第64卷第3期 数学学报中文版 Vol.64, No.3
2021年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES May, 2021

文章编号: 0583-1431(2021)03-0493-08 **文献标识码:** A

Hankel 算子的乘积与有限秩算子

李永宁 丁宣浩

重庆工商大学数学与统计学院 重庆 400067
经济社会应用统计重庆市重点实验室 重庆 400067
E-mail: yongningli@ctbu.edu.cn, dingxuanhao@ctbu.edu.cn

摘 要 设 $f, g, u \in \bigcap_{q>1} H^q$, $H_{\bar{f}}, H_{\bar{g}}, H_{\bar{u}}$ 均为通常的单位圆盘上的 Hardy 空间 H^2 到 H^2 上的 Hankel 算子. 本文完全刻画了 Hardy 空间上的三个 Hankel 算子的乘积 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}$ 是有限秩的充要条件, 并给出了两个不平凡的例子. 而且, 我们利用本文的主要结果刻画了模型空间上有限秩的截断 Toeplitz 算子.

关键词 Hardy 空间; Hankel 算子; 截断 Toeplitz 算子
MR(2010) 主题分类 47B35
中图分类 O177.1

The Product of Hankel Operators and the Finite Rank Operators

Yong Ning LI Xuan Hao DING

Chongqing Technology and Business University, College of Mathematics and Statistics, Chongqing 400067*, P. R. China*
Chongqing Key Laboratory of Social Economic and Applied Statistics, Chongqing 400067*, P. R. China*
E-mail: *yongningli@ctbu.edu.cn*; *dingxuanhao@ctbu.edu.cn*

Abstract Suppose $f, g, u \in \bigcap_{q>1} H^q$, $H_{\bar{f}}, H_{\bar{g}}, H_{\bar{u}}$ are Hankel operators from the usual Hardy space of unit disk H^2 to H^2. In this paper, we completely characterize when the product of three Hankel operators $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}$ on Hardy space has finite rank property, and we also give two nontrivial examples. Moreover, we describe the finite rank property of truncated Toeplitz operators defined on the model space.

Keywords Hardy spaces; Hankel operators; truncated Toeplitz operators
MR(2010) Subject Classification 47B35
Chinese Library Classification O177.1

1 引言

在本文中, $\mathbb{D}$ 和 $\partial\mathbb{D}$ 分别表示复平面中的单位开圆盘和单位圆周. 记 L^2 为单位圆周 $\partial\mathbb{D}$ 上

收稿日期: 2020-08-30; 接受日期: 2020-11-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11871122);
重庆市自然科学基金 (cstc2018jcyjAX0595, cstc2020jcyj-msxmX0318); 重庆工商大学基金 (2053010)
通讯作者: 丁宣浩

的 Lebesgue 平方可积函数全体, L^∞ 为单位圆周上的本性有界的可测函数全体. 定义 Hardy 空间 H^2 为由 L^2 中的解析多项式线性张成的闭子空间, H^∞ 为单位开圆盘上的有界解析函数全体.

设 P 为从 L^2 到 H^2 上的正交投影算子. 对 $f\in L^\infty$, 从 H^2 到 H^2 上的符号为 f 的 Toeplitz 算子 T_f 和 Hankel 算子 H_f 分别定义为:

$$T_f x = P(fx),\ \ \forall x\in H^2,\ \ H_f x = P(Ufx),\ \ \forall x\in H^2,$$

这里, $U: L^2\to L^2$ 为酉算子, 且定义为

$$Uh(w)=\bar{w}\widetilde{h(w)},\ \ \forall h\in L^2,$$

此处, $\widetilde{h(w)}=h(\bar{w})$. 实际上, U 将 H^2 中的函数映射到 $(H^2)^\perp$ 中, 且 U 具有下述重要的性质:

$$UP=(I-P)U.$$

简单验证可知

$$H_f^* = H_{f^*},$$

这里, $f^*(w)=\bar{f}(\bar{w})$.

容易知道, 上述定义的 Hankel 算子在 Hardy 空间的一组标准正交基 $\{1,z,z^2,\dots,z^n,\dots\}$ 上的矩阵表示是一个 Hankel 矩阵, 即每条逆对角线上的元素都相等的矩阵. Hankel 算子的定义方式并不唯一, 另一种常见的 Hankel 算子 $\hat{H}_f$ 定义为从 H^2 到 $(H^2)^\perp$ 且由下式给出:

$$\hat{H}_f x=(I-P)(fx),\ \ \forall x\in H^2.$$

经过直接计算可知其伴随算子 $\hat{H}_f^*: (H^2)^\perp\to H^2$ 为

$$\hat{H}_f^* y = P(\bar{f}y),\ \ \forall y\in (H^2)^\perp.$$

易知上述所定义的两种 Hankel 算子之间有如下关系:

$$H_f = U\hat{H}_f,$$

从而 $H_f^* = H_{f^*} = \hat{H}_{\bar{f}}^* U$.

