topic for those researchers working on preservers. Up to the present, no negative counterexample is known and the general problem remains open even for two dimensional Banach spaces. The efforts gave rise to a wide list of positive answers to Tingley's problem for concrete classical Banach spaces and for some classes of Banach spaces. In this paper, we solved the Tingley's problem between the complex Banach spaces $\ell^p(\Gamma)$ $(1 \le p < \infty)$ and complex Banach space E, i.e., we show that the complex Banach spaces $\ell^p(\Gamma)$ $(1 \le p < \infty)$ satisfy the Mazur–Ulam property.

Keywords　Tingley's probelm; Mazur–Ulam property; complex Banach spaces $\ell^p(\Gamma)$
MR(2010) Subject Classification　46B20
Chinese Library Classification　O177.2

收稿日期: 2020-03-20; 接受日期: 2020-07-11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11301384, 11371201, 11201337, 11201338)

1 引言

经典的 Mazur–Ulam 定理是由 Mazur 和 Ulam [25] 在回答 Banach 所提问题时提出的, 它指出两个实赋范空间之间的任意满等距映射都是一个双射仿射变换 (即线性变换的平移), 即两个实赋范线性空间是线性等距的当且仅当它们是 (度量) 等距的.

在 1972 年, Mankiewicz 在文 [24] 中推广了这一结论, 证明了两个实赋范线性空间的开连通或凸体之间的满等距映射能够延拓为全空间中的一个仿射映射. 因此, 在实赋范线性空间的单位球之间的任意满等距映射都能够延拓为全空间中的一个仿射映射, 即两个实赋范线性空间是线性等距的当且仅当它们的单位球是 (度量) 等距的.

1987 年, Tingley [35] 提出了以下问题, 这个问题被称为等距延拓问题或 Tingley 问题.

Tingley 问题 令 X 和 Y 为赋范空间, 且其单位球面为 $S(X)$ 和 $S(Y)$. 设 $f: S(X) \to S(Y)$ 是满等距映射, 那么是否存在一个线性等距 $\widetilde{f}: X \to Y$, 使得 $\widetilde{f}|_{S(X)} = f$ 成立?

目前, 即使对于二维 Banach 空间的问题仍然是开问题. 现在的研究主要集中在同类型或不同类型的经典 Banach 空间之间讨论 Tingley 问题, 并得到了肯定的回答, 定光桂 [10] 总结了这些结论. 程立新和董云柏 [5] 给出了与 Tingley 问题有关的 Mazur–Ulam 性质的概念.

定义 1.1 如果从 X 的单位球面到任意赋范空间 Y 的单位球面的每个满等距映射都可以延拓为从 X 到 Y 的实线性等距, 则称赋范空间 X 有 Mazur–Ulam 性质 (MUP).

易见, 两个复 Banach 空间的单位球之间的满等距不一定能延拓为全空间上的满复线性或共轭线性等距. 例如, 由 $f(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1, \overline{\lambda_2})$ 给出的映射 $f: S(\mathbb{C}\oplus_\infty\mathbb{C}) \to S(\mathbb{C}\oplus_\infty\mathbb{C})$. 显然, f 不能延拓为 $\mathbb{C}\oplus_\infty\mathbb{C}$ 上的复线性或共轭线性等距. 基于这些原因, 大多数研究仅限于实 Banach 空间.

满足 Mazur–Ulam 性质的实赋范空间的例子包括许多经典 Banach 空间, 例如 $c_0(\Gamma)$, $l^\infty(\Gamma)$, $l^p(\Gamma)$ $(1 \le p < \infty)$, $L^p(\mu)$ $(1 \le p \le \infty)$, $C(\Omega)$ (见文 [9, 12, 14, 22, 30, 32]). Kadets 和 Martín 在文 [21] 中证明了有限维多面体 Banach 空间满足 Mazur–Ulam 性质. 谭冬妮, 黄旭剑和刘锐在文 [33] 中证明了 Mazur–Ulam 性质适用于被称为局部 GL 空间的 Banach 空间, 它包含所有 lush 空间, 特别是 $C(K), L^1(\mu), L^\infty(\mu)$ 空间. 关于 lush 空间的特点和例子, 主要见文 [3]. 最近, 本文的第一作者和黄旭剑 [39] 提出了一种用元代数和单位球面的几何性质的新证明方法来研究一些特殊的二维空间 (somewhere-flat 空间) 上的 Mazur–Ulam 性质, 证明了二维 somewhere-flat 空间满足 Mazur–Ulam 性质. Cabello Sánchez [4] 通过证明每一个二维非严格凸实赋范空间满足 Mazur–Ulam 性质推广了该结论.

首先研究两个复 Banach空间的单位球之间的 Tingley问题的是伊继金、王晓晓和王瑞东 [42], 他们给出了肯定的回答, 并证明了任意复 $\ell^p(\Gamma)$ 空间的单位球面到复 $\ell^p(\Delta)$ 空间的单位球面上的满等距映射可以延拓为 $\ell^p(\Gamma)$ 到 $\ell^p(\Delta)$ 的实线性等距映射.

最近, 人们开始关注两个算子代数的单位球面间的等距延拓问题, 并得到了一系列好的结论. Cueto-Avellaneda 和 Peralta 在文 [6] 中证明了当 K 为 Stonean 空间时, 复 $C(K)$ 空间满足 Mazur–Ulam 性质. 他们得到了每个可交换 von Neumann 代数都满足 Mazur–Ulam 性质这一重要的结果. 复零序列的空间 $c_0(\Gamma)$ 满足 Mazur–Ulam 性质已由 Jiménez-Vargas, Morales-Campoy, Peralta 和 Ramírez 在文 [20] 中得到证实. 复 Banach 空间 $\ell_\infty(\Gamma)$ 满足 Mazur–Ulam 性质由 Peralta [27] 给出. 文 [2, 15–18, 26] 给出了一些其他两个算子代数的单位球面之间的等距延拓的结论.

本文将使用一些标准符号. $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 将分别表示实数域和复数域, $\mathbb{T}$ 表示复数 $\mathbb{C}$ 的单位球面, $\Re e(\lambda)$ 和 $\Im m(\lambda)$ 分别表示复数 λ 的实部和虚部. X 是赋范空间, $S(X)$ 表示 X 的单位球面. 设 Γ 是一个指标集, $1 \le p < \infty$, 我们把定义在 Γ 上所有复值函数 x 的空间记为 $\ell^p(\Gamma)$, 且有

$$\|x\| = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |\xi_\gamma|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

这里, 对任意 $\gamma \in \Gamma$, 有 $x = \{\xi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ 且 $\xi_\gamma \in \mathbb{C}$.

令 $e_\gamma = \{(\xi_{\gamma'}) \,|\, \xi_\gamma = 1, \xi_{\gamma'} = 0, 若\ \gamma' \neq \gamma\}, \forall \gamma \in \Gamma$. $x = (\xi_\gamma)$ 的支撑集为 $\{\gamma \in \Gamma \,|\, \xi_\gamma \neq 0\}$, 记为 $\operatorname{supp} x$. 令 $x, y \in \ell^p(\Gamma)$, $x \perp y$ 代表 $\operatorname{supp} x \cap \operatorname{supp} y = \emptyset$.

当 $p = 2$ 时, $\ell^2(\Gamma)$ 是一个 Hilbert 空间. 定光桂首先在文 [7] 中对两个 Hilbert 空间之间的 Tingley 问题给出了肯定的回答. 本文第一作者 [37] 利用赋范空间的凸性模将结果推广到了 Hilbert 空间与赋范空间之间的非满映射. 因此, 复 Banach 空间 $\ell^2(\Gamma)$ 满足 Mazur–Ulam 性质.

本文将证明复 Banach 空间 $\ell^p(\Gamma)$ 满足 Mazur–Ulam 性质, 即从复 Banach 空间 $\ell^p(\Gamma)$ 的单位球面到任意复 Banach 空间 X 的单位球面上的满等距映射可以延拓为从 $\ell^p(\Gamma)$ 到 X 上的实线性等距算子, 其中 $1 \le p < \infty$ 且 $p \neq 2$.

2 复 Banach 空间 $\ell^1(\Gamma)$ 的 Mazur–Ulam 性质

本节, 将证明复 Banach 空间 $\ell^1(\Gamma)$ 满足 Mazur–Ulam 性质. 首先给出一些引理.

引理 2.1 令 $f: S(\ell^1(\Gamma)) \to S(X)$ 是一个满等距映射, 则对任意 $n \in \Gamma$ 和 $\lambda \in \mathbb{T}$, 有 $f(-\lambda e_n) = -f(\lambda e_n)$.

证明 令 $f(x) = -f(\lambda e_n), \forall m \in \Gamma$ 且 $n \neq m$. 因为

$$\|x - e_m\| = \|f(x) - f(e_m)\| = \|f(\lambda e_n) + f(e_m)\| = 2$$

和

$$\|x + e_m\| = \|f(x) - f(-e_m)\| = \|f(\lambda e_n) + f(-e_m)\| = 2$$

成立, 所以 $\operatorname{supp}(x) = \{n\}$. 令 $x = \alpha e_n$, 那么

$$|\alpha - \lambda| = \|\alpha e_n - \lambda e_n\| = \|f(\alpha e_n) - f(\lambda e_n)\| = 2.$$

因此有 $\alpha = -\lambda$, 引理证毕.

