第64卷第3期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.64, No.3
2021年5月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES　　May, 2021

文章编号: 0583-1431(2021)03-0479-06　　**文献标识码: A**

经典高斯和及它们的一些递推性质

徐小玲

延安大学西安创新学院 西安 710100
E-mail: yadxxxl@163.com

张佳凡

西北大学数学学院 西安 710127
E-mail: zhangjiafan@stumail.nwu.edu.cn

摘　要　本文利用解析方法及经典高斯和的性质研究了某些特殊对称高斯和的计算问题, 并给出了一些新的恒等式及其二阶线性递推公式.

关键词　特征; 对称高斯和; 恒等式; 二阶线性递推公式
MR(2010) 主题分类　11L05, 11L07
中图分类　O156.4

A Certain Classical Gauss Sums and Some of Their Recursive Properties

Xiao Ling XU

School of Data Science and Engineering,
Xi'an Innovation College of Yan'an University, Xi'an 710100*, P. R. China*
E-mail: *yadxxxl@163.com*

Jia Fan ZHANG

School of Mathematics, Northwest University, Xi'an,
Shaanxi 710127*, P. R. China*
E-mail: *zhangjiafan@stumail.nwu.edu.cn*

Abstract　We use analytic methods and properties of the classical Gauss sums to study the computational problems of some certain special symmetric Gauss sums, and give some new and interesting identities and second-order linear recurrence formulae for them.

Keywords　character; symmetric Gauss sums; identity; second-order linear recurrence formula
MR(2010) Subject Classification　11L05, 11L07
Chinese Library Classification　O156.4

收稿日期: 2020-05-08; 接受日期: 2020-07-15
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11771351); 陕西省教育厅 2019 年度专项科学研究计划 (19JK0978)

1 引言

令 $q \geq 2$ 为整数, χ 为模 q 的任一狄利克莱特征, 则对任意整数 m, 经典高斯和 $G(m,\chi;q)$ 定义为

$$G(m,\chi;q)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{ma}{q}\right),$$

其中 $e(y)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}y}$.

当 χ 为模 q 的原特征或者 $(m,q)=1$ 时, 则有

$$G(m,\chi;q)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{ma}{q}\right)=\overline{\chi}(m)\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{a}{q}\right)=\overline{\chi}(m)\cdot\tau(\chi).$$

有关经典高斯和的一些主要性质可以参考一些解析数论教材 [1, 9, 14]. 另外, 有关高斯和的一些其它结果可见文 [2–18]. 例如, 张文鹏和呼家源 [18] 或 Berndt 和 Evans [4] 证明了以下结论:

令 p 为素数且 $p\equiv 1 \bmod 3$, 则对任一 3 阶特征 $\lambda \bmod p$, 有恒等式

$$\tau^3(\lambda)+\tau^3\left(\overline{\lambda}\right)=dp,$$

其中 d 由 $4p=d^2+27b^2$ 和 $d\equiv 1 \bmod 3$ 唯一确定.

陈卓钰和张文鹏 [7] 研究了 4 阶特征 $\psi \bmod p$, 并证明了对于任一素数 p 满足 $p\equiv 1 \bmod 4$, 以及任意 4 阶特征 $\psi \bmod p$, 有恒等式

$$\tau^2(\psi)+\tau^2(\overline{\psi})=2\sqrt{p}\sum_{a=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{a+\overline{a}}{p}\right),$$

其中 $(\frac{*}{p})$ 表示模 p 的勒让德符号, 且 $a\overline{a}\equiv 1 \bmod p$.

陈丽 [5] 讨论了 6 阶特征 $\mu \bmod p$, 并得到了关于 μ 的高斯和的恒等式, 见引理 1.

受文 [5, 7] 及 [18] 的启发, 我们思考是否存在对应于模 p 的 12 阶或 24 阶特征的公式?

通过研究, 我们发现尽管这些高阶特征没有完全相同的结果, 但仍有一些相似之处. 令 p 为 $p\equiv 1 \bmod 12$ 的素数, ψ 为模 p 的 12 阶特征. 对任意整数 $k\geq 0$, 记

$$U_k(\psi,p)=\frac{\tau^{6k}(\psi)}{\tau^{6k}(\psi^5)}+\frac{\tau^{6k}(\psi^5)}{\tau^{6k}(\psi)}=\frac{\tau^{6k}(\psi)}{\tau^{6k}(\psi^5)}+\frac{\tau^{6k}(\overline{\psi})}{\tau^{6k}(\overline{\psi}^5)};$$

$$V_k(\psi,p)=\tau^{6k}(\psi)\tau^{6k}(\overline{\psi}^5)+\tau^{6k}(\overline{\psi})\tau^{6k}(\psi^5).$$