定义对偶 Toeplitz 算子 $S_f: (H^2)^\perp\to(H^2)^\perp$ 为

$$S_f y = (I-P)(fy),\ \ \forall y\in (H^2)^\perp.$$

则 L^2 上的乘法算子 M_f 在分解 $L^2=H^2\oplus(H^2)^\perp$ 下可以表示为如下的矩阵:

$$M_f=\begin{pmatrix} T_f & \hat{H}_{\bar{f}}^* \\ \hat{H}_f & S_f \end{pmatrix}.$$

由于 $M_{fg}=M_fM_g$, 我们可得下述式子:

$$T_{fg}=T_fT_g+\hat{H}_{\bar{f}}^*\hat{H}_g, \tag{1.1}$$

$$\hat{H}_{fg}=\hat{H}_fT_g+S_f\hat{H}_g, \tag{1.2}$$

$$\hat{H}_{\overline{fg}}^*=T_f\hat{H}_{\bar{g}}^*+\hat{H}_{\bar{f}}^*S_g, \tag{1.3}$$

$$S_{fg}=S_fS_g+\hat{H}_f\hat{H}_{\bar{g}}^*. \tag{1.4}$$

根据两类 Hankel 算子之间的联系以及等式 (1.1) 与 (1.2) 可得:

$$T_{fg}=T_fT_g+H_{\tilde{f}}H_g, \tag{1.5}$$

$$H_{fg}=H_fT_g+T_{\tilde{f}}H_g. \tag{1.6}$$

如果 $g \in H^\infty$, 由于 $H_g = 0$, 从而等式 (1.6) 给出:

$$T_{\tilde{g}} H_f = H_{fg} = H_f T_g. \tag{1.7}$$

在 Hardy 空间上, 有限秩的 Toeplitz 算子只有零算子 [17]. 1964 年, Brown 和 Halmos [5] 证明了: 两个有界符号的 Toeplitz 算子的乘积为零, 那么其中一个 Toeplitz 算子一定为零算子. 因此, 很自然的一个问题是: 有限多个 Toeplitz 算子的乘积为零, 是否当且仅当其中至少有一个 Toeplitz 算子为零算子? 这是著名的 Toeplitz 算子的零积问题, 该问题在提出后的 40 多年里一直是个公开问题, 直到 2009 年被 Aleman 和 Vukotić [2] 完全解决. 他们给出了肯定的回答并聪明地证明了该结论. Toeplitz 算子乘积的有限秩问题和 Toeplitz 算子的零积问题是密切相关的. 郭坤宇 [13] 在 1996 年证明了 5 个 Toeplitz 算子的零积问题, 并且他指出同样的方法可以证明: 5 个 Toeplitz 算子的乘积是有限秩算子, 则其中至少有一个 Toeplitz 算子为零算子. 值得一提的是, 2000 年, Gu [12] 拓展了郭坤宇的结果, 肯定地回答了 6 个 Toeplitz 算子的零积问题.

作为与 Toeplitz 算子密切相关的一类算子, Hankel 算子的有限秩性质及其乘积的有限秩问题受到了学者们的极大关注. 但是 Hankel 算子及其乘积的有限秩情况和 Toeplitz 算子的情形大不相同. Kronecker 定理 [14] 完全刻画了有限秩的 Hankel 算子.

定理 1.1 (Kronecker 定理) 若 $f \in L^\infty$, 则 H_f 是有限秩算子当且仅当存在某个解析函数 $h(z)$ 和有理函数 $r(z)$, 使得 $f = h + r$.

该结果表明存在大量的非零的有限秩的 Hankel 算子. 设 $f = f_+ + f_-$, 这里, $f_+ = Pf$, $f_- = (I-P)f$. 实际上, Kronecker 定理下述形式的等价定理也经常被用到:

定理 1.2 [14] 设 $f \in L^\infty$, 则 H_f 是有限秩算子的充要条件是存在非零的解析多项式 $p(z)$, 使得 pf_- 是解析函数.