引理 2.2 令 $f: S(\ell^1(\Gamma)) \to S(X)$ 是一个满等距映射, 这里 $\alpha \in \mathbb{T}$, $\gamma \in \Gamma$. 如果 $f(x) = \alpha f(e_\gamma)$, 那么有 $x \in \{\alpha e_\gamma, \overline{\alpha} e_\gamma\}$.

更进一步, 如果对某些 $\gamma \in \Gamma$, 我们有 $f(\lambda e_\gamma) = \lambda f(e_\gamma)$ (相应地, 对某些 $\lambda \in \mathbb{T} \backslash \{\pm 1\}$, 有 $f(\lambda e_\gamma) = \overline{\lambda} f(e_\gamma)$), 则对任意 $\mu \in \mathbb{T}$, 有 $f(\mu e_\gamma) = \mu f(e_\gamma)$ (相应地, $f(\mu e_\gamma) = \overline{\mu} f(e_\gamma)$).

证明 令 $x = \sum_{i \in \Gamma} \alpha_i e_i$, 使得 $f(x) = \alpha f(e_\gamma)$ 成立. 对任意的 $m \in \Gamma$, 有

$$|1 - \alpha| = \|f(x) - f(e_m)\| = \sum_{i \neq m} |\alpha_i| + |1 - \alpha_m|$$

和

$$|1 + \alpha| = \|f(x) + f(e_m)\| = \sum_{i \neq m} |\alpha_i| + |1 + \alpha_m|.$$

令 $|\alpha_m|=a$, $\xi=\Re e(\alpha_m)$ 和 $\eta=\Re e(\alpha)$, 则有

$$\begin{cases}(1-a)+\sqrt{(1-\xi)^2+a^2-\xi^2}=\sqrt{(1-\eta)^2+1-\eta^2},\\(1-a)+\sqrt{(1+\xi)^2+a^2-\xi^2}=\sqrt{(1+\eta)^2+1-\eta^2}.\end{cases}$$

因此

$$\begin{cases}(1-a)^2+2(1-a)\sqrt{(1-\xi)^2+a^2-\xi^2}_1+1+a^2-2\xi=2-2\eta,\\(1-a)^2+2(1-a)\sqrt{(1+\xi)^2+a^2-\xi^2}_1+1+a^2+2\xi=2+2\eta.\end{cases}$$

将上面两个等式相加, 我们可以得到

$$\sqrt{(1-\xi)^2+a^2-\xi^2}+\sqrt{(1+\xi)^2+a^2-\xi^2}=2a.$$

令

$$h(\xi)=\sqrt{(1-\xi)^2+a^2-\xi^2}+\sqrt{(1+\xi)^2+a^2-\xi^2},$$

由 $\min_{-a\le\xi\le a}h(\xi)=2\ge 2a$, 我们可以得到 $a=1$. 因此有 $a=\alpha$ 或 $\overline{\alpha}$ 成立.

下面证明最后一步. 首先假设对某些 $\lambda\in\mathbb{T}\backslash\{\pm1\}$ 和 $\mathbb{T}\backslash\mathbb{R}$ 中一个任意元 μ, 有 $f(\lambda e_\gamma)=\lambda f(e_\gamma)$ (相应地, $f(\lambda e_\gamma)=\overline{\lambda}f(e_\gamma)$) 成立. 我们已经证明了 $f(\mu e_\gamma)=\mu f(e_\gamma)$ 或 $f(\mu e_\gamma)=\overline{\mu}f(e_\gamma)$. 下面证明第二种可能性 (相应地, 证明第一种可能性) 是不可能的. 假设 $f(\mu e_\gamma)=\overline{\mu}f(e_\gamma)$ (相应地, $f(\mu e_\gamma)=\mu f(e_\gamma)$). 由假设和引理 2.1, 我们有

$$\begin{aligned}|\lambda+\mu|&=\|\lambda f(e_\gamma)+\mu f(e_\gamma)\|=\|f(\lambda e_\gamma)+f(\overline{\mu}e_\gamma)\|\\&=\|f(\lambda e_\gamma)-f(-\overline{\mu}e_\gamma)\|=\|\lambda e_\gamma+\overline{\mu}e_\gamma\|=|\lambda+\overline{\mu}|\end{aligned}$$

(相应地, $|\lambda+\mu|=\|\lambda f(e_\gamma)+\mu f(e_\gamma)\|=\|f(\overline{\lambda}e_\gamma)+f(\mu e_\gamma)\|=\|\overline{\lambda}e_\gamma+\mu e_\gamma\|=|\overline{\lambda}+\mu|$). 前面的任意一个等式都成立当且仅当

$$2+2\Re e(\lambda\overline{\mu})=|\lambda|^2+|\mu|^2+2\Re e(\lambda\overline{\mu})=|\lambda+\mu|^2=|\lambda+\overline{\mu}|^2=2+2\Re e(\lambda\mu),$$

等价于

$$\Re e(\lambda)\Re e(\mu)+\Im m(\lambda)\Im m(\mu)=\Re e(\lambda)\Re e(\mu)-\Im m(\lambda)\Im m(\mu).$$

因为 $\lambda,\mu\notin\mathbb{R}$, 所以上面的等式是不成立的. 综上, 引理证毕.

令 $f:S(\ell^1(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射. 因此, 我们设

$$\Gamma_1^f:=\{\gamma\in\Gamma: f(\lambda e_\gamma)=\lambda f(e_\gamma),\ \forall\,\lambda\in\mathbb{T}\}$$

和

$$\Gamma_2^f:=\{\gamma\in\Gamma: f(\lambda e_\gamma)=\overline{\lambda}f(e_\gamma),\ \forall\,\lambda\in\mathbb{T}\}.$$

由引理 2.2 可以得到

$$\Gamma=\Gamma_1^f\cup\Gamma_2^f\quad 和\quad \Gamma_1^f\cap\Gamma_2^f=\emptyset.$$

给定 $\gamma\in\Gamma_1^f$ (相应地, $\gamma\in\Gamma_2^f$) 和 $\alpha\in\mathbb{C}$, 定义 $\sigma_\gamma(\alpha)=\alpha$ (相应地, $\sigma_\gamma(\alpha)=\overline{\alpha}$). 由引理 2.2 知

$$f(\lambda e_\gamma)=\sigma_\gamma(\lambda)f(e_\gamma),\quad \forall\,\lambda\in\mathbb{T},\quad \gamma\in\Gamma. \tag{2.1}$$

容易得到 $\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $a\in\mathbb{R}$, $n\in\Gamma$, 我们有

$$\sigma_\gamma(a)=a,\quad \sigma_\gamma(\alpha+\beta)=\sigma_\gamma(\alpha)+\sigma_\gamma(\beta)\quad 和\quad \sigma_\gamma(a\alpha)=a\sigma_\gamma(\alpha)$$

成立.

引理 2.3　令 Y 是一个 Banach 空间, 且 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 是单位球面 $S(Y)$ 的一列元. 如果对任意符号有 $\theta_i=\pm1$ $(1\le i\le n)$, $\|\sum_{i=1}^n\theta_iy_i\|=n$, 那么对任意的 $\{a_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{R}$, 有

$$\Big\|\sum_{i=1}^n a_iy_i\Big\|=\sum_{i=1}^n|a_i|.$$

证明　令 $\{a_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{R}$. 因为对所有符号 $\theta_i=\pm1$ $(1\le i\le n)$, 有 $\{y_i\}_{i=1}^n\in S(Y)$ 和 $\|\sum_{i=1}^n\theta_iy_i\|=n$, 由 Hahn–Banach 定理, 存在 $y^*\in S(Y^*)$, 使得

$$n=y^*\bigg(\sum_{i=1}^n\mathrm{sign}(a_i)y_i\bigg)=\sum_{i=1}^n y^*(\mathrm{sign}(a_i)y_i)\ \text{ 和 }\ y^*(\mathrm{sign}(a_i)y_i)=1,\quad\forall\,1\le i\le n$$

成立. 所以

$$\Big\|\sum_{i=1}^n a_iy_i\Big\|\ge y^*\bigg(\sum_{i=1}^n|a_i|\mathrm{sign}(a_i)y_i\bigg)=\sum_{i=1}^n|a_i|y^*(\mathrm{sign}(a_i)y_i)=\sum_{i=1}^n|a_i|.$$

明显地, 有

$$\Big\|\sum_{i=1}^n a_iy_i\Big\|\le\sum_{i=1}^n|a_i|,$$

所以 $\|\sum_{i=1}^n a_iy_i\|=\sum_{i=1}^n|a_i|$. 证毕.

注 2.4　对任意 $x\in\ell^1(\Gamma)$ 存在一个至多可数子集 Γ_x, 有 $\{n\in\Gamma: x(n)\ne0\}\subseteq\Gamma_x$, $x=\sum_{n\in\Gamma_x}x(n)e_n$, $(x(n))_{n\in\Gamma_x}$ 为 $\ell^1(\Gamma)$ 中的一个序列.

