第65卷第5期　　数学学报中文版　　Vol.65, No.5
2022年9月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES　　Sep., 2022

DOI: 10.12386/A20210044　　**文献标识码: A**

一类无限维完备李代数的 2- 局部齐次导子

黄　杰[1]　王宪栋[2]

1 东营职业学院建筑与环境工程学院 东营 257091
2 青岛大学数学与统计学院 青岛 266101
E-mail: 1062411610@qq.com; wanxd1549@sina.com

摘　要　通过对复数域上单李代数的 Loop 代数进行一维导子扩张, 得到一类无限维完备李代数; 利用其根空间分解及无外导子的性质, 证明了这类无限维完备李代数的 2- 局部齐次导子都是导子.

关键词　无限维完备李代数; 根空间分解; 导子; 2- 局部齐次导子
MR(2010) 主题分类　17B20, 17B40
中图分类　O151.2

The 2-local Homogeneous Derivations of a Class of Infinite Dimensional Complete Lie Algebras

Jie HUANG [1]　Xian Dong WANG [2]

1 *School of Construction and Environmental Engineering, Dongying Vocational Institute, Dongying* 257091*, P. R. China*
2 *School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao* 266101*, P. R. China*
E-mail: 1062411610*@qq.com*; *wanxd*1549*@sina.com*

Abstract　In this paper, a class of infinite dimensional complete Lie algebras is obtained by extending the one dimensional homogeneous derivations of Loop algebras over simple Lie algebras. It is proved that every 2-local homogeneous derivation of this kind of infinite dimensional complete Lie algebra is a derivation.

Keywords　infinite dimensional complete Lie algebras; root space decomposition; derivations; 2-local homogeneous derivations
MR(2010) Subject Classification　17B20, 17B40
Chinese Library Classification　O151.2

1　引言

李代数的导子结构是李代数研究的主要方向之一. 近二十多年来, 许多学者不仅研究了李代数的导子代数, 而且将导子的概念进行推广, 从而提出局部导子和 2- 局部导子的概念.

收稿日期: 2021-03-13; 接受日期: 2021-08-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11472144)

1990 年, Larson 和 Sourour [6] 首次引入局部导子的定义: 设 $\mathscr{A}$ 是结合环或结合代数, $\mathscr{A}$ 上的线性映射 ϕ: $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 称为局部导子, 如果对给定的 $x \in \mathscr{A}$, 存在 $\mathscr{A}$ 的导子 θ_x (依赖于 x), 使得 $\phi(x) = \theta_x(x)$; 局部导子可看成导子的一种推广. 关于李代数的局部导子问题的研究主要集中在局部导子是否为导子, 见文 [1, 3, 9]. 文 [3] 证明了在特征为零的代数闭域上有限维半单李代数的局部导子均为导子, 同时也给出了 (维数 ≥ 3 时) 有限维幂零李代数的局部导子不是导子的例子; 在文 [1] 的基础上, 文 [9] 证明了有限维单李代数的 Borel 子代数的任何局部导子都是导子; 而文 [4] 证明了从 Von Neumann 代数 M 到对偶 Banach M- 双模的每个连续局部导子都是一个导子.

相应于局部导子的概念, 1997 年, Semrl 在文 [7] 中把局部导子定义中的线性条件去掉, 将其中的 "在每个元素处有局部导子" 这一条件加强为 "在任何两个元素处同时有局部导子", 引入了 2- 局部导子的定义. 称 $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ (这里 φ 不一定是线性的) 为 $\mathscr{A}$ 上的 2- 局部导子, 如果对任意的 $x, y \in \mathscr{A}$, 存在一个导子 $\varphi_{x,y} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ (这里 $\varphi_{x,y}$ 依赖于 x 和 y), 使得 $\varphi(x) = \varphi_{x,y}(x)$ 且 $\varphi(y)) = \varphi_{x,y}(y))$. 2- 局部导子是导子概念的非线性推广, 许多学者在不同的算子代数上研究了 2- 局部导子 [2, 3, 7, 8]. 文 [2] 说明了无限维 Von Neumann 代数上的任意 2- 局部导子均为导子; 文 [3] 证明了在特征零的代数闭域上 Witt 代数上的 2- 局部导子都是导子, 并且给出了无限维李代数 2- 局部导子不是导子的例子; 文 [8] 研究了特征零代数闭域上有限维李代数上的 2- 局部导子, 而且证明了半单李代数的 2- 局部导子都是导子, 并给出了维数大于 2 的幂零李代数不是导子的 2- 局部导子的例子. 文 [7] 在无线性和连续的假设下, 证明了若 $\mathscr{H}$ 是无限维可分 Hilbert 空间, $B(\mathscr{H})$ 上的任何 2- 局部导子都是导子.