设 $f_1, f_2, f_3 \in L^\infty$. 对于两个 Hankel 算子的乘积, Axler, Chang 和 Sarason [1] 得到: $H_{\widetilde{f_1}} H_{f_2}$ 是有限秩的当且仅当 $H_{\widetilde{f_1}}$ 或者 H_{f_2} 是有限秩的. Xia 和 Zheng 在文 [16] 中给出了 $H_{f_1}, H_{f_2}, H_{f_3}$ 均不是零算子, 但是 $H_{f_1} H_{f_2} H_{f_3} = 0$ 的例子, 而且还证明了 $H_{f_{\sigma(1)}} H_{f_{\sigma(2)}} H_{f_{\sigma(3)}} = 0$ 当且仅当要么 $H_{f_1} = 0$, 要么 $H_{f_2} = 0$, 要么 $H_{f_3} = 0$, 这里 σ 表示集合 $\{1,2,3\}$ 的任意置换. 最近, Ding 和 Sang [8] 得到: $H_{f_1} H_{f_2} H_{f_3} = 0$ 的充要条件是存在常数 λ, 使得 $(\overline{f_{2-}^*} - \lambda) f_{1-}$, $(\overline{f_{2-}^*} - \lambda) f_{3-}$ 和 $(\overline{f_{2-}^*} - \lambda) f_{1-} f_{3-}$ 均是解析函数, 这里 $f_{i-} = (I-P) f_i$, $i = 1,2,3$. Xia 和 Zheng [16] 与 Ding 和 Sang [8] 的结果表明: 三个 Hankel 算子任意次序的乘积的性质与某个顺序乘积的性质刻画大不相同. 1999 年, Gu [11] 研究了三个 Hankel 算子任意次序的乘积均为有限秩的问题, 得到了: $H_{f_{\sigma(1)}} H_{f_{\sigma(2)}} H_{f_{\sigma(3)}}$ 对任意的置换 σ 都是有限秩算子的充要条件是要么 H_{f_1}, 要么 H_{f_2}, 要么 H_{f_3} 为有限秩算子. 但是关于某种次序的三个 Hankel 算子的乘积是有限秩的刻画, 至今仍是空白. 受到上述研究的启发, 本文主要研究了三个 Hankel 算子给定次序的乘积是有限秩的问题, 给出了 $H_{\bar{f}} H_{\bar{g}} H_{\bar{u}}$ 是有限秩的一些充分和必要条件, 这里 $f, g, u \in \bigcap_{q>1} H^q$, 并分别举出两个不平凡的例子加以说明本文的主要结果. 而且, 对于三个 Hankel 算子乘积的有限秩性质, 我们给出了其在刻画截断 Toeplitz 算子的有限秩性质上的应用. 由于解析符号的 Hankel 算子总是零算子, 因此, 本文只需关注符号为共轭解析函数的 Hankel 算子.

设 A, B, F 均为同一 Hilbert 空间上的有界线性算子, 本文用

$$A = B \mod (F)$$

来表示 $A - B$ 是有限秩算子.

2 有限秩算子

Hilbert 空间上的有限秩算子是一类非常重要的算子, 例如: 有界线性泛函是秩一算子; 有界线性算子是有限秩算子的强极限; 紧算子是有限秩算子的范数极限; 而且所有有限秩算子的全体是 $B(H)$ 的一个双边理想, 这里, $B(H)$ 是 H 上有界线性算子的全体. 为了读者方便, 本节列举了 Hilbert 空间上的有限秩算子的一些常用的基本性质和部分已知结果. 首先, 有限秩算子的定义如下:

定义 2.1 设 H 是一个 Hilbert 空间, A 是 H 上的一个有界线性算子, 如果 A 的值域 AH 是有限维的, 则称 A 是有限秩算子.

下面回顾有限秩算子的性质和表示, 这些结论已为大家所熟知, 但它们在文献中的分布比较零散, 我们在此系统地列出来. 更多关于有限秩算子的内容可查阅文 [6, 10]. 首先, 秩一算子的定义如下:

定义 2.2 设 x, y 是 H 中的两个非零向量, 对任意的 $h \in H$, 定义

$$(x \otimes y)(h) = \langle h, y \rangle x,$$

则 $x \otimes y$ 是 H 上的秩一算子.

命题 2.3 $x \otimes y$ 满足如下的性质:

(1) $\|x \otimes y\| = \|x\| \, \|y\|$;

(2) $(x \otimes y)^* = y \otimes x$;

(3) 设 B 是 H 上的有界线性算子, 则 $B(x \otimes y) = (Bx) \otimes y$, $(x \otimes y)B = x \otimes B^* y$;

(4) 设 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$, a, b 是复数, 则 $(ax_1 + bx_2) \otimes y_1 = a(x_1 \otimes y_1) + b(x_2 \otimes y_2)$, $x_1 \otimes (ay_1 + by_2) = \bar{a}(x_1 \otimes y_1) + \bar{b}(x_1 \otimes y_2)$.