定理 2.5　令 $f:S(\ell^1(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射. 那么, 对每一个 $n_1,\dots,n_k\in\Gamma$ 和每一个 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 且 $\sum_{j=1}^k|\lambda_j|=1$, 我们有

$$f\bigg(\sum_{j=1}^k\lambda_je_{n_j}\bigg)=\sum_{j=1}^k\sigma_{n_j}(\lambda_j)f(e_{n_j}).$$

证明　我们将通过归纳法讨论 k. $k=1$ 的情况是显然的. 当 $k=2$ 时, 因

$$\bigg\|f\bigg(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}e_{n_1}\bigg)\pm f\bigg(\frac{\lambda_2}{|\lambda_2|}e_{n_2}\bigg)\bigg\|=\bigg\|\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}e_{n_1}\pm\frac{\lambda_2}{|\lambda_2|}e_{n_2}\bigg\|=2,$$

由引理 2.3, 有

$$\begin{aligned}\|\sigma_{n_1}(\lambda_1)f(e_{n_1})+\sigma_{n_2}(\lambda_2)f(e_{n_2})\|&=\bigg\||\lambda_1|\sigma_{n_1}\bigg(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\bigg)f(e_{n_1})+|\lambda_2|\sigma_{n_2}\bigg(\frac{\lambda_2}{|\lambda_2|}\bigg)f(e_{n_2})\bigg\|\\&=|\lambda_1|+|\lambda_2|=1.\end{aligned}$$

令 $x=\sum_{i=1}^\infty\alpha_ie_{n_i}\in S(\ell^1(\Gamma))$, 使得 $f(x)=\sigma_{n_1}(\lambda_1)f(e_{n_1})+\sigma_{n_2}(\lambda_2)f(e_{n_2})$ 成立. 因为有

$$\begin{aligned}\bigg\|f(x)-\sigma_{n_1}\bigg(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\bigg)f(e_{n_1})\bigg\|&=\bigg\|\bigg(\sigma_{n_1}\bigg(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\bigg)-\sigma_{n_1}(\lambda_1)\bigg)f(e_{n_1})+\sigma_{n_2}(\lambda_2)f(e_{n_2})\bigg\|\\&=2-2|\sigma_{n_1}(\lambda_1)|\end{aligned}$$

和

$$\bigg\|f(x)-\sigma_{n_1}\bigg(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\bigg)f(e_{n_1})\bigg\|=\bigg|\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}-\alpha_1\bigg|+1-|\alpha_1|\ge2-2|\alpha_1|,\tag{2.2}$$

由上面两个式子得到 $|\alpha_1| \geq |\lambda_1|$. 同样地, 我们可以得到 $|\alpha_2| \geq |\lambda_2|$. 又

$$1 = |\lambda_1| + |\lambda_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| = 1,$$

所以有 $|\alpha_1| = |\lambda_1|$ 和 $|\alpha_2| = |\lambda_2|$ 成立, 并且有

$$\left\| f(x) - \sigma_{n_1}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right) f(e_{n_1}) \right\| = \left| \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} - \alpha_1 \right| + 1 - |\alpha_1| = 2 - 2|\alpha_1|, \tag{2.3}$$

则 $\alpha_1 = \lambda_1$. 同样地, 我们可以得到 $\alpha_2 = \lambda_2$.

假设 $k-1$ 且 $k \geq 3$ 的情况是正确的, 首先证明

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} f\left(\frac{\lambda_j}{|\lambda_j|} e_{n_j}\right) \right\| = k. \tag{2.4}$$

由 $\| \sum_{j=1}^{k-1} f(\frac{\lambda_j}{(k-1)|\lambda_j|} e_{n_j}) + f(\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|} e_{n_k}) \| = 2$ 和引理 2.3, 可知

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{k} f\left(\frac{\lambda_j}{|\lambda_j|} e_{n_j}\right) \right\| &= \left\| (k-1) \sum_{j=1}^{k-1} f\left(\frac{\lambda_j}{(k-1)|\lambda_j|} e_{n_j}\right) + f\left(\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|} e_{n_k}\right) \right\| \\ &= \left\| (k-1) f\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{(k-1)|\lambda_j|} e_{n_j}\right) + f\left(\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|} e_{n_k}\right) \right\| = k. \end{aligned}$$

再一次用引理 2.3, 可得到

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} \sigma_{n_j}(\lambda_j) f(e_{n_j}) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \sigma_{n_j}\left(\frac{\lambda_j}{|\lambda_j|}\right) f(e_{n_j}) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| f\left(\frac{\lambda_j}{|\lambda_j|} e_{n_j}\right) \right\| = \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| = 1.$$

令 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_{n_i} \in S(\ell^1(\Gamma))$, 使得 $f(x) = \sum_{j=1}^{k} \sigma_{n_j}(\lambda_j) f(e_{n_j})$ 成立. 因为

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sigma_{n_1}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right) f(e_{n_1}) \right\| &= \left\| \left(\sigma_{n_1}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right) - \sigma_{n_1}(\lambda_1) \right) f(e_{n_1}) + \sigma_{n_2}(\lambda_2) f(e_{n_2}) \right\| \\ &= 2 - 2|\sigma_{n_1}(\lambda_1)| \end{aligned}$$

和

$$\left\| f(x) - \sigma_{n_1}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right) f(e_{n_1}) \right\| = \left| \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} - \alpha_1 \right| + 1 - |\alpha_1| \geq 2 - 2|\alpha_1|, \tag{2.5}$$

所以 $|\alpha_1| \geq |\lambda_1|$. 同样地, 我们有 $|\alpha_i| \geq |\lambda_i|$ $(2 \leq i \leq k)$. 又

$$1 = \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leq \sum_{j=1}^{k} |\alpha_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| = 1,$$

所以 $|\alpha_i| = |\lambda_i|$ $(1 \leq i \leq k)$. 我们也可以得到

$$\left\| f(x) - \sigma_{n_1}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right) f(e_{n_1}) \right\| = \left| \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} - \alpha_1 \right| + 1 - |\alpha_1| = 2 - 2|\alpha_1|, \tag{2.6}$$

则 $\alpha_1 = \lambda_1$. 同样地, 我们得到 $\alpha_i = \lambda_i$ $(1 \leq i \leq k)$. 证毕.

定理 2.6 复 Banach 空间 $\ell^1(\Gamma)$ 满足 Mazur–Ulam 性质, 即对任意复 Banach 空间 X 和任意满等距映射 $f : S(\ell^1(\Gamma)) \to S(X)$, f 可以延拓为从 $\ell^1(\Gamma)$ 到 X 上的实线性等距算子.

证明 对任意 $x=\sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma e_\gamma\in\ell^1(\Gamma)$, 定义一个映射 $F:\ell^1(\Gamma)\to X$,

$$F(x):=\sum_{\gamma\in\Gamma}\sigma_\gamma(\xi_\gamma)f(e_\gamma).$$

首先证明 F 是定义有效的. 对任意 $x\in\ell^1(\Gamma)$, 因为 $\operatorname{supp}x$ 是 Γ 中的至多可数子集, 则有

$$x=\sum_{n\in\operatorname{supp}x}\xi_n e_n.$$

用 $\mathbb{N}$ 定义 $\operatorname{supp}x$. 我们设 $(\sum_{1\le n\in\operatorname{supp}x}^{m}\sigma_n(\xi_n)f(e_n))_m$ 为一个柯西列. 对任意 $\varepsilon>0$, 因 $x\in\ell^1(\Gamma)$, 则存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得对 $\operatorname{supp}x$ 中的任意 $m>n\ge n_0$, 有 $\sum_{n_0\le n\in\operatorname{supp}x}^{m}|\xi_n|<\varepsilon$. 由定理 2.5 中类似的论证, 我们有

$$\left\|\sum_{n_0\le n\in\operatorname{supp}x}^{m}\sigma_n(\xi_n)f(e_n)\right\|=\sum_{n_0\le n\in\operatorname{supp}x}^{m}|\xi_n|<\varepsilon.$$

因为 $(\sum_{1\le n\in\operatorname{supp}x}^{m}\sigma_n(\xi_n)f(e_n))_m$ 是一个柯西列且 X 是一个 Banach 空间, 则映射 F 是定义有效的, 而且是实线性的. 又

$$\|F(x)\|=\left\|\sum_{\gamma\in\Gamma}\sigma_\gamma(\xi_\gamma)f(e_\gamma)\right\|\le\sum_{\gamma\in\Gamma}|\xi_\gamma|=\|x\|,$$

则有 F 是连续且收缩的.

定理 2.5 表明对每一个 $n_1,\dots,n_k\in\Gamma$ 和每一个 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{C}$, 且 $\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|=1$, 我们有

$$f\Bigg(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e_{n_j}\Bigg)=\sum_{j=1}^{k}\sigma_{n_j}(\lambda_j)f(e_{n_j})=F\Bigg(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e_{n_j}\Bigg).$$

由于有有限支撑的单元集在 $S(\ell^1(\Gamma))$ 中是稠密的, 我们从这个事实推断出 f 和 F 是连续的, 且 $F\mid_{S(\ell^1(\Gamma))}=f$. 证毕.

3 复 Banach 空间 $\ell^p(\Gamma)$ $(1<p<\infty,\ p\ne2)$ 的 Mazur–Ulam 性质

这一节将证明复 Banach 空间 $\ell^p(\Gamma)$ $(1<p<\infty,\ p\ne2)$ 满足 Mazur–Ulam 性质. 下面引理中的不等式在 $\ell^p(\Gamma)$ 称为 Clarkson 不等式, 将在本节中使用.