由此可见, 对李代数的导子概念及其某种推广的讨论已取得丰富的成果, 然而对无限维李代数的情形, 相关的研究成果较少. 本文是在上述已有研究成果的基础上, 对有限维单李代数上 2- 局部导子 [5] 的研究方法和结论进行改进, 研究了在复数域 $\mathbb{C}$ 上有限维单李代数的 Loop 扩张, 再进行一维导子扩张的 2- 局部齐次导子: 通过文 [10] 复有限维单李代数的 Loop 扩张得到 Loop 代数, 再进行一维导子扩张得到无限维完备李代数, 借助于复有限维半单李代数根空间分解, 导出相应无限维李代数的分解式, 进一步通过根空间分解的结论和性质, 证明了此类无限维完备李代数上的 2- 局部齐次导子都是导子.

本文第 2 部分讨论无限维完备李代数的构造过程及相关定义与基本结论; 第 3 部分是本文的主要结果, 将证明前述李代数上的每个 2- 局部齐次导子都是导子.

2 预备知识

设 L=$\mathbb{C}t[t, t^{-1}]$ 是关于 t 的 Laurent 多项式代数, 其元素形如 $P = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k t^k$ (只有有限个非零系数). 通过张量积, 作 Loop 代数 $\tilde{\mathfrak{g}} = L\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$, 其中 $\mathfrak{g}$ 为复有限维单 Lie 代数, 作为向量空间它有基 $\{t^n \otimes h_i, t^m \otimes e_\alpha; m, n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \Phi, i = 1, 2, \dots, l\}$, 其中 Φ 是 $\mathfrak{g}$ 的根系, $h_1, \dots, h_l$ 是相应的 Cartan 子代数 η 的基. 对单项式元素 $f(t) \otimes x$, $g(t) \otimes y \in \tilde{\mathfrak{g}}$, 其李括积如下定义:

$$[f(t) \otimes x, g(t) \otimes y] = f(t)g(t) \otimes [x, y], \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

设 $d = t\frac{d}{dt}$ 是结合代数 L=$\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 的导子, 并扩张为李代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的导子, 使得

$$t\frac{d}{dt}(P \otimes x) = t\frac{dP}{dt} \otimes x.$$

构造李代数 $\hat{\mathfrak{g}}=\tilde{\mathfrak{g}}\oplus\mathbb{C}d$, 它是 $\mathbb{Z}$- 阶化的: $\hat{\mathfrak{g}}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\hat{\mathfrak{g}}_n$, 其中

$$\hat{\mathfrak{g}}_n=\operatorname{span}\{t^n\otimes h_i,\, t^n\otimes e_\alpha,\,\alpha\in\Phi,\, i=1,2,\ldots,l\},\quad n\neq 0;\quad \hat{\mathfrak{g}}_0=\mathfrak{g}+\mathbb{C}d.$$

对 $t^n\otimes e_\alpha+\lambda d, t^m\otimes e_\beta+\mu d\in\hat{\mathfrak{g}}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, 李括积定义为:

$$[t^n\otimes e_\alpha+\lambda d, t^m\otimes e_\beta+\mu d]=t^{n+m}\otimes[e_\alpha,e_\beta]+\lambda m t^m\otimes e_\beta-\mu n t^n\otimes e_\alpha,$$

此时, 向量空间 $\hat{\mathfrak{g}}$ 关于上述括积运算构成复数域上的无限维完备李代数 [10].

零次子空间 $\hat{\mathfrak{g}}_0=\hat{\eta}$ 是 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的可换子代数, 其对偶空间为 $\hat{\eta}^*$, 取 $\delta\in\hat{\eta}^*$, 使得 $\delta(d)=1$, $\delta|_\eta=0$. 此时, $\hat{\mathfrak{g}}=\hat{\eta}\oplus\sum_{a\in\hat{\Delta}}\hat{\mathfrak{g}}_a$ 是根空间分解, 其中 $\hat{\Delta}_R=\{\alpha+n\delta;\,\alpha\in\Phi,\, n\in\mathbb{Z}\}$, $\hat{\Delta}_I=\{n\delta;\, n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$. 当 $a\in\hat{\Delta}_R$ 时, $\dim\hat{\mathfrak{g}}_a=1$, 当 $a\in\hat{\Delta}_I$ 时, $\dim\hat{\mathfrak{g}}_a=l$. 由文 [5] 知, 在单李代数 $\mathfrak{g}$ 中, 若 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Phi$, 则存在结构常数 $N_{\alpha,\beta}\in\mathbb{Z}$, 使得 $[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha,\beta}e_{\alpha+\beta}$, 相应地, 当 $a,b,a+b\in\hat{\Delta}_R$ 时, 有 $[e_a,e_b]=N_{a,b}e_{a+b}$, 其中 $N_{a,b}\in\mathbb{Z}$.