命题 2.4 设 A 是 H 上的秩 n 算子, 则在 H 中有 n 个线性无关的向量 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 及 n 个线性无关的向量 $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, 使得

$$A = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_n \otimes y_n.$$

推论 2.5 设 A 是秩 n 算子, 则 A^* 也是秩 n 算子.

推论 2.6 设 A 是 H 上的秩 n 的投影算子, 则存在 n 个互相正交的单位向量 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, 使得 $A = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + \cdots + e_n \otimes e_n$.

下述关于有限秩算子的性质在本文的主要结果中有着重要应用.

命题 2.7 [9] 设 A 为 H^2 上的有界线性算子, $p(z)$ 和 $q(z)$ 为非零的解析多项式, 则 $T_p^* A T_q$ 是有限秩的当且仅当 A 是有限秩的.

更一般地, 我们有下述结论:

命题 2.8 设 $g, h \in H^p$ 且 g, h 的内外因子分解式中的内因子均为有限 Blaschke 积, 这里 $p > 1$. 若 A 为 H^2 上的有界线性算子, 则 $T_g^* A T_h$ 是有限秩的当且仅当 A 是有限秩的.

证明 充分性显然, 故我们只证必要性. 设 $h(z) = B(z)F(z)$, 这里 $B(z)$ 是有限 Blaschke 积, $F(z)$ 是外函数. 令 $M = T_g^* A T_h H^2$, 由于 $T_g^* A T_h$ 是有限秩的, 故 M 是 H^2 的有限维子空间. 又因为 $F(z)$ 是外函数, 由外函数的性质 [10] 知:

$$\overline{\operatorname{span} T_F H^2} = H^2,$$

这里, $\overline{\operatorname{span} T_F H^2}$ 表示由 $T_F H^2$ 线性张成的闭子空间. 因此

$$T_g^* A T_B H^2 = \overline{\operatorname{span} T_g^* A T_B T_F H^2} = M,$$

从而可得 $T_g^* AT_B$ 是有限秩的, 而且

$$T_g^* A = T_g^* AT_{\bar{B}} T_B = T_g^* AT_B T_{\bar{B}} \mod (F).$$

故 $T_g^* A$ 是有限秩的. 利用上述相同的技巧, 可证得 A^* 是有限秩的, 从而 A 是有限秩的, 必要性得证.

3 三个 Hankel 算子的有限秩扰动

本节给出了三个 Hankel 算子的乘积是一个有限秩算子的充要条件. 本节主要结果的证明中需要用到本文的第二作者在 [7] 中的一些结果, 为了读者方便, 本文引用其定理如下.

引理 3.1 [7] 设 $f, g, h \in L^\infty$, 则 $H_f T_g = H_h \mod (F)$ 当且仅当要么 H_f 和 H_h 均为有限秩算子, 要么 H_g 和 H_{fg-h} 均为有限秩算子.

引理 3.2 [7] 设 $f_1, f_2, g_1, g_2, h \in L^\infty$ 且 $H_{f_1}, H_{f_2}, H_{g_1}$ 和 H_{g_2} 均不是有限秩算子, 则

$$H_{f_1} T_{g_1} + H_{f_2} T_{g_2} = H_h \mod (F)$$

当且仅当下述条件成立:

(1) 存在非零的解析多项式 A_i, B_i $(i = 1, 2)$, 使得 $A_1 f_1 + A_2 f_2 \in H^\infty$ 且 $B_1 g_1 + B_2 g_2 = h_1 \in H^\infty$;

(2) $A_1 B_1 + A_2 B_2 = 0$ 及 $H_{A_2 f_2 h_1 + A_1 B_1 h} = 0 \mod (F)$.

本节的主要结果如下:

定理 3.3 设 $f, g, u \in \bigcap_{q>1} H^q$ (这里 $H^\infty \subset \bigcap_{q>1} H^q$), 则 $H_{\bar{f}} H_{\bar{g}} H_{\bar{u}}$ 是有限秩的当且仅当下列条件之一成立:

(1) $H_{\bar{f}}, H_{\bar{g}}$ 与 $H_{\bar{u}}$ 中至少有一个是有限秩算子;

(2) $H_{\bar{f}} T_{g^* \bar{u}}$ 与 $H_{\bar{f} g^*} T_{\bar{u}}$ 均是有限秩的;

(3) 存在非零的解析多项式 A_i, B_i $(i = 1, 2)$, 使得

$$(A_1 - A_2 g^*) \bar{f} \in H^\infty \quad 且 \quad (B_1 g^* + B_2) \bar{u} \in H^\infty,$$

并且, $A_1 B_1 + A_2 B_2 = 0$ 及 $H_{A_2 \bar{f} g^* \bar{u} (B_1 g^* + B_2)}$ 是有限秩算子.