引理 3.1 对任意 $x,y\in\ell^p(\Gamma)$, 有

(i) $\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\ge2(\|x\|^p+\|y\|^p)$, 当 $2<p<\infty$ 时;

(ii) $\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\le2(\|x\|^p+\|y\|^p)$, 当 $1<p<2$ 时.

如果 (i) 或 (ii) 的等号成立当且仅当 $x\perp y$.

下面的引理是由定光桂 [7] 给出的, 它在研究严格凸赋范空间之间的 Tingley 问题中起着重要的作用.

引理 3.2 [7] 令 X,Y 为 Banach 空间, $f:S(X)\to S(Y)$ 是一个满等距映射. 如果 X 或 Y 是严格凸的, 则 X 和 Y 都是严格凸的且对任意 $x\in S(X)$, $y\in S(Y)$, 有 $f(-x)=-f(x)$, $f^{-1}(-y)=-f^{-1}(y)$ 成立.

引理 3.3 令 X 是复 Banach 空间, $f:S(\ell^p(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射, 则对任意 $n\in\Gamma$, 有 $f(\mathrm{i}e_n)\in\{\mathrm{i}f(e_n),-\mathrm{i}f(e_n)\}$.

证明 因为 f 是满等距映射, 则存在 $x\in S(\ell^p(\Gamma))$, 有 $f(x)=\mathrm{i}f(e_n)$. 令 $x=\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma e_\gamma$, 引理 3.2 表明 $\|f(x)+f(e_n)\|=\|x+e_n\|$ 和 $\|f(x)-f(e_n)\|=\|x-e_n\|$, 故

$$|1+\mathrm{i}|=(|1+\alpha_n|^p+1-|\alpha_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.1}$$

$$|1-\mathrm{i}|=(|1-\alpha_n|^p+1-|\alpha_n|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2}$$

由上面两个等式, 可得 $|1+\alpha_n|=|1-\alpha_n|$, 所以 $\Re e(\alpha_n)=0$.

令 $|\alpha_n|=a\geq 0$, 由 (3.1) 有 $\sqrt{2}=[(1+a^2)^{\frac{p}{2}}+1-a^p]^{\frac{1}{p}}$, 即

$$(1+a^2)^{\frac{p}{2}}+1-a^p=2^{\frac{p}{2}}. \tag{3.3}$$

令 $h(t)=(1+t^2)^{\frac{p}{2}}+1-t^p$, $t\in[0,1]$, 则 $h'(t)=pt((1+t^2)^{\frac{p}{2}-1}-t^{p-2})$.

当 $p>2$ 时, 有 $h'(t)>0$, 所以当 $t\in[0,1]$ 时, 函数 $h(t)$ 是严格增的. 因 $a\in[0,1]$ 和 $h(1)=2^{\frac{p}{2}}$, 由 (3.3) 我们有 $a=|\alpha_n|=1$, 即 $\alpha_n=\pm\mathrm{i}$.

当 $1<p<2$ 时, 有 $h'(t)<0$, 所以当 $t\in[0,1]$ 时, 函数 $h(t)$ 是严格减的. 因 $a\in[0,1]$ 和 $h(1)=2^{\frac{p}{2}}$, 由 (3.3), 我们有 $a=|\alpha_n|=1$, 即 $\alpha_n=\pm\mathrm{i}$.

综上, $f(\mathrm{i}e_n)\in\{\mathrm{i}f(e_n),-\mathrm{i}f(e_n)\}$, 引理证毕.

引理 3.4 令 X 是复 Banach 空间, $f:S(\ell^p(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射, 则对任意的 $\alpha\in\mathbb{T}$, 有 $f(\alpha e_n)\in\{\alpha f(e_n),\overline{\alpha}f(e_n)\}$ 成立.

证明 因 f 是满等距映射, 则存在 $x\in S(\ell^p(\Gamma))$, 使得 $f(x)=\alpha f(e_n)$ 成立. 设 $x=\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma e_\gamma$, 我们只需证 $\alpha_n=\alpha$ 或 $\overline{\alpha}$.

引理 3.2 表明 $\|f(x)+f(e_n)\|=\|x+e_n\|$ 和 $\|f(x)-f(e_n)\|=\|x-e_n\|$, 因此

$$|1+\alpha|=(|1+\alpha_n|^p+1-|\alpha_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.4}$$

$$|1-\alpha|=(|1-\alpha_n|^p+1-|\alpha_n|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.5}$$

由引理 3.3 知 $f(\mathrm{i}e_n)\in\{\mathrm{i}f(e_n),-\mathrm{i}f(e_n)\}$. 不失一般性, 我们假设 $f(\mathrm{i}e_n)=\mathrm{i}f(e_n)$. 由引理 3.3 有

$$\|f(x)+f(\mathrm{i}e_n)\|=\|\alpha f(e_n)+\mathrm{i}f(e_n)\|=|\mathrm{i}+\alpha|$$

和

$$\|f(x)+f(\mathrm{i}e_n)\|=\|x+\mathrm{i}e_n\|=(|\mathrm{i}+\alpha_n|^p+1-|\alpha_n|^p)^{\frac{1}{p}},$$

所以

$$|\mathrm{i}+\alpha|=(|\mathrm{i}+\alpha_n|^p+1-|\alpha_n|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.6}$$

首先, 证明 $|\alpha_n|=1$. 若不然, 假设 $|\alpha_n|=a<1$ 和 $h(t,\theta)=[(1+2t\cos\theta+t^2)^{\frac{p}{2}}+1-t^p]^{\frac{1}{p}}$, 这里 $t\in[0,1]$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

当 $p>2$ 时, 由

$$\frac{\partial h}{\partial\theta}(t,\theta)=[(1+2t\cos\theta+t^2)^{\frac{p}{2}}+1-t^p]^{\frac{1}{p}-1}(1+2t\cos\theta+t^2)^{\frac{p}{2}-1}(-t\sin\theta)<0$$

可知当 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时, 函数 h 对自变量 θ 来说是严格减的.

由

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,\theta)=[(1+2t\cos\theta+t^2)^{\frac{p}{2}}+1-t^p]^{\frac{1}{p}-1}[(1+2t\cos\theta+t^2)^{\frac{p}{2}-1}(t+\cos\theta)-t^{p-1}$$

和

$$\begin{aligned}&(1+2t\cos\theta+t^2)^{\frac{p}{2}-1}(t+\cos\theta)-t^{p-1}\\&\quad=t[(1+2t\cos\theta+t^2)^{\frac{p}{2}-1}-(t^2)^{\frac{p}{2}-1}]+\cos\theta(1+2t\cos\theta+t^2)^{\frac{p}{2}-1}]>0\end{aligned}$$

可知 $\frac{\partial h}{\partial t}(t,\theta)>0$, 当 $t\in[0,1]$ 时, 函数 h 对自变量 t 来说是严格增的.

令 $\alpha=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 和 $\alpha_n=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$. 如果 $\theta_0\in(0,\frac{\pi}{2})$, 由 (3.4) 可知

$$h(1,\theta_0)=h(a,\theta_1).$$

因 $a<1$, $\frac{\partial h}{\partial t}(t,\theta)>0$ 和 $\frac{\partial h}{\partial \theta}(t,\theta)<0$, 所以得到 $|\theta_1|<|\theta_0|$.

由 (3.6) 有

$$h\Big(1,\frac{\pi}{2}-\theta_0\Big)=h\Big(a,\frac{\pi}{2}-\theta_1\Big).$$

因为 $a<1$, $\frac{\partial h}{\partial t}(t,\theta)>0$ 和 $\frac{\partial h}{\partial \theta}(t,\theta)<0$, 所以有 $|\theta_1|>|\theta_0|$, 则得到矛盾, 即 $a=1$.

对于 $\theta_0\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, $\theta_0\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$ 和 $\theta_0\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$, 用相同的证明方法我们可以得到相同的结论. 所以 $a=1$. 由 (3.4) 和 (3.6), 我们可知 $|1+\alpha|=|1+\alpha_n|$ 和 $|\mathrm{i}+\alpha|=|\mathrm{i}+\alpha_n|$ 成立, 即 $\alpha_n=\alpha$. 如果 $f(\mathrm{i}e_n)=-\mathrm{i}f(e_n)$, 同样地, 可以得到 $\alpha_n=\overline{\alpha}$. 综上

$$f(\alpha e_n)\in\{\alpha f(e_n),\overline{\alpha}f(e_n)\}.$$

$1<p<2$ 的情况与 $p>2$ 的情况证明方法是一样的, 并且结论是正确的. 证毕.

引理 3.5 令 X 是一个复 Banach 空间, $f:S(\ell^p(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射. 如果对某些 $n\in\Gamma$, 我们有 $f(\lambda e_n)=\lambda f(e_n)$ (相应地, 对某些 $\lambda\in\mathbb{T}\backslash\{\pm1\}$, 有 $f(\lambda e_n)=\overline{\lambda}f(e_n)$), 则对任意 $\mu\in\mathbb{T}$, 有 $f(\mu e_n)=\mu f(e_n)$ (相应地, $f(\mu e_n)=\overline{\mu}f(e_n)$).