引理 2.1 对任意的李代数 L, 定义一个线性映射 $D:L\to L$, 如果 $\forall x,y\in L$, 都有 $D([x,y])=[D(x),y]+[x,D(y)t)]$, 就称 D 为 L 的导子.

如果有线性映射 $\delta_x:L\to L$, 使 $\delta_x(y))=\mathrm{ad}x(y)t)=[x,y]$, 则 δ_x 为内导子. 将所有的导子空间记作 $\mathrm{Der}(L)$, 所有的内导子空间记为 $\mathrm{Inn}(L)$, 外导子记作 $\mathrm{Der}(L)/\mathrm{Inn}(L)$.

引理 2.2 对阶化李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$, 有 $\mathrm{Der}\hat{\mathfrak{g}}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Der}(\hat{\mathfrak{g}})_n$, 其中

$$\mathrm{Der}(\hat{\mathfrak{g}})_n=\{D\in\mathrm{Der}\hat{\mathfrak{g}}\,|D(\hat{\mathfrak{g}}_m)\subset\hat{\mathfrak{g}}_{n+m};\ \forall m\in\mathbb{Z}\}.$$

为了研究阶化李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的 2- 局部齐次导子, 我们引入下列定义:

定义 2.3 对 $\forall n\in\mathbb{Z}$, 称李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 到其自身的映射 (不一定是线性的) 为 2- 局部 n 次齐次导子, 如果对任意的 $x,y\in\hat{\mathfrak{g}}$ 都能找到 $D_{x,y}\in\mathrm{Der}(\hat{\mathfrak{g}})_n$, 使得 $T(x)=D_{x,y}(x)$, $T(y))=D_{x,y}(y))$.

由于 $\hat{\mathfrak{g}}$ 构成复数域上的无限维完备李代数, $\hat{\mathfrak{g}}$ 的导子都是内导子, 从而 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的 2- 局部 n 次齐次导子 T 可以描述为: 对任意的 $x,y\in\hat{\mathfrak{g}}$, 必存在元素 $a_{x,y}\in\hat{\mathfrak{g}}_n$ (依赖于 x,y), 使得

$$T(x)=[a_{x,y},x],\quad T(y)t)=[a_{x,y},y].$$

3 主要定理及其证明

先给出这章的主要结论:

定理 3.1 设 T 是无限维李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的 2- 局部齐次导子, 则存在元素 $s\in\hat{\mathfrak{g}}$, 使得 $T=\mathrm{ad}s$.

证明上述定理需要以下几个引理:

设 $\{h_j\}_{1\leq j\leq l}$ 是 Cartan 子代数 η 的相对于 Φ 的单根集 $\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq l}$ 的对偶基, 即 $\alpha_i(h_j)=\delta_{ij}$. 令 $h_0=\sum_{k=1}^l t_0^k h_k$, 其中复数 t_0 是次数大于 l 的代数数.

引理 3.2 在 $\hat{\mathfrak{g}}$ 中, 存在元素 $\hat{h}_0=h_0+d\in\hat{\eta}$, 使得对任意的 $a\in\hat{\Delta}$, 都有 $a(\hat{h}_0)\neq 0$.

证明 $\forall a\in\hat{\Delta}_R$, 存在一组整数 $r_1,\ldots,r_l$, 使得 $a=n\delta+\sum_{k=1}^l r_k\alpha_k$, $n\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}a(\hat{h}_0)&=\left(n\delta+\sum_{k=1}^l r_k\alpha_k\right)(h_0+d)=\left(n\delta+\sum_{k=1}^l r_k\alpha_k\right)\left(\sum_{s=1}^l t_0^s h_s+d\right)\\&=n+\sum_{k=1}^l\sum_{s=1}^l r_k t_0^s\alpha_k(h_s)=n+\sum_{k=1}^l r_k t_0^k.\end{aligned}\tag{3.1}$$

因为 t_0 是次数大于 l 的代数数, 故 $a(\hat{h}_0)\neq 0$; $\forall\, a\in\hat{\Delta}_I$, $a=n\delta$, $n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, 有

$$a(\hat{h}_0)=n\delta\,(h_0+d)=n\neq 0. \tag{3.2}$$

由 (3.1), (3.2) 可知, 对任意的 $a\in\hat{\Delta}$, 都有 $a(\hat{h}_0)\neq 0$. 证毕.

引理 3.3 设 $\hat{\eta},\hat{h}_0\in\hat{\eta}$ 如前所述, 若有元素 $x\in\hat{\mathfrak{g}}$, 使得 $[\hat{h}_0,x]=0$, 必有 $x\in\hat{\eta}$.