证明 先证必要性. 如果 $H_{\bar{f}} H_{\bar{g}} H_{\bar{u}}$ 是有限秩算子, 由于

$$H_{\bar{f}} H_{\bar{g}} H_{\bar{u}} = H_{\bar{f}} H_{\widetilde{g^*}} H_{\bar{u}} = H_{\bar{f}} (T_{g^* \bar{u}} - T_{g^*} T_{\bar{u}}) = H_{\bar{f}} T_{g^* \bar{u}} - H_{\bar{f} g^*} T_{\bar{u}} = 0 \mod (F), \tag{3.1}$$

假设条件 (1) 不成立, 即 $H_{\bar{f}}, H_{\bar{g}}, H_{\bar{u}}$ 均不是有限秩算子, 下证必然有条件 (2) 或 (3) 成立. 根据等式 (3.1) 可知: 若 $H_{\bar{f}} H_{\bar{g}} H_{\bar{u}}$ 是有限秩的, 则有以下两种情况成立:

$\langle 1 \rangle$ $H_{\bar{f}} T_{g^* \bar{u}}$ 与 $H_{\bar{f} g^*} T_{\bar{u}}$ 中至少有一个是有限秩的;

$\langle 2 \rangle$ $H_{\bar{f}} T_{g^* \bar{u}}$ 与 $H_{\bar{f} g^*} T_{\bar{u}}$ 均不是有限秩的.

事实上, 如果情形 $\langle 1 \rangle$ 成立, 那么, 若 $H_{\bar{f}} T_{g^* \bar{u}}$ 是有限秩的, 由等式 (3.1) 及 $H_{\bar{f}} H_{\bar{g}} H_{\bar{u}}$ 是有限秩的可知: $H_{\bar{f} g^*} T_{\bar{u}}$ 一定也是有限秩的; 同理, 若 $H_{\bar{f} g^*} T_{\bar{u}}$ 是有限秩的, 则 $H_{\bar{f}} T_{g^* \bar{u}}$ 一定也是有限秩的. 因此, 根据情形 $\langle 1 \rangle$, 我们可以得到条件 (2) 成立.

如果情形 $\langle 2 \rangle$ 成立, 即情形 $\langle 1 \rangle$ 不成立, 则我们断言: $H_{g^* \bar{u}}$ 与 $H_{\bar{f} g^*}$ 都不是有限秩算子. 否则, 假设 $H_{\bar{f} g^*}$ 是有限秩的, 那么 $H_{\bar{f} g^*} T_{\bar{u}}$ 是有限秩的, 这与 $\langle 2 \rangle$ 的情况相矛盾, 故 $H_{\bar{f} g^*}$ 不是有限秩

算子. 同样地, 应用反证法, 如果 $H_{g^*\bar{u}}$ 是有限秩的, 根据 Kronecker 定理, 则存在非零的解析多项式 $a(z)$, 使得 $ag^*\bar{u} \in H^\infty$, 从而, 由 (3.1) 式可得:

$$H_{\bar{f}}T_{g^*\bar{u}a} - H_{\bar{f}g^*}T_{\bar{u}a} = 0 \mod (F),$$

即

$$H_{\bar{f}g^*\bar{u}a} = H_{\bar{f}g^*}T_{\bar{u}a} \mod (F).$$

由引理 3.1 以及 $H_{\bar{u}}$ 不是有限秩算子可知: $H_{\bar{f}g^*\bar{u}a}$ 和 $H_{\bar{f}g^*}$ 均是有限秩的, 从而 $H_{\bar{f}g^*}T_{\bar{u}}$ 是有限秩的. 而这与 $\langle 2\rangle$ 的情况相矛盾, 因此, $H_{g^*\bar{u}}$ 不是有限秩的. 这样, 在 (1) 和 (2) 都不成立的情况下, $H_{\bar{f}}, H_{\bar{u}}, H_{g^*\bar{u}}$ 与 $H_{\bar{f}g^*}$ 都不是有限秩的, 根据引理 3.2, 由于

$$H_{\bar{f}}T_{g^*\bar{u}} + H_{-\bar{f}g^*}T_{\bar{u}} = 0 \mod (F),$$

从而存在非零的解析多项式 A_i, B_i $(i=1,2)$, 使得

$$A_1\bar{f} + A_2(-\bar{f}g^*) = (A_1 - A_2g^*)\bar{f} \in H^\infty \quad \text{且} \quad B_1g^*\bar{u} + B_2\bar{u} = (B_1g^* + B_2)\bar{u} \in H^\infty,$$