对于 $p\equiv 1 \bmod 24$ 的素数 p, 令 ψ 为模 p 的 24 阶特征, 且

$$W_k(\psi,p)=\frac{\tau^{6k}(\psi^7)\cdot\tau^{6k}(\psi)}{\tau^{6k}(\psi^{11})\cdot\tau^{6k}(\psi^5)}+\frac{\tau^{6k}(\psi^{11})\cdot\tau^{6k}(\psi^5)}{\tau^{6k}(\psi^7)\cdot\tau^{6k}(\psi)}.$$

在这些记号下, 我们可以证明对称序列 $\{U_k(\psi,p)\}$, $\{V_k(\psi,p)\}$, $\{W_k(\psi,p)\}$ 满足一些二阶线性递推公式, 即有以下三个结论:

定理 1 令 p 为满足 $p\equiv 1 \bmod 12$ 的奇素数, ψ 为模 p 的任意 12 阶特征, 则对任意整数 $k\geq 2$, 我们有二阶线性递推公式

$$U_k(\psi,p)=\left(\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2\right)\cdot U_{k-1}(\psi,p)-U_{k-2}(\psi,p),\quad k\geq 2 \text{ 为任意整数},$$

其中初值为 $U_0(\psi,p)=2$, $U_1(\psi,p)=(2-\frac{d^2}{p})^2-2$, d 由 $4p=d^2+27b^2$ 和 $d\equiv 1 \bmod 3$唯一确定.

定理 2 令 p 为满足 $p\equiv 1 \bmod 12$ 的奇素数, ψ 为模 p 的任意 12 阶特征, 则对任意整数 $k\geq 2$, 有二阶线性递推公式

$$V_k(\psi,p)=p^6\cdot\left(\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2\right)\cdot V_{k-1}(\psi,p)-p^{12}\cdot V_{k-2}(\psi,p),\quad k\geq 2 \text{ 为任意整数},$$

其中初值为 $V_0(\psi,p)=2$, $V_1(\psi,p)=p^6\cdot[(2-\frac{d^2}{p})^2-2]$.

定理 3 令 p 为满足 $p\equiv 1 \bmod 24$ 的奇素数, ψ 为模 p 的任意 24 阶特征, 则对任意整数 $k\geq 2$, 有二阶线性递推公式

$$W_k(\psi,p)=\left(\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2\right)\cdot W_{k-1}(\psi,p)-W_{k-2}(\psi,p),\quad k\geq 2 \text{ 为任意整数},$$

其中初值为 $W_0(\psi,p)=2$, $W_1(\psi,p)=(2-\frac{d^2}{p})^2-2$.

注 1 对于模 p 的 $3\cdot 2^k$ 阶特征 ψ 及其相应的高斯和 $\tau(\psi)$, 已有相应的结果, 但是当 k 足够大时, 其结果更加复杂, 在此不作讨论.

2 几个简单的引理

证明主要结果需要以下三个引理. 本部分用到的一些解析数论知识, 可见文 [1–8] 和 [14–18].

引理 1 令 p 为满足 $p\equiv 1 \bmod 6$ 的素数, 则对模 p 的任意六阶特征 ψ, 有恒等式

$$\tau^3(\psi)+\tau^3(\overline{\psi})=\begin{cases} p^{\frac{1}{2}}\cdot\left(d^2-2p\right), & \text{若 } p\equiv 1 \bmod 12;\\ -i\cdot p^{\frac{1}{2}}\cdot\left(d^2-2p\right), & \text{若 } p\equiv 7 \bmod 12,\end{cases}$$

其中 $i^2=-1$, d 由 $4p=d^2+27b^2$ 和 $d\equiv 1 \bmod 3$ 唯一确定.

证明 见陈丽的文 [5, 引理 3].

引理 2 令 p 为满足 $p\equiv 1 \bmod 12$ 的奇素数, 则对模 p 的任意 12 阶特征 ψ, 有恒等式

$$\frac{\tau^6(\psi)}{\tau^6(\psi^5)}+\frac{\tau^6(\psi^5)}{\tau^6(\psi)}=\frac{\tau^6(\psi)}{\tau^6(\psi^5)}+\frac{\tau^6\left(\overline{\psi}\right)}{\tau^6(\overline{\psi}^5)}=\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2$$

及

$$\tau^6(\overline{\psi}^5)\cdot\tau^6(\psi)+\tau^6(\psi^5)\cdot\tau^6(\overline{\psi})=p^6\left[\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2\right].$$