证明 元素 x 可以写成形式: $x=\hat{h}_x+\sum_{a\in\hat{\Delta}_R}k_ae_a+\sum_{b\in\hat{\Delta}_I}k_be_b$, 则有

$$\begin{aligned}[\hat{h}_0,x]&=\Big[\hat{h}_0,\hat{h}_x+\sum_{a\in\hat{\Delta}_R}k_ae_a+\sum_{b\in\hat{\Delta}_I}k_be_b\Big]=[\hat{h}_0,\hat{h}_x]+\sum_{a\in\hat{\Delta}_R}k_a[\hat{h}_0,e_a]+\sum_{b\in\hat{\Delta}_I}k_b[\hat{h}_0,e_b]\\&=\sum_{a\in\hat{\Delta}_R}k_aa(\hat{h}_0)e_a+\sum_{b\in\hat{\Delta}_I}k_bb(\hat{h}_0)e_b.\end{aligned}$$

由已知条件 $[\hat{h}_0,x]=0$, 可以得到

$$k_aa(\hat{h}_0)=0,\quad k_bb(\hat{h}_0)=0,\quad \forall\, a\in\hat{\Delta}_R,\quad \forall\, b\in\hat{\Delta}_I,$$

应用引理 3.2 的结论, 可得 $a(\hat{h}_0)\neq 0, b(\hat{h}_0)\neq 0$, 从而有 $k_a=k_b=0$, $\forall\, a,b\in\hat{\Delta}$. 证毕.

令 $q=\sum_{i=1}^{l}(h_i\otimes t^n+e_{\alpha_i}\otimes t^m)\in\hat{\mathfrak{g}}$, $m\neq n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

引理 3.4 如果 T 是李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的 2- 局部齐次导子, 那么一定存在元素 $s\in\hat{\mathfrak{g}}$, 使得

$$(T-\mathrm{ad}s)\,(\hat{h}_0)=0,\quad (T-\mathrm{ad}s)\,(q)=0.$$

证明 不妨设导子 T 的次数为 m, 根据 2- 局部齐次导子的定义, 对元素 $\hat{h}_0,q\in\hat{\mathfrak{g}}$, 必存在导子 $D_{\hat{h}_0,q}\in\mathrm{Der}(\hat{\mathfrak{g}})_m$(只和 $\hat{h}_0,q$ 有关), 使得 $T(\hat{h}_0)=D_{\hat{h}_0,q}(\hat{h}_0)$,$T(q)=D_{\hat{h}_0,q}(q)$. 由于 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的导子都是内导子, 又存在元素 $s\in\hat{\mathfrak{g}}_m$, 使得 $D_{\hat{h}_0,q}=\mathrm{ad}s$, 于是

$$(T-\mathrm{ad}s)\,(\hat{h}_0)=T(\hat{h}_0)-D_{\hat{h}_0,q}(\hat{h}_0)=0,\quad (T-\mathrm{ad}s)\,(q)=T(q)-D_{\hat{h}_0,q}(q)=0.$$

记 $T_1=T-\mathrm{ad}s$, 则 T_1 也是李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的 2- 局部齐次导子, 且 $T_1(\hat{h}_0)=T_1(q)=0$. 证毕.

引理 3.5 术语如上, T_1 是李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的 2- 局部 m 次齐次导子, 且 $m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, 对任意的元素 $x\in\hat{\mathfrak{g}}$, 有 $T_1(x)=0$.

证明 令

$$\begin{aligned}x&=\sum_{i=1}^{l}k_ih_i+\mu d+\sum_{a\in\hat{\Delta}_R}k_ae_a+\sum_{b\in\hat{\Delta}_I}k_be_b\\&=\sum_{i=1}^{l}k_ih_i+\mu d+\sum_{\alpha_j\in\hat{\Delta}_R}k_{\alpha_j}e_\alpha\otimes t^j+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{l}k_{i,n}h_i\otimes t^n,\end{aligned}$$

这里 $k_i,\mu,k_a,\ k_b\in\mathbb{C}$, $1\leq i\leq l$, $\alpha_j=j\delta+\alpha\in\hat{\Delta}_R$, $k_{i,n}\in\mathbb{C}$, 且只有有限个非零. 对 $x,\hat{h}_0$ 而言, 存在 $u_1\in\hat{\mathfrak{g}}_m$ 及相应的内导子 $D_{x,\hat{h}_0}=\mathrm{ad}u_1$, 使

$$T_1(x)=D_{x,\hat{h}_0}(x)=[u_1,x]\,,\quad T_1(\hat{h}_0)=D_{x,\hat{h}_0}(\hat{h}_0)=[u_1,\hat{h}_0].$$

又根据引理 3.3 及 3.4, $T_1(\hat{h}_0)=0$, 且 $u_1\in\hat{\eta}$, 这与 $m\neq 0$ 矛盾, 除非 $u_1=0$, $T_1(x)=0$. 证毕.