还满足 $A_1B_1 + A_2B_2 = 0$ 及 $H_{A_2(-\bar{f}g^*)(B_1g^*+B_2)\bar{u}} = 0 \mod (F)$, 即 $H_{A_2\bar{f}g^*\bar{u}(B_1g^*+B_2)}$ 是有限秩的. 从而如果 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}$ 是有限秩的且条件 (1) 和 (2) 都不成立, 则必定有条件 (3) 成立. 从而证得必要性.

下证充分性. 显然条件 (1) 可推出 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}$ 为有限秩的. 如果条件 (1) 不成立, 但条件 (2) 成立, 那么由于

$$H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}} = H_{\bar{f}}T_{g^*\bar{u}} - H_{\bar{f}g^*}T_{\bar{u}},$$

则 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}$ 是有限秩的. 假若条件 (1) 和条件 (2) 均不成立, 但条件 (3) 成立, 设 $(B_1g^*+B_2)\bar{u} = h_1 \in H^\infty$, 则

$$\begin{aligned}
T_{\widetilde{A_1}}(H_{\bar{f}}T_{g^*\bar{u}} - H_{\bar{f}g^*}T_{\bar{u}})T_{B_1} &= H_{A_1\bar{f}}T_{g^*\bar{u}B_1} - H_{A_1\bar{f}g^*}T_{\bar{u}B_1} \\
&= H_{A_2\bar{f}g^*}T_{g^*\bar{u}B_1} - H_{A_1\bar{f}g^*}T_{\bar{u}B_1} \\
&= H_{A_2\bar{f}g^*}T_{h_1-\bar{u}B_2} - H_{A_1\bar{f}g^*}T_{\bar{u}B_1} \\
&= H_{\bar{f}g^*}(T_{A_2}T_{h_1} - T_{A_2}T_{\bar{u}B_2}) - H_{\bar{f}g^*}T_{A_1}T_{\bar{u}B_1} \\
&= -H_{\bar{f}g^*}(T_{A_2}T_{\bar{u}B_2} + T_{A_1}T_{\bar{u}B_1}) + H_{\bar{f}g^*}T_{A_2}T_{h_1}.
\end{aligned}$$

根据条件 (3) 知 $H_{A_2\bar{f}g^*\bar{u}(B_1g^*+B_2)} = H_{\bar{f}g^*A_2h_1}$ 是有限秩算子, 且 $T_{A_i}T_{\bar{u}B_i} = T_{A_iB_i\bar{u}} \mod (F)$, 这里 $i=1,2$, 故

$$T_{\widetilde{A_1}}(H_{\bar{f}}T_{g^*\bar{u}} - H_{\bar{f}g^*}T_{\bar{u}})T_{B_1} = -H_{\bar{f}g^*}T_{(A_2B_2+A_1B_1)\bar{u}} \mod (F).$$

又由于 $A_1B_1 + A_2B_2 = 0$, 所以

$$T_{\widetilde{A_1}}(H_{\bar{f}}T_{g^*\bar{u}} - H_{\bar{f}g^*}T_{\bar{u}})T_{B_1} = 0 \mod (F).$$

由命题 2.7 知

$$H_{\bar{f}}T_{g^*\bar{u}} - H_{\bar{f}g^*}T_{\bar{u}} = 0 \mod (F),$$

故而 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}} (= H_{\bar{f}}T_{g^*\bar{u}} - H_{\bar{f}g^*}T_{\bar{u}})$ 为有限秩的. 所以, 如果条件 (1), (2) 和 (3) 中的任一条成立, 总有 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}$ 是有限秩的. 充分性得证.

Gu 在文 [11] 中证明了 Hardy 空间上三个 Hankel 算子任意次序的乘积都是有限秩的当且仅当三个 Hankel 算子中必有一个是有限秩的. 下面的例子表明: 存在三个均不是有限秩的 Hankel 算子 $H_{\bar{f}}, H_{\bar{g}}, H_{\bar{u}}$, 但它们的乘积 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}$ 是有限秩的.