证明 首先, 假设对某些 $\lambda\in\mathbb{T}\backslash\{\pm1\}$ 和 $\mathbb{T}\backslash\mathbb{R}$ 中一个任意元 μ, 有 $f(\lambda e_n)=\lambda f(e_n)$ (相应地, $f(\lambda e_n)=\overline{\lambda}f(e_n)$) 成立. 由引理 3.4, 有 $f(\mu e_n)=\mu f(e_n)$ 或 $f(\mu e_n)=\overline{\mu}f(e_n)$. 下面将证明第二种可能性 (相应地, 证明第一种可能性) 是不可能的. 假设 $f(\mu e_n)=\overline{\mu}f(e_n)$ (相应地, $f(\mu e_n)=\mu f(e_n)$). 由假设和引理 3.2, 有

$$\begin{aligned}|\lambda+\mu|&=\|\lambda f(e_n)+\mu f(e_n)\|=\|f(\lambda e_n)+f(\overline{\mu}e_n)\|\\&=\|f(\lambda e_n)-f(-\overline{\mu}e_n)\|=\|\lambda e_n+\overline{\mu}e_n\|=|\lambda+\overline{\mu}|\end{aligned}$$

(相应地, $|\lambda+\mu|=\|\lambda f(e_n)+\mu f(e_n)\|=\|f(\overline{\lambda}e_n)+f(\mu e_n)\|=\|\overline{\lambda}e_n+\mu e_n\|=|\overline{\lambda}+\mu|$). 前面的任意一个等式都成立当且仅当

$$2+2\Re e(\lambda\overline{\mu})=|\lambda|^2+|\mu|^2+2\Re e(\lambda\overline{\mu})=|\lambda+\mu|^2=|\lambda+\overline{\mu}|^2=2+2\Re e(\lambda\mu)$$

等价于

$$\Re e(\lambda)\Re e(\mu)+\Im m(\lambda)\Im m(\mu)=\Re e(\lambda)\Re e(\mu)-\Im m(\lambda)\Im m(\mu),$$

这是不可能的, 因为 $\lambda,\mu\notin\mathbb{R}$. 证毕.

令 $f:S(\ell^p(\Gamma))\to S(X)$ 是满等距映射. 因此, 设

$$\Gamma_1^f:=\{\gamma\in\Gamma:f(\lambda e_\gamma)=\lambda f(e_\gamma),\ \forall\,\lambda\in\mathbb{T}\}\ \text{ 和 }\ \Gamma_2^f:=\{\gamma\in\Gamma:f(\lambda e_\gamma)=\overline{\lambda}f(e_\gamma),\ \forall\,\lambda\in\mathbb{T}\}.$$

由引理 3.5 有

$$\Gamma=\Gamma_1^f\cup\Gamma_2^f\ \text{ 和 }\ \Gamma_1^f\cap\Gamma_2^f=\emptyset$$

成立. 给定 $\gamma\in\Gamma_1^f$ (相应地, $\gamma\in\Gamma_2^f$) 和 $\alpha\in\mathbb{C}$, 定义 $\sigma_\gamma(\alpha)=\alpha$ (相应地, $\sigma_\gamma(\alpha)=\overline{\alpha}$). 从引理 3.5 可知

$$f(\lambda e_\gamma)=\sigma_\gamma(\lambda)f(e_\gamma),\quad \forall\,\lambda\in\mathbb{T},\quad \gamma\in\Gamma.$$

容易得到 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $a\in\mathbb{R}$, $n\in\Gamma$, 有 $\sigma_\gamma(a)=a$, $\sigma_\gamma(\alpha+\beta)=\sigma_\gamma(\alpha)+\sigma_\gamma(\beta)$ 和 $\sigma_\gamma(a\alpha)=a\sigma_\gamma(\alpha)$ 成立.

下面的引理引用文 [14], 可以很容易地验证这些结果对于复空间也成立, 故我们省略了证明.

引理 3.6 [14] 令 X 是复 Banach 空间, $f:S(\ell^p(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射. 对 $S(\ell^p(\Gamma))$ 中的每对点 x 和 y 且 $x\perp y$ 和每对正实数 a 和 b 且 $a^p+b^p=1$, 定义

$$T_x(ax,by)=f^{-1}\left(\frac{f(ax+by)+f(ax-by)}{2a}\right),$$
$$T_y(ax,by)=f^{-1}\left(\frac{f(ax+by)+f(-ax+by)}{2b}\right).$$

那么有

$$T_x(ax,by)=T_x(bx,ay),\quad T_y(ax,by)=T_y(bx,ay),\quad T_x(ax,by)\perp T_y(ax,by)$$

成立.

引理 3.7 [14] 令 X 是复 Banach 空间, $f:S(\ell^p(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射, 则对任意的 $x\in S(\ell^p(\Gamma))$ 和每对正实数 a 和 b 且 $a^p+b^p=1$, 对任意 $y\in S(\ell^p(\Gamma\setminus\operatorname{supp}x))$, 映射 $y\to T_y(ax,by)$ 是一个 1-Lipschitz 映射, 即

$$\|T_{y_1}(ax,by_1)-T_{y_2}(ax,by_2)\|\le\|y_1-y_2\|,\quad \forall\,y_1,y_2\in S(\ell^p(\Gamma\setminus\operatorname{supp}x)).$$

引理 3.8 [14] 令 $T:S(\ell^p(\Gamma))\to S(\ell^p(\Delta))$ 是一个 1-Lipschitz 映射, 此时 $2<p<\infty$ (Γ,Δ 是两个指标集). 如果对任意的 $x\in S(\ell^p(\Gamma))$, 有 $T(-x)=-T(x)$, 那么对任意 $x,y\in S(\ell^p(\Gamma))$, $x\perp y$, 有 $T(x)\perp T(y)$.

引理 3.9 [14] 令 X 是复 Banach 空间, $f:S(\ell^p(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射, 此时 $1<p<2$, 则对任意的 $x_i\in S(\ell^p(\Gamma))$, $i=0,1,2$ 且 $x_i\perp x_j$, $i\ne j$, $i,j=0,1,2$ 和 $a,b_1,b_2>0$ 且 $a^p+b_1^p+b_2^p=1$, 我们有

$$\begin{aligned}&f^{-1}\left(\frac{f(ax_0+b_1x_1+b_2x_2)+f(-ax_0+b_1x_1-b_2x_2)}{2b_1}\right)\\&\quad\perp f^{-1}\left(\frac{f(ax_0-b_2x_1+b_1x_2)+f(-ax_0+b_2x_1+b_1x_2)}{2b_1}\right).\end{aligned}$$

定理 3.10 令 $T:S(\ell^p(\Gamma))\to S(\ell^p(\Delta))$ 是一个 1-Lipschitz 映射, 此时 $2<p<\infty$. 如果对任意的 $x\in S(\ell^p(\Gamma))$, 有 $T(-x)=-T(x)$, 那么

$$T(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}|\xi_\gamma|T\left(\frac{\xi_\gamma}{|\xi_\gamma|}e_\gamma\right),$$

其中任意 $x=\sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma e_\gamma\in S(\ell^p(\Gamma))$.

证明 对任意 $x=\sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma e_\gamma\in S(\ell^p(\Gamma))$, 根据引理 3.8,

$$T\left(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1}\right)\perp T\left(\frac{\xi_{\gamma_2}}{|\xi_{\gamma_2}|}e_{\gamma_2}\right),\quad \gamma_1\ne\gamma_2,\quad \gamma_1,\gamma_2\in\Gamma,$$

所以可以设

$$T(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} T(x)\Big|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_\gamma}{|\xi_\gamma|}e_\gamma)} + y,$$

这里

$$y = T(x)|_\Lambda, \quad \Lambda = \Delta \setminus \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{supp} T\bigg(\frac{\xi_\gamma}{|\xi_\gamma|}e_\gamma\bigg).$$

对任意 $\xi_{\gamma_1} \neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\bigg\|x - \frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1}\bigg\|^p &= \bigg\|\sum_{\gamma\neq\gamma_1} \xi_\gamma e_\gamma + \bigg(\xi_{\gamma_1} - \frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}\bigg)e_{\gamma_1}\bigg\|^p \\ &= 1 - |\xi_{\gamma_1}|^p + (1 - |\xi_{\gamma_1}|)^p\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\bigg\|T(x) - T\bigg(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1}\bigg)\bigg\|^p \\ &\quad= \bigg\|\sum_{\gamma\neq\gamma_1} T(x)\Big|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_\gamma}{|\xi_\gamma|}e_\gamma)} + y + \bigg(T(x)\Big|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1})} - T\bigg(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1}\bigg)\bigg)\bigg\|^p \\ &\quad= 1 - \big\|T(x)|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1})}\big\|^p + \bigg\|T(x)\Big|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1})} - T\bigg(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1}\bigg)\bigg\|^p \\ &\quad\geq 1 - \big\|T(x)|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1})}\big\|^p + \big(1 - \big\|T(x)|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1})}\big\|\big)^p.\end{aligned} \tag{3.7}$$

因为

$$\bigg\|T(x) - T\left(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1}\right)\bigg\| \leq \bigg\|x - \frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1}\bigg\|,$$

所以有

$$\big(1 - \big\|T(x)|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1})}\big\|\big)^p - \|T(x)|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1})}\|^p \leq (1 - |\xi_{\gamma_1}|)^p - |\xi_{\gamma_1}|^p.$$