引理 3.6 术语如上, 若 T_1 是 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的 2- 局部零次导子, 对任意 $a\in\hat{\Delta}$, $k\in\mathbb{C}$, 有 $T_1(ke_a)=0$.

证明 对元素 $ke_a,\hat{h}_0$ 而言, 存在 $u\in\hat{\mathfrak{g}}_0$ 及相应的导子 $D_{ke_a,\hat{h}_0}=\mathrm{ad}u$, 使得

$$T_1(ke_a)=(\mathrm{ad}u)\,(ke_a)=[u,ke_a]\,,\quad T_1(\hat{h}_0)=(\mathrm{ad}u)\,(\hat{h}_0)=[u,\hat{h}_0].$$

根据引理 3.3 及 3.4, $T_1(\hat{h}_0)=0$ 且 $u\in\hat{\eta}$, 于是

$$T_1\left(ke_a\right)=[u,ke_a]=ka(u)e_a. \tag{3.3}$$

对元素 ke_a,q 而言, 又存在 $v\in\hat{\mathfrak{g}}_0$, 使得 $T_1(ke_a)=[v,ke_a]$, $T_1(q)=[v,q]$, 根据引理 3.4, 有 $T_1(q)=[v,q]=0$, 令 $v=\sum_{i=1}^{l}r_ih_i+\lambda d+\sum_{\alpha\in\Phi}r_\alpha e_\alpha\otimes 1$, 对等式 $(\mathrm{ad}v)\,(q)=[v,q]=0$ 两边比较元素 $h_i\otimes t^n$ 和 $e_{\alpha_i}\otimes t^m$ 的系数, 可得

$$r_i=\lambda=0,\quad 1\leq i\leq l,\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

相应地, 有

$$T_1\left(ke_a\right)=[v,ke_a]=\left[\sum_{\alpha\in\Phi}r_\alpha e_\alpha\otimes 1,ke_a\right]. \tag{3.4}$$

再根据 (3.3) 及 (3.4) 式, 可以得到下列式子:

$$ka(u)e_a=\left[\sum_{\alpha\in\Phi}r_\alpha e_\alpha\otimes 1,ke_a\right]. \tag{3.5}$$

当 $a\in\hat{\Delta}_R$ 时, 显然右边 e_a 的系数为 0, 从而 $ka(u)e_a=0$, 于是, $T_1\left(ke_a\right)=ka(u)e_a=0$.

当 $a\in\hat{\Delta}_I$ 时, 令 $e_a=h'\otimes t^j$, $j\in\mathbb{Z}-\{0\}$, 则等式右边为

$$\left[\sum_{\alpha\in\Phi}r_\alpha e_\alpha\otimes 1,k\left(h'\otimes t^j\right)\right]=\sum_{\alpha\in\Phi}k\cdot r_\alpha\cdot\alpha(h')\left(e_\alpha\otimes t^j\right)=\sum_{n_1\in\hat{\Delta}_R}k_{n_1}e_{n_1}.$$

这里系数 $k_{n_1}=k\cdot r_\alpha\cdot\alpha(h')$, 而实根 n_1 形如 $j\delta+\alpha$, 从而根据 (3.5), 得到 $ka(u)e_a=0$. 于是有

$$T_1\left(ke_a\right)=ka(u)e_a=0.$$

证毕.

引理 3.7 术语如前, $\hat{\eta}$ 是 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的可换子代数, $\hat{h}_0\in\hat{\eta}$, T_1 是李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的 2- 局部零次齐次导子, 且满足 $T_1(\hat{h}_0)=0$, 则 T_1 可零化 $\hat{\eta}$, 即 $T_1|_{\hat{\eta}}\equiv 0$.

证明 取定任意元素 $\hat{h}\in\hat{\eta}$, 由于 $\hat{\mathfrak{g}}$ 没有外导子, 根据 2- 局部齐次导子的定义可知, 必存在元素 $z\in\hat{\mathfrak{g}}_0$, 使得

$$T_1(\hat{h})=[z,\hat{h}],\quad T_1(\hat{h}_0)=[z,\hat{h}_0],$$

已知 $T_1(\hat{h}_0)=[z,\hat{h}_0]=0$, 再由引理 3.3 可得 $z\in\hat{\eta}$, 从而有

$$T_1(\hat{h})=[z,\hat{h}]=0.$$

证毕.

引理 3.8 术语如上, T_1 是李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的 2- 局部零次导子, 对任意的 $x\in\hat{\mathfrak{g}}$, 有 $T_1(x)=0$.