例 3.4 设 f 和 u 是无限 Blaschke 积, 对任意的非零函数 $\theta \in H^\infty$, 令 $g = f^*u^*\theta$, 则 $g^*\bar{u} = f\theta^*$, $\bar{f}g^* = u\theta^*$, $\bar{f}g^*\bar{u} = \theta^*$, 所以 $H_{g^*\bar{u}} = 0$, $H_{\bar{f}g^*} = 0$, $H_{\bar{f}g^*\bar{u}} = 0$, 从而 $H_{\bar{f}}T_{g^*\bar{u}} = H_{\bar{f}g^*\bar{u}} = 0$, $H_{\bar{f}g^*}T_{\bar{u}} = 0$. 因此 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}(=0)$ 是有限秩算子, 但显然 $H_{\bar{f}}, H_{\bar{g}}, H_{\bar{u}}$ 都不是有限秩的.

下面的例子说明了存在不满足上述定理中的条件 (1) 和条件 (2) 的三个 Hankel 算子, 但它们的乘积是有限秩算子. 为了方便读者, 这里引用 Ding 和 Sang [8] 关于三个 Hankel 算子的乘积等于 0 的刻画如下:

引理 3.5 [8] 设 $f, g, u \in H^2$ 均为非常值函数, 则 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}} = 0$ 的充要条件是存在常值 λ, 使得 $(g^*-\lambda)\bar{f}, (g^*-\lambda)\bar{f}$ 和 $(g^*-\lambda)\bar{f}\bar{u}$ 均属于 H^2.

例 3.6 设 φ, ψ 是无限 Blaschke 积, $\theta \in H^\infty$ 为非零函数, α 为非零复数且 $|\alpha| < 1$. 令 $f = \varphi$, $u = \psi$, $g^* = \theta\varphi\psi + \alpha$, 则显然有 $H_{\bar{f}}, H_{\bar{g}}, H_{\bar{u}}$ 都不是有限秩的. 又由于

$$(g^*-\alpha)\bar{f} = \theta\psi \in H^\infty, \quad (g^*-\alpha)\bar{u} = \theta\varphi \in H^\infty, \quad (g^*-\alpha)\bar{f}\bar{u} = \theta \in H^\infty,$$

所以 $H_{g^*\bar{f}} = \alpha H_{\bar{f}}$ 以及 $H_{g^*\bar{u}} = \alpha H_{\bar{u}}$ 均不是有限秩算子, 从而 $H_{\bar{f}}T_{g^*\bar{u}}$ 与 $H_{\bar{f}g^*}T_{\bar{u}}$ 均不是有限秩的, 即本例不满足定理 3.3 中的条件 (1) 和条件 (2).

下面, 我们验证本例满足定理 3.3 中的条件 (3). 令

$$A_1 = -\alpha, \quad A_2 = -1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = -\alpha,$$

则显然有 $A_1B_1 + A_2B_2 = 0$, 且

$$(A_1 - A_2g^*)\bar{f} = (g^*-\alpha)\bar{f} = \theta\psi \in H^\infty$$

以及

$$(B_1g^* + B_2)\bar{u} = (g^*-\alpha)\bar{u} = \theta\varphi \in H^\infty,$$

并且

$$H_{A_2\bar{f}g^*\bar{u}(B_1g^*+B_2)} = -H_{\bar{f}g^*\bar{u}(g^*-\alpha)} = -H_{g^*\theta} = 0,$$

即 $H_{A_2\bar{f}g^*\bar{u}(B_1g^*+B_2)}$ 为有限秩的. 所以, 本例满足定理 3.3 中的条件 (3), 故 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}$ 是有限秩的, 而且根据引理 3.5 知: $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}H_{\bar{u}} = 0$.

4 主要结果的应用

本节介绍模型空间上的截断 Toeplitz 算子, 给出有限秩的截断 Toeplitz 算子的刻画.

设 θ 是一个非常值的内函数, $K_\theta^2 = H^2 \ominus \theta H^2$ 为模型空间. 记 P_θ 为从 L^2 到 K_θ^2 上的正交投影算子. 2007 年, Sarason [15] 引入了模型空间上的截断 Toeplitz 算子, 其定义如下: 对 $f \in L^\infty$,

$$A_f^\theta x = P_\theta(fx), \quad \forall\, x \in K_\theta^2.$$

而且, Sarason [15] 给出了所有秩 1 的截断 Toeplitz 算子的刻画, 并构造出了一类有限秩的截断 Toeplitz 算子. 2014 年, Bessonov [4] 证明了 Sarason 所构造的有限秩的截断 Toeplitz 算子穷尽了所有的有限秩的截断 Toeplitz 算子. 我们利用上节的主要结果, 给出有限秩的截断 Toeplitz 算子不同形式的刻画.