函数 $h(t) = (1-t)^p - t^p$ 在 $t \in [0,1]$ 上是严格减的, 这里 $p \in (1,\infty)$. 所以

$$|\xi_{\gamma_1}| \leq \big\|T(x)|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1})}\big\|.$$

等式

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |\xi_\gamma|^p = \|x\|^p = \|T(x)\|^p = \bigg\|\sum_{\gamma\in\Gamma} T(x)\Big|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_\gamma)}\bigg\|^p + \|y\|^p,$$

表明 $y = 0$ 和 $|\xi_\gamma| = \|T(x)|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_\gamma)}\|$ 对任意 $\gamma \in \Gamma$ 都成立. 因此, (3.7) 是一个等式, 这表明

$$\bigg\|T(x)\Big|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1})} - T\bigg(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1}\bigg)\bigg\| = 1 - \big\|T(x)|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1})}\big\|.$$

由 $\ell^p(\Gamma)$ 是严格凸的, 则对任意 $\gamma_1 \in \Gamma$, 都有

$$T(x)|_{\operatorname{supp} T(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1})} = |\xi_{\gamma_1}| T\bigg(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1}\bigg),$$

即

$$T(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}|\xi_\gamma|T\bigg(\frac{\xi_\gamma}{|\xi_\gamma|}e_\gamma\bigg),\ \ \forall\, x=\sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma e_\gamma\in S(\ell^p(\Gamma)).$$

证毕.

引理 3.11 令 X 是复 Banach 空间, $f:S(\ell^p(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射, 此时 $1<p<2$, 则对任意 $x\in S(\ell^p(\Gamma))$ 和 $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$, $\gamma_1\neq\gamma_2$, $\{\gamma_1,\gamma_2\}\cap\operatorname{supp}x=\emptyset$ 和任意 $a,b>0$ 且 $a^p+b^p=1$, 我们有 $T_{e_{\gamma_1}}(ax,be_{\gamma_1})\perp T_{e_{\gamma_2}}(ax,be_{\gamma_2})$.

证明 令引理 3.9 中的 $x_0=x$, $x_1=e_{\gamma_1}$ 和 $x_2=e_{\gamma_2}$, 则我们可以得到结论只需要令 $b_1\to b$ 和 $b_2\to 0$. 证毕.

定理 3.12 令 $T:S(\ell^p(\Gamma))\to S(\ell^p(\Delta))$ 是一个 1-Lipschitz 映射, 此时 $1<p<2$. 如果

$$T(-x)=-T(x),$$

其中

$$x=\sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma e_\gamma\in S(\ell^p(\Gamma)),\ \ T\bigg(\frac{\xi_{\gamma_1}}{|\xi_{\gamma_1}|}e_{\gamma_1}\bigg)\perp T\bigg(\frac{\xi_{\gamma_2}}{|\xi_{\gamma_2}|}e_{\gamma_2}\bigg),\ \ \gamma_1\neq\gamma_2,\ \ \gamma_1,\gamma_2\in\Gamma,$$

则对任意的 $x=\sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma e_\gamma\in S(\ell^p(\Gamma))$, 有

$$T(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}|\xi_\gamma|T\bigg(\frac{\xi_\gamma}{|\xi_\gamma|}e_\gamma\bigg).$$

证明 证明方法与定理 3.10 的证明方法一样, 所以证明省略.

推论 3.13 令 X 是复 Banach 空间, $f:S(\ell^p(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射, 则对任意的 $x\in S(\ell^p(\Gamma))$ 和每对正数 a 和 b 且 $a^p+b^p=1$, 有

$$T_y(ax,by)=\sum_{\gamma\in\Gamma}|\xi_\gamma|T_{\frac{\xi_\gamma}{|\xi_\gamma|}e_\gamma}\bigg(ax,b\frac{\xi_\gamma}{|\xi_\gamma|}e_\gamma\bigg),$$

这里 $y=\sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma e_\gamma\in\ell^p(\Gamma\setminus\operatorname{supp}x)$.

引理 3.14 令 X 是复 Banach 空间, $f:S(\ell^p(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射, 则对任意的 $y\in S(\ell^p(\Gamma))$ 和每对正数 a 和 b 且 $a^p+b^p=1$, 我们有 $\operatorname{supp}T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},by)=\gamma'$, $\forall\,\gamma'\in\Gamma$ 且 $\gamma'\notin\operatorname{supp}y$, 这里 $\xi\in\mathbb{T}$.

证明 首先证明 $\operatorname{supp}T_{\eta e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_\gamma)=\gamma$, 这里 $\gamma'\neq\gamma$, $\eta\in\mathbb{T}$. 假设 $2^{-\frac{1}{p}}\leq b$, 根据 $T_y(ax,by)$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\|T_{\eta e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_\gamma)-\eta e_\gamma\|&=\frac{1}{2b}\,\|f(a\xi e_{\gamma'}+b\eta e_\gamma)+f(-a\xi e_{\gamma'}+b\eta e_\gamma)-2bf(\eta e_\gamma)\|\\&\leq\frac{1}{2b}\big[\big\|f(a\xi e_{\gamma'}+b\eta e_\gamma)-f(\eta e_\gamma)\big\|+b\big\|f(a\xi e_{\gamma'}-b\eta e_\gamma)-f(\eta e_\gamma)\big\|+2(1-b)\big]\\&=\frac{1}{2b}[2b((1-b)^p+a^p)^{\frac{1}{p}}+2(1-b)]=\frac{1}{b}-1+((1-b)^p-b^p+1)^{\frac{1}{p}}\\&\leq 2^{\frac{1}{p}}-1+\bigg(\bigg(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\bigg)-\frac{1}{2}+1\bigg)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1}{p}}-1+\bigg(\frac{(2^{\frac{1}{p}}-1)^p}{2}-\frac{1}{2}+1\bigg)^{\frac{1}{p}}\\&<2^{\frac{1}{p}}-1+\bigg(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\bigg)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1}{p}}(<2).\end{aligned}\tag{3.8}$$

函数 $\varphi(b)=(1-b)^p-b^p$ 在 $[0,1]$ 是严格减的, $\psi(t)=t^{\frac{1}{p}}$ 是严格增的, 此时 $t\in(0,+\infty)$, $1<p<\infty$. 因此, 由 (3.8) 可知 $\gamma\in\operatorname{supp}T_{\eta e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_\gamma)$. 如果不, 则有 $\|T_{\eta e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_\gamma)-\eta e_\gamma\|=2^{\frac{1}{p}}$, 这与 (3.8) 矛盾. 相似地, 我们可以得到

$$\gamma'\in\operatorname{supp}T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},by).$$

根据引理 3.6, 可知 $T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_\gamma)\perp T_{\eta e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_{\gamma_1})$ 和 $\gamma'\in\operatorname{supp}T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_\gamma)$, 所以 $\gamma'\notin\operatorname{supp}T_{\eta e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_\gamma)$. 现在我们只需证明对任意 $\gamma_1\ne\gamma$, 有

$$\gamma_1\notin\operatorname{supp}T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_\gamma).$$

因为 $T_{\eta e_{\gamma_1}}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_{\gamma_1})\perp T_{\eta e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_\gamma)$ 且 $\gamma_1\ne\gamma\ne\gamma'$ 和 $\gamma_1\in\operatorname{supp}T_{\eta e_{\gamma_1}}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_{\gamma_1})$, 则有 $\gamma_1\notin\operatorname{supp}T_{\eta e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_\gamma)$. 因此可以得到

$$\operatorname{supp}T_{\eta e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_\gamma)=\gamma.$$

对任意 $y=\sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma e_\gamma\in S(\ell^p(\Gamma\setminus\gamma'))$, 证明

$$\operatorname{supp}T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},by)=\gamma',$$

因为 $\gamma'\in\operatorname{supp}T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},by)$, 我们只需证明对任意 $\gamma_0\ne\gamma'$, 有 $\gamma_0\notin\operatorname{supp}T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},by)$. 我们将分两种情形来证明.

情形 1 如果有 $\gamma_0\ne\gamma'$ 和 $\gamma_0\in\operatorname{supp}y$, 令 $\eta_\gamma=\frac{\xi_\gamma}{|\xi_\gamma|}$, 由推论 3.13, 有

$$T_y(a\xi e_{\gamma'},by)=\sum_{\gamma\in\Gamma}|\xi_\gamma|T_{\frac{\xi_\gamma}{|\xi_\gamma|}e_\gamma}\bigg(a\xi e_{\gamma'},b\frac{\xi_\gamma}{|\xi_\gamma|}e_\gamma\bigg)=\sum_{\gamma\in\Gamma}|\xi_\gamma|T_{\eta_\gamma e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta_\gamma e_\gamma).$$

引理 3.8 和 3.11 表明 $T_{\eta_{\gamma_1}e_{\gamma_1}}(a\xi e_{\gamma'},b\eta_{\gamma_1}e_{\gamma_1})\perp T_{\eta_{\gamma_2}e_{\gamma_2}}(a\xi e_{\gamma'},b\eta_{\gamma_2}e_{\gamma_2})$ 对任意 $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$, $\gamma_1\ne\gamma_2\ne\gamma'$ 都成立, 因此我们可以得到

$$\operatorname{supp}T_y(a\xi e_{\gamma'},by)=\{\operatorname{supp}T_{\eta_\gamma e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta_\gamma e_\gamma)\,|\,\gamma\in\operatorname{supp}y\}.$$

又

$$\gamma_0\in T_{\eta_{\gamma_0}e_{\gamma_0}}(a\xi e_{\gamma'},b\eta_{\gamma_0}e_{\gamma_0})\subset\{\operatorname{supp}T_{\eta_\gamma e_\gamma}(a\xi e_{\gamma'},b\eta_\gamma e_\gamma)\,|\,\gamma\in\operatorname{supp}y\}=\operatorname{supp}T_y(a\xi e_{\gamma'},by)$$

和 $T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},by)\perp T_y(a\xi e_{\gamma'},by)$ 成立, 所以 $\gamma_0\notin\operatorname{supp}T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},by)$.