证明 令

$$\begin{aligned}x&=\sum_{i=1}^{l}k_ih_i+\mu d+\sum_{a\in\hat{\Delta}_R}k_ae_a+\sum_{b\in\hat{\Delta}_I}k_be_b\\&=\sum_{i=1}^{l}k_ih_i+\mu d+\sum_{\alpha_j\in\hat{\Delta}_R}k_{\alpha_j}e_\alpha\otimes t^j+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{l}k_{i,n}h_i\otimes t^n,\end{aligned}$$

这里 $k_i, \mu, k_a, k_b \in \mathbb{C}$, $1 \le i \le l$, $\alpha_j = j\delta + \alpha$, $k_{i,n} \in \mathbb{C}$, 且只有有限个非零. 对 $x, \hat{h}_0$ 而言, 必存在 $u_1 \in \hat{\mathfrak{g}}_0$ 及相应的内导子 $D_{x,\hat{h}_0} = \mathrm{ad} u_1$, 使

$$T_1(x) = D_{x,\hat{h}_0}(x) = [u_1, x]\,, \quad T_1(\hat{h}_0) = D_{x,\hat{h}_0}(\hat{h}_0) = [u_1, \hat{h}_0].$$

又根据引理 3.3 及引理 3.4, $T_1(\hat{h}_0) = 0$, 且 $u_1 \in \hat{\eta}$, 于是有

$$\begin{aligned}[u_1, x] &= \sum_{a \in \hat{\Delta}_R} k_a a\,(u_1) e_a + \sum_{b \in \hat{\Delta}_I} k_b b\,(u_1)\, e_b \\ &= \sum_{\alpha_j \in \hat{\Delta}_R} k_{\alpha_j} \alpha_j\,(u_1)\, e_\alpha \otimes t^j + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{l} k_{i,n} n\delta\,(u_1) h_i \otimes t^n,\end{aligned}$$

对 $a \in \hat{\Delta}_R$, $b \in \hat{\Delta}_I$, 令 $k_a a(u_1) = k'_a$, $k_b b(u_1) = k'_b$, 有

$$\begin{aligned}T_1(x) = [u_1, x] &= \sum_{a \in \hat{\Delta}_R} k'_a e_a + \sum_{b \in \hat{\Delta}_I} k'_b e_b \\ &= \sum_{\alpha_j \in \hat{\Delta}_R} k'_{\alpha_j} e_\alpha \otimes t^j + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{l} k'_{i,n} h_i \otimes t^n.\end{aligned} \tag{3.6}$$

下面将证明: 对任意的 $a \in \hat{\Delta}_R$, $b \in \hat{\Delta}_I$, 有 $k'_{\alpha_j} = 0$, $k'_{i,n} = 0$.

取一固定的 $\alpha_j = j\delta + \alpha \in \hat{\Delta}_R$, $\forall\, j \in \mathbb{Z}$, 令集合

$$A = \{\beta_i \in \hat{\Delta}_R \,|\, \alpha \ne \beta,\, (\beta - 2\alpha)_i \in \hat{\Delta}_R,\ \forall\, i \in \mathbb{Z}\}.$$

通过计算, 有

$$\begin{aligned}&[[x, e_{-\alpha_{-j}}] e_{-\alpha_{-j}}] \\ &\quad = -2k_{\alpha_j} e_{-\alpha_{-j}} + \sum_{i \ne j} -2k_{\alpha_i} e_{-\alpha_{i-2j}} + \sum_{\beta_i \in A} k_{\beta_i} N_{\beta_i, -\alpha_{-j}} N_{(\beta-\alpha)_{i-j}, -\alpha_{-j}} e_{(\beta-2\alpha)_{i-2j}}.\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}&[[T_1(x), e_{-\alpha_{-j}}] e_{-\alpha_{-j}}] \\ &\quad = -2k'_{\alpha_j} e_{-\alpha_{-j}} + \sum_{i \ne j} -2k'_{\alpha_i} e_{-\alpha_{i-2j}} + \sum_{\beta_i \in A} k'_{\beta_i} N_{\beta_i, -\alpha_{-j}} N_{(\beta-\alpha)_{i-j}, -\alpha_{-j}} e_{(\beta-2\alpha)_{i-2j}},\end{aligned}$$

其中 $e_{-\alpha_{-j}}$ $(\forall\, j \in \mathbb{Z})$ 的系数为 $-2k'_{\alpha_j}$.