截断 Toeplitz 算子与 Hardy 空间上经典的 Toeplitz 算子和 Hankel 算子密切相关, 下述命题是由 Baranov 等人 [3] 给出的, 揭示了截断 Toeplitz 算子与 Hardy 空间上的 Hankel 算子之间的关系, 并在本节的结果中发挥了重要作用.

命题 4.1 [3] $H_{\tilde{\theta}}^{*}H_{\bar{\theta}f}H_{\tilde{\theta}}^{*}U:(H^2)^{\perp}\to H^2$ 在分解 $(H^2)^{\perp}=\bar{\theta}K_{\theta}^2\oplus\bar{\theta}(H^2)^{\perp}$ 与 $H^2=K_{\theta}^2\oplus\theta H^2$ 下的矩阵表示为

$$H_{\tilde{\theta}}^{*}H_{\bar{\theta}f}H_{\tilde{\theta}}^{*}U=\begin{pmatrix} A_f^{\theta}M_{\theta} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

这里 M_{θ} 为乘法算子, $U:L^2\to L^2$ 为酉算子且定义为

$$Uh(w)=\bar{w}\widetilde{h(w)},\quad \forall\, h\in L^2.$$

结合上述命题和定理 3.3, 我们得到下述关于截断 Toeplitz 算子的有限秩的刻画:

定理 4.2 设 $f\in L^{\infty}$, $\bar{g}=(I-P)(\bar{\theta}f)$, 则 A_f^{θ} 是有限秩算子当且仅当下述条件之一成立:

(1) $H_{\bar{g}}$ 与 $H_{\tilde{\theta}}$ 中至少有一个是有限秩算子;

(2) $H_{\tilde{\theta}}T_{g^*\tilde{\theta}}$ 与 $H_{g^*\tilde{\theta}}T_{\tilde{\theta}}$ 均是有限秩的;

(3) 存在非零的解析多项式 A_i,B_i $(i=1,2)$, 使得

$$(A_1-A_2g^*)\tilde{\theta}\in H^{\infty}\ \text{ 且 }\ (B_1g^*+B_2)\tilde{\theta}=h\in H^{\infty},$$

并且 $A_1B_1+A_2B_2=0$ 及 $H_{A_2\tilde{\theta}g^*h}$ 是有限秩算子.

证明 结合定理 3.3 及命题 4.1 即可得, 故证明省略.

参 考 文 献

[1] Axler S., Chang S. Y., Sarason D., Products of Toeplitz operators, *Integr. Equ. Oper. Theory*, 1978, **1**: 285–309.

[2] Aleman A., Vukotić D., Zero products of Toeplitz operators, *Duke Math. J.*, 2009, **148**: 373–403.

[3] Baranov A., Chalendar I., Fricain E., et al., Bounded symbols and reproducing kernel thesis for truncated Toeplitz operators, *J. Funct. Anal.*, 2010, **259**: 2673–2701.

[4] Bessonov R., Truncated Toeplitz operators of finite rank, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2014, **142** (4): 1301–1313.

[5] Brown A., Halmos P., Algebraic properties of Toeplitz operators, *J. Reine Angew. Math.*, 1964, **213**: 89–102.

[6] Conway J., A Course in Functional Analysis, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1994.

[7] Ding X. H., The finite rank perturbations of the product of Hankel and Toeplitz operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **337**(1): 726–738.

[8] Ding X. H., Sang Y. Q., Two questions on products of Hankel operators (in Chinese), *Sci. Sin. Math.*, doi: 10.1360/NO12019-00017.

[9] Ding X. H., Zheng D. C., Finite rank commutator of Toeplitz operators or Hankel operators, *Houston J. Math.*, 2008, **34**(4): 1099–1120.

[10] Douglas R., Banach Algebra Techniques in Operator Theory, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1998.

[11] Gu C. X., Finite rank products of four Hankel operators, *Houston J. Math.*, 1999, **25**(3): 543–561.

[12] Gu C. X., Products of several Toeplitz operators, *J. Funct. Anal.*, 2000, **171**: 483–527.

[13] Guo K. Y., A problem on products of Toeplitz operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1996, **124**: 869–871.

[14] Peller V., Hankel Operators and Their Applications, Springer-Verlag, New York, 2003.

[15] Sarason D., Algebraic properties of truncated Toeplitz operators, *Oper. Matrices*, 2007, **1**(4): 491–526.

[16] Xia D. X., Zheng D. C., Products of Hankel operators, *Integr. Equ. Oper. Theory*, 1997, **29**: 339–363.

[17] Zhu K. H., Operator Theory in Function Spaces, 2nd Edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.