情形 2 如果 $\gamma_0\ne\gamma'$ 和 $\gamma_0\notin\operatorname{supp}y$ 成立, 则推论 3.13 表明,

$$T_{b_1y+b_2\eta e_{\gamma_0}}(a\xi e_{\gamma'},b(b_1y+b_2\eta e_{\gamma_0}))=b_1T_y(a\xi e_{\gamma'},by)+b_2T_{\eta e_{\gamma_0}}(a\xi e_{\gamma'},b\eta e_{\gamma_0}),$$

这里 $b_1,b_2>0$ 且 $b_1^p+b_2^p=1$. 情形 1 表明

$$\gamma_0\notin\operatorname{supp}T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},b(b_1y+b_2\eta e_{\gamma_0})).$$

令 $b_1\to1$ 则 $b_2\to0$, 因此 $\gamma_0\notin\operatorname{supp}T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},by)$.

综上, $\operatorname{supp}T_{\xi e_{\gamma'}}(a\xi e_{\gamma'},by)=\gamma'$ 是成立的. 证毕.

定理 3.15 令 $f:S(\ell^p(\Gamma))\to S(X)$ 是一个满等距映射, 那么对任意 $n_1,\dots,n_k\in\Gamma$ 和任意 $\xi_1,\dots,\xi_k\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 且 $\sum_{j=1}^k|\xi_j|^p=1$, 我们有

$$f\bigg(\sum_{j=1}^k\xi_je_{n_j}\bigg)=\sum_{j=1}^k\sigma_{n_j}(\xi_j)f(e_{n_j}).$$

证明 由引理 3.5, $k=1$ 时结论正确. 当 $k>1$ 时, 令 $\eta_{\gamma_i}=\frac{\xi_{\gamma_i}}{|\xi_{\gamma_i}|}$, 由引理 3.14, 存在 $\alpha_{\gamma_1},\ldots,\alpha_{\gamma_k}\in\mathbb{T}$, 有

$$\begin{aligned}
&f\bigg(\sum_{i=1}^{n}\xi_{\gamma_i}e_{\gamma_i}\bigg)\\
&\quad=f\bigg(\sum_{i=1}^{n}|\xi_{\gamma_i}|\eta_{\gamma_i}e_{\gamma_i}\bigg)\\
&\quad=|\xi_{\gamma_1}|\cdot\frac{f(|\xi_{\gamma_1}|\cdot\eta_{\gamma_1}e_{\gamma_{\gamma_1}}+\sum_{i=2}^{n}|\xi_{\gamma_i}|\eta_{\gamma_i}e_{\gamma_i})+f(|\xi_{\gamma_1}|\cdot\eta_{\gamma_1}e_{\gamma_1}-\sum_{i=2}^{n}|\xi_{\gamma_i}|\eta_{\gamma_i}e_{\gamma_i})}{2|\xi_{\gamma_1}|}+|\xi_{\gamma_2}|\\
&\quad\cdot\frac{f(-|\xi_{\gamma_1}|\cdot\eta_{\gamma_1}e_{\gamma_{\gamma_1}}+|\xi_{\gamma_2}|\cdot\eta_{\gamma_2}e_{\gamma_{\gamma_2}}+\sum_{i=3}^{n}|\xi_{\gamma_i}|\eta_{\gamma_i}e_{\gamma_i})+f(|\xi_{\gamma_1}|\cdot\eta_{\gamma_1}e_{\gamma_{\gamma_1}}+|\xi_{\gamma_2}|\cdot\eta_{\gamma_2}e_{\gamma_{\gamma_2}}-\sum_{i=3}^{n}|\xi_{\gamma_i}|\eta_{\gamma_i}e_{\gamma_i})}{2|\xi_{\gamma_2}|}\\
&\qquad+\cdots+|\xi_{\gamma_n}|\cdot\frac{f(|\xi_{\gamma_n}|\cdot\eta_{\gamma_n}e_{\gamma_{\gamma_n}}-\sum_{i=1}^{n-1}|\xi_{\gamma_i}|\eta_{\gamma_i}e_{\gamma_i})+f(|\xi_{\gamma_n}|\cdot\eta_{\gamma_n}e_{\gamma_{\gamma_n}}+\sum_{i=1}^{n-1}|\xi_{\gamma_i}|\eta_{\gamma_i}e_{\gamma_i})}{2|\xi_{\gamma_n}|}\\
&\quad=\sum_{i=1}^{n}|\xi_{\gamma_i}|f(\alpha_{\gamma_i}e_{\gamma_i}).
\end{aligned}$$

当 $1\le i\le n$ 时, 令 $\widetilde{\xi_{\gamma_i}}=|\xi_{\gamma_i}|\sigma_{\gamma_i}(\alpha_{\gamma_i})$, 则 $|\xi_{\gamma_i}|=|\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|$ 是显而易见的. 下面将证明对任意 $1\le i\le n$, 有 $\widetilde{\xi_{\gamma_i}}=\sigma_{\gamma_i}(\xi_{\gamma_i})$.

因为 $\|f(x)+f(e_{\gamma_i})\|=\|x+e_{\gamma_i}\|$ 和 $\|f(x)-f(e_{\gamma_i})\|=\|x-e_{\gamma_i}\|$, 可知

$$|1+\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p+1-|\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p=|1+\xi_{\gamma_i}|^p+1-|\xi_{\gamma_i}|^p, \tag{3.9}$$

$$|1-\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p+1-|\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p=|1-\xi_{\gamma_i}|^p+1-|\xi_{\gamma_i}|^p. \tag{3.10}$$

由 (3.9) 和 (3.10), 得到

$$|1+\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p-|1-\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p=|1+\xi_{\gamma_i}|^p-|1-\xi_{\gamma_i}|^p.$$

假设 $\Re e(\widetilde{\xi_{\gamma_i}})=\alpha$, $\Re e(\xi_{\gamma_i})=\beta$, $|\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|=|\xi_{\gamma_i}|=a\le1$. 由 (3.9) 和 (3.10), 得到

$$\left(1+2\alpha+a^2\right)^{\frac{p}{2}}-\left(1-2\alpha+a^2\right)^{\frac{p}{2}}=\left(1+2\beta+a^2\right)^{\frac{p}{2}}-\left(1-2\beta+a^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

令 $h(t)=\left(1+2t+a^2\right)^{\frac{p}{2}}-\left(1-2t+a^2\right)^{\frac{p}{2}}$, 其中 $t\in[-1,1]$. 因

$$h'(t)=p[(1+2t+a^2)]^{\frac{p}{2}-1}+p[(1-2t+a^2)]^{\frac{p}{2}-1}>0,$$

则函数 $h(t)$ 在 $t\in[-1,1]$ 上是严格增的, 所以 $\alpha=\beta$. 从 $|\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|=|\xi_{\gamma_i}|$, 可知 $\Im m(\widetilde{\xi_{\gamma_i}})=\pm\Im m(\xi_{\gamma_i})$, 即 $\widetilde{\xi_{\gamma_i}}=\xi_{\gamma_i}$ 或 $\overline{\xi_{\gamma_i}}$.

因 $\|f(x)+\sigma_{\gamma_i}(\mathrm{i})f(e_{\gamma_i})\|=\|x+\mathrm{i}e_{\gamma_i}\|$ 和 $\|f(x)-\sigma_{\gamma_i}(\mathrm{i})f(e_{\gamma_i})\|=\|x-\mathrm{i}e_{\gamma_i}\|$, 有

$$|\sigma_{\gamma_i}(\mathrm{i})+\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p+1-|\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p=|\mathrm{i}+\xi_{\gamma_i}|^p+1-|\xi_{\gamma_i}|^p, \tag{3.11}$$

$$|\sigma_{\gamma_i}(\mathrm{i})-\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p+1-|\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p=|\mathrm{i}-\xi_{\gamma_i}|^p+1-|\xi_{\gamma_i}|^p. \tag{3.12}$$

由 (3.11) 和 (3.12), 得到

$$|\sigma_{\gamma_i}(\mathrm{i})+\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p-|\sigma_{\gamma_i}(\mathrm{i})-\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|^p=|\mathrm{i}+\xi_{\gamma_i}|^p-|\mathrm{i}-\xi_{\gamma_i}|^p.$$

我们假设 $\Im m(\widetilde{\xi_{\gamma_i}})=\alpha$, $\Im m(\xi_{\gamma_i})=\beta$, $|\widetilde{\xi_{\gamma_i}}|=|\xi_{\gamma_i}|=a\le1$.