另一方面, 对元素 x, $e_{-\alpha_{-j}}$ 而言, $\exists\, y \in \hat{\mathfrak{g}}_0$ 及相应的内导子 $D_{x, e_{-\alpha_{-j}}} = \mathrm{ad} y$, 使

$$T_1(x) = D_{x, e_{-\alpha_{-j}}}(x) = [y, x], \quad T_1(e_{-\alpha_{-j}}) = D_{x, e_{-\alpha_{-j}}}(e_{-\alpha_{-j}}) = [y, e_{-\alpha_{-j}}].$$

根据引理 3.6, 有 $T_1(e_{-a_{-j}}) = 0$. 不妨设元素 y 形如:

$$y = \hat{h} + \sum_{r \in \Phi} k_r e_r \otimes 1,$$

这里 $\hat{h} \in \hat{\eta}$, $k_r \in \mathbb{C}$. 由于

$$T_1(e_{-\alpha_{-j}}) = \left[\hat{h} + \sum_{r \in \Phi} k_r e_r \otimes 1,\, e_{-\alpha_{-j}}\right] = 0,$$

必有 $\alpha_j(\hat{h}) = 0$, 且对任意的 $r \in \Phi$, 若 $r - \alpha_{-j} \in \hat{\Delta}_R$, 则 $k_r = 0$. 再令集合

$$B = \{r \in \hat{\Delta}_R \,|\, r \ne \alpha,\, r - \alpha_m \notin \hat{\Delta}_R\},$$

于是

$$y = \hat{h} + \sum_{r \in B} k_r e_r \otimes 1,$$

通过计算

$$\begin{aligned}[T_1(x), e_{-\alpha_{-j}}] &= [D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}(x), e_{-\alpha_{-j}}] \\ &= D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}([x, e_{-\alpha_{-j}}]) - [x, D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}(e_{-\alpha_{-j}})] \\ &= D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}([x, e_{-\alpha_{-j}}]),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&[[T_1(x), e_{-\alpha_{-j}}], e_{-\alpha_{-j}}] \\ &\quad = [D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}([x, e_{-\alpha_{-j}}]), e_{-\alpha_{-j}}] \\ &\quad = [D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}([x, e_{-\alpha_{-j}}]), e_{-\alpha_{-j}}] + [[x, e_{-\alpha_{-j}}], D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}(e_{-\alpha_{-j}})] \\ &\quad = D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}([[x, e_{-\alpha_{-j}}], e_{-\alpha_{-j}}]) \\ &\quad = D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}\Big(-2k_{\alpha_j} e_{-\alpha_{-j}} + \sum_{i \neq j} -2k_{\alpha_i} e_{-\alpha_{i-2j}} + \sum_{\beta_i \in A} k_{\beta_i} N_{\beta_i, -\alpha_{-j}} N_{(\beta-\alpha)_{i-j}, -\alpha_{-j}} e_{(\beta-2\alpha)_{i-2j}} \Big) \\ &\quad = \sum_{i \neq j} -2k_{\alpha_i} D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}(e_{-\alpha_{i-2j}}) + \sum_{\beta_i \in A} k_{\beta_i} N_{\beta_i, -\alpha_{-j}} N_{(\beta-\alpha)_{i-j}, -\alpha_{-j}} D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}(e_{(\beta-2\alpha)_{i-2j}}).\end{aligned}$$

$\forall\, i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}(e_{-\alpha_{i-2j}}) &= \mathrm{ad}y(e_{-\alpha_{i-2j}}) \\ &= \Big[\hat{h} + \sum_{r \in B} k_r e_r \otimes 1, e_{-\alpha_{i-2j}}\Big] = -\alpha_{i-2j}(\hat{h}) e_{-\alpha_{i-2j}},\end{aligned}$$

由于 $i \neq j$, $D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}(e_{-\alpha_{i-2j}}) \notin \hat{g}_{-\alpha_{-j}}$.

对任意的 $\beta_j \in A$,

$$\begin{aligned}D_{x,e_{-\alpha_{-j}}}(e_{(\beta-2\alpha)_{i-2j}}) &= (\mathrm{ad}y)(e_{(\beta-2\alpha)_{i-2j}}) \\ &= \Big[\hat{h} + \sum_{r \in B} k_r e_r \otimes 1, e_{(\beta-2\alpha)_{i-2j}}\Big] \\ &= \beta_i(\hat{h}) e_{(\beta-2\alpha)_{i-2j}} + \sum_{r \in B} k_r [e_r, e_{(\beta-2\alpha)_{i-2j}}],\end{aligned}$$

其中 $(\beta - 2\alpha)_{i-2j} \neq -\alpha_{-j}$ (否则, $\beta_i = \alpha_{-j}$, 矛盾). 假如 $[e_r, e_{(\beta-2\alpha)_{i-2j}}] \in \hat{\mathfrak{g}}_{-\alpha_{-j}}$, 则 $r + (\beta - 2\alpha)_{i-2j} = -\alpha_{-j}$, 则 $r + (\beta - 2\alpha)_{i-2j} = -\alpha_{-j}$, 设 $r = n_1\delta + \gamma$, $n_1 \in \mathbb{Z}$, $\gamma, \beta \in \Phi$, 那么有

$$\gamma + \beta - 2\alpha = -\alpha, \quad \gamma - \alpha = -\beta,$$

与 $r \in B$ 矛盾. 因此, $\forall\, \beta_i \in A, r \in B$, $e_{-\alpha_{-j}}$ 的系数均为零, 于是, 对任意的 $\alpha_{-j} \in \hat{\Delta}_R$, $[[T_1(x), e_{-\alpha_{-j}}]e_{-\alpha_{-j}}]$ 中 $e_{-a_{-j}}$ 的系数 $-2k'_{\alpha_j}$ 均为零.

那么

$$T_1(x) = [u_1, x] = \sum_{b \in \hat{\Delta}_I} k'_b e_b = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{l} k'_{i,n} h_i \otimes t^n. \tag{3.7}$$

下证对任意的 $b\in\hat{\Delta}_I$, $k'_{i,n}=0$.

对 x,q 而言, 存在 $w\in\hat{\mathfrak{g}}_0$, 使得 $T_1(x)=[v,x]$, $T_1(q)=[w,q]$, 根据引理 3.4,

$$T_1(q)=[w,q]=0.$$

令 $w=\sum_{i=1}^{l}r_ih_i+\mu d+\sum_{\beta\in\Phi}r_\beta e_\beta\otimes 1$, 比较等式 $(\mathrm{ad}w)(q)=[w,q]=0$ 两边比较 $h_i\otimes t^n$ 和 $e_{\alpha_i}\otimes t^m$ 的系数, 可得 $r_i=\mu=0$, $1\le i\le l$, $\mu\in\mathbb{C}$, 相应地,

$$\begin{aligned}T_1(x)&=\Big[\sum_{\beta\in\Phi}r_\beta e_\beta\otimes 1,x\Big]\\&=\Big[\sum_{\beta\in\Phi}r_\beta e_\beta\otimes 1,\sum_{i=1}^{l}k_ih_i+\mu d+\sum_{a\in\hat{\Delta}_R}k_ae_a+\sum_{b\in\hat{\Delta}_I}k_be_b\Big]\\&=\Big[\sum_{\beta\in\Phi}r_\beta e_\beta\otimes 1,\hat{h}+\sum_{\alpha_j\in\hat{\Delta}_R}k_{\alpha_j}e_\alpha\otimes t^j+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{l}k_{i,n}h_i\otimes t^n\Big]\\&=\sum_{\beta\in\Phi}r_\beta\beta(\hat{h})e_\beta+\sum_{\gamma\in\Phi}r_\beta k_{\alpha_j}e_\gamma\otimes t^j+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{l}k_{i,n}\beta(h_i)e_\beta\otimes t^n.\end{aligned}\tag{3.8}$$

比较 (3.7), (3.8), 可得 $k'_{i,n}=0$. 证毕.

现在给出定理 3.1 的证明. 根据引理 3.5 及引理 3.8 的结论, 对任意元素 $x\in\hat{\mathfrak{g}}$, 都有

$$T_1(x)=0.$$

从而有 $T_1\equiv 0$. 因此 $T=\mathrm{ad}s$.

参考文献

[1] Ayupov S., Kudaybergenov K., Local derivations on finite-dimensional Lie algebras, *Linear Algebra and Its Applications*, 2015, **493**: 381–398.

[2] Ayupov S., Kudaybergenov K., 2-local derivations on von Neumann algebras, *Positivity*, 2015, **19**(3): 445–455.

[3] Ayupov S., Yusupov B., 2-local derivations on infinite-dimensional Lie algebras, arXiv: 1901.04261.

[4] Kadison R., Local derivations, *Journal of Algebra*, 1990, **130**(2): 494–509

[5] Lai X., Chen Z. X., 2-local derivations of finite dimensional simple Lie algebras, *Acta. Math. Sin. Chin. Ser.*, 2015, **58**(5): 847–852.

[6] Larson D. R., Sourour A. R., Local derivations and local automorphisms of $B(X)$, *Proc. Sympos. Pure Math. Part Providence Rhode Island*, 1988, **51**: 187–194.

[7] Semrl P., Local automorphisms and derivations on beta(H), *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1997, **125**(9): 2677–2680.

[8] Shavkat A., Karimbergen K., Isamiddin R., 2-local derivations on finite-dimensional Lie algebras, *Linear Algebra and Its Applications*, 2015, **474**: 1–11.

[9] Yu Y. L., Chen Z. X., Local derivations on Borel subalgebras of finite-dimensional simple Lie algebras, *Communications in Algebra*, 2020, **48**(1): 1–10.

[10] Zhu L. S., Meng D. J., Some infinite-dimensional complete Lie algebras (in Chinese), *Chinese Annals of Mathematics, Series A*, 2000, **21**(3): 311–316.