如果 $\sigma_{\gamma_i}(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$, 则由 (3.11) 和 (3.12) 可知

$$\left(1+2\alpha+a^2\right)^{\frac{p}{2}} - \left(1-2\alpha+a^2\right)^{\frac{p}{2}} = \left(1+2\beta+a^2\right)^{\frac{p}{2}} - \left(1-2\beta+a^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

同上, 我们可以得到 $\alpha = \beta$.

如果 $\sigma_{\gamma_i}(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$, 则由 (3.11) 和 (3.12) 可知

$$\left(1-2\alpha+a^2\right)^{\frac{p}{2}} - \left(1+2\alpha+a^2\right)^{\frac{p}{2}} = \left(1+2\beta+a^2\right)^{\frac{p}{2}} - \left(1-2\beta+a^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

所以 $\alpha = -\beta$.

综上, 对任意 $1 \le i \le n$, 都有 $\widetilde{\xi_{\gamma_i}} = \sigma_{\gamma_i}(\xi_{\gamma_i})$ 成立. 证毕.

定理 3.16 复 Banach 空间 $\ell^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty,\ p \neq 2)$ 满足 Mazur–Ulam 性质, 即令 X 为复 Banach 空间, $f : S(\ell^p(\Gamma)) \to S(X)$ 是一个满等距映射, 则 f 可以延拓为从 $\ell^p(\Gamma)$ 到 X 的实线性等距.

证明 对任意 $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma e_\gamma \in \ell^p(\Gamma)$, 定义映射 $F : \ell^p(\Gamma) \to X$,

$$F(x) := \sum_{\gamma\in\Gamma} \sigma_\gamma(\xi_\gamma) f(e_\gamma).$$

根据定理 3.15 和 2.6 中相同的证明方法, 我们可以得到 F 是一个实线性算子且 $F\mid_{S(\ell^p(\Gamma))} = f$, 定理证毕.

致谢 感谢定光桂教授的鼓励与帮助.

参 考 文 献

[1] Alonso J., Benítez C., Some characteristic and non-characteristic properties of inner product spaces, *J. Approx. Theory*, 1988, **55**: 318–325.

[2] Becerra Guerrero J., Cueto-Avellaneda M., Fernández-Polo F. J., et al., On the extension of isometries between the unit spheres of a JBW*-triple and a Banach space, to appear in *J. Inst. Math. Jussieu.*, doi: 10.1017/S1474748019000173, arXiv: 1808.01460.

[3] Boyko K., Kadets V., Martín M., et al., Properties of lush spaces and applications to Banach spaces with numerical index 1, *Studia. Math.*, 2009, **190**: 117–133.

[4] Cabello Sánchez J., A reflection on Tingley's problem and some applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 2019, **476**(2): 319–336.

[5] Cheng L. X., Dong Y. B., On a generalized Mazur–Ulam question: extension of isometries between unit spheres of Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, **377**: 464–470.

[6] Cueto-Avellaneda M., Peralta A. M., The Mazur–Ulam property for commutative von Neumann algebras, *Linear and Multilinear Algebra*, 2020, **68**(2): 337–362.

[7] Ding G. G., The 1-Lipschitz mapping between the unit spheres of two Hilbert spaces can be extended to a real linear isometry of the whole space, *Sci. China Ser. A*, 2002, **45**(4): 479–483.

[8] Ding G. G., The isometric extension problem in the unit spheres of $\ell^p(\Gamma)$ $(p > 1)$ type spaces, *Sci. China Ser. A*, 2003, **46**: 333–338.

[9] Ding G. G., The isometric extension of the into mapping from a $l^\infty(\Gamma)$-type space to some Banach space, *Illinois J. Math.*, 2007, **51**: 445–453.

[10] Ding G. G., On isometric extension problem between two unit spheres, *Sci. China. Ser. A.*, 2009, **52**: 2069–2083.

[11] Dixmier J., Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, *Summa. Brasil. Math.*, 1951, **2**: 151–182.

[12] Fang X. N., Wang J. H., On extension of isometries between the unit spheres of normed space E and $C(\Omega)$, *Acta. Math. Sin. Endl. Ser.*, 2006, **22**: 1819–1824.

[13] Fang X. N., Wang J. H., Extension of isometries between unit spheres of normed space E and $\ell^1(\Omega)$, *Acta. Math. Sinica China Ser.*, 2008, **51**(1): 24–28.

[14] Fang X. N., Wang J. H., Extension of isometries on the unit sphere of $\ell^p(\Gamma)$ space, *Sci. China Math.*, 2010, **53**: 1085–1096.
[15] Fernández-Polo F. J., Jordá E., Peralta A. M., Tingley's problem for p-Schatten von Neumann classes, to appear in *J. Spectr. Theory*, arXiv:1803.00763.
[16] Fernández-Polo F. J., Peralta A. M., On the facial structure of the unit ball in the dual space of a JB*-triple, *Math. Ann.*, 2010, **348**: 1019–1032.
[17] Fernández-Polo F. J., Peralta A. M., Low rank compact operators and Tingley's problem, *Adv. Math.*, 2018, **338**: 1–40.
[18] Fernández-Polo F. J., Peralta A. M., On the extension of isometries between the unit spheres of a C*-algebra and $B(H)$, *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*, 2018, **5**: 63–80.
[19] Gehér Gy P., A contribution to the Aleksandrov conservative distance problem in two dimensions, *Linear Algebra Appl.*, 2015, **481**: 280–287.
[20] Jiménez-Vargas A., Morales-Campoy A., Peralta A. M., et al., The Mazur–Ulam property for the space of complex null sequences, *Linear and Multilinear Algebra*, 2019, **67**(4): 799–816.
[21] Kadets V., Martín M., Extension of isometries between unit spheres of finite-dimensional polyhedral Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, **396**: 441–447.
[22] Liu R., On extension of isometries between unit spheres of $\ell^\infty(\Gamma)$-type space and a Banach space E, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **333**: 959–970.
[23] Liu R., Zhang L., On extension of isometries and approximate isometries between unit spheres, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **352**: 749–761.
[24] Mankiewicz P., On extension of isometries in normed linear spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 1972, **20**: 367–371.
[25] Mazur S., Ulam S., Sur less transformations isométriques despaces vectoriels normés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1932, **194**: 946–948.
[26] Mori M., Ozawa N., Mankiewicz's theorem and the Mazur–Ulam property for C*-algebras, *Studia Math.*, 2020, **250**(3): 265–281.
[27] Peralta A. M., Extending surjective isometries defined on the unit sphere of $\ell_\infty(\Gamma)$, *Revista Matemática Complutense*, 2019, **32**: 99–114.
[28] Ryotaro T., Tingley's problem on symmetric absolute normalized norms on $\mathbb{R}^2$, *Acta. Math. Sin. Endl. Ser.*, 2014, **30**: 1324–1340.
[29] Sakai S., C*-and W*-algebras, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1971.
[30] Tan D. N., Extension of isometries on unit sphere of L^∞, *Taiwanese J. Math.*, 2011, **15**: 819–827.
[31] Tan D. N., On extension of isometries on the unit spheres of L^p spaces for $0 < p \le 1$, *Nonlinear Anal.*, 2011, **74**: 6981–6987.
[32] Tan D. N., Extension of isometries on the unit sphere of L^p-spaces, *Acta. Math. Sin. Endl. Ser.*, 2012, **28**: 1197–1208.
[33] Tan D. N., Huang X. J., Liu R., Generalized-Lush spaces and the Mazur–Ulam property, *Studia Math.*, 2013, **219**: 139–153.
[34] Tan D. N., Liu R., A note on the Mazur–Ulam property of almost-CL-spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **405**: 336–341.
[35] Tingley D., Isometries of the unit spheres, *Geom. Dedicata*, 1987, **22**: 371–387.
[36] Wang R. D., Isometries between normed spaces which are surjective on a sphere, *Illinois J. Math.*, 2009, **53**(2): 575–580.
[37] Wang R. D., On linear extension of 1-Lipschitz mapping from Hilbert space into a normed space, *Acta Mathematica Scientia*, 2010, **30B**(1): 161–165.
[38] Wang R. D., Huang X. J., Isometries and additive mapping on the unit spheres of normed spaces, *Acta Math. Sin. Endl. Ser.*, 2017, **33**(10): 1431–1442.
[39] Wang R. D., Huang X. J., The Mazur–Ulam property for two-dimensional somewhere-flat spaces, *Linear Algebra Appl.*, 2019, **562**: 55–62.
[40] Yang X. Z., On extension of isometries between unit spheres of $L^p(\mu)$ and $L^p(\nu, H)$ $(1 < p \neq 2, H$ is a Hilbert space), *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **322**: 985–992.
[41] Yang X. Z., Zhao X. P., On the extension problems of isometric and nonexpansive mappings, In: Mathematics Without Boundaries, Edited by Themistocles Rassias M and Pardalos Panos M., Springer, New York, 2014: 725–748.
[42] Yi J. J., Wang R. D., Wang X. X., Extension of isometries between the unit spheres of complex $\ell^p(\Gamma)$ $(p > 1)$ spaces, *Acta Mathematica Scientia*, 2014, **34B**(5): 1540–1550.