证明 令 λ 和 χ_4 分别为模 p 的任意 3 阶和 4 阶特征, 则 $\psi=\chi_4\lambda$ 必为模 p 的 12 阶特征. 另一方面, 对于模 p 的任意 12 阶特征 ψ, 必存在模 p 的一个 3 阶特征 λ 和一个 4 阶特征 χ_4, 使得 $\psi=\chi_4\lambda$. 因此, 不失一般性, 假设 $\psi=\chi_4\lambda$, 注意 $\overline{\psi}^2=\chi_2\overline{\lambda}^2=\chi_2\lambda$, 由高斯和的性质可得

$$\begin{aligned}\sum_{a=0}^{p-1}\psi\left(a^2-1\right)&=\sum_{a=0}^{p-1}\psi\left((a+1)^2-1\right)=\sum_{a=1}^{p-1}\psi\left(a^2+2a\right)\\&=\sum_{a=1}^{p-1}\psi(a)\psi\left(a+2\right)=\frac{1}{\tau(\overline{\psi})}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\psi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\psi(a)e\left(\frac{b(a+2)}{p}\right)\\&=\frac{\tau(\psi)}{\tau(\overline{\psi})}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\psi}^2(b)e\left(\frac{2b}{p}\right)=\chi_2(2)\overline{\lambda}(2)\cdot\frac{\tau(\psi)\tau(\chi_2\lambda)}{\tau(\overline{\psi})}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

由恒等式 $\tau(\chi_2)=\sqrt{p}$ 以及勒让德符号的性质, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{a=0}^{p-1}\psi\left(a^2-1\right)&=\psi(-1)+\sum_{a=1}^{p-1}(1+\chi_2(a))\,\psi\,(a-1)=\sum_{a=0}^{p-1}\psi\,(a-1)+\sum_{a=1}^{p-1}\chi_2(a)\psi\,(a-1)\\&=\frac{1}{\tau(\overline{\psi})}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\psi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_2(a)e\left(\frac{b(a-1)}{p}\right)=\frac{\sqrt{p}}{\tau(\overline{\psi})}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\psi}(b)\chi_2(b)e\left(\frac{-b}{p}\right)\\&=\frac{\sqrt{p}}{\tau(\overline{\psi})}\sum_{b=1}^{p-1}\chi_4(b)\overline{\lambda}(b)e\left(\frac{-b}{p}\right)=\overline{\chi}_4(-1)\cdot\frac{\sqrt{p}\cdot\tau(\chi_4\overline{\lambda})}{\tau(\overline{\psi})}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

结合 (2.1) 和 (2.2) 可得恒等式

$$\chi_4(-4)\overline{\lambda}(2)\tau\left(\chi_2\lambda\right)=\sqrt{p}\cdot\frac{\tau(\chi_4\overline{\lambda})}{\tau(\chi_4\lambda)}.\tag{2.3}$$

由 (2.3) 可得

$$\tau^6\left(\chi_2\lambda\right)=p^3\cdot\frac{\tau^6(\chi_4\overline{\lambda})}{\tau^6(\chi_4\lambda)}=p^3\cdot\frac{\tau^6\left(\overline{\chi}_4\overline{\lambda}\right)}{\tau^6\left(\overline{\chi}_4\lambda\right)}\tag{2.4}$$

和

$$\tau^6\left(\chi_2\overline{\lambda}\right)=p^3\cdot\frac{\tau^6(\chi_4\lambda)}{\tau^6(\chi_4\overline{\lambda})}=p^3\cdot\frac{\tau^6\left(\overline{\chi}_4\lambda\right)}{\tau^6\left(\overline{\chi}_4\overline{\lambda}\right)}.\tag{2.5}$$

根据 (2.4), (2.5) 及引理 1, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\tau^6(\chi_4\lambda)}{\tau^6(\chi_4\overline{\lambda})}+\frac{\tau^6(\chi_4\overline{\lambda})}{\tau^6(\chi_4\lambda)}=\frac{1}{p^3}\cdot\left(\tau^6\left(\chi_2\lambda\right)+\tau^6\left(\chi_2\overline{\lambda}\right)\right)\\&\quad=\frac{1}{p^3}\cdot\left[\left(\tau^3\left(\chi_2\lambda\right)+\tau^3\left(\chi_2\overline{\lambda}\right)\right)^2-2\tau^3\left(\chi_2\lambda\right)\tau^3\left(\chi_2\overline{\lambda}\right)\right]\\&\quad=\frac{1}{p^3}\cdot\left[p\cdot\left(2p-d^2\right)^2-2p^3\right]=\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2;\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\frac{\tau^6\left(\overline{\chi}_4\lambda\right)}{\tau^6\left(\overline{\chi}_4\overline{\lambda}\right)}+\frac{\tau^6(\chi_4\overline{\lambda})}{\tau^6(\chi_4\lambda)}=\frac{1}{p^3}\cdot\left(\tau^6\left(\chi_2\lambda\right)+\tau^6\left(\chi_2\overline{\lambda}\right)\right)=\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2,$$

或

$$\tau^6\left(\overline{\chi}_4\lambda\right)\cdot\tau^6(\chi_4\lambda)+\tau^6(\chi_4\overline{\lambda})\cdot\tau^6\left(\overline{\chi}_4\overline{\lambda}\right)=p^6\left[\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2\right].\tag{2.7}$$

并且 $\psi=\chi_4\lambda$, $\psi^5=\chi_4\overline{\lambda}$. 由 (2.6) 和 (2.7) 可得引理 2.

引理 3 令 p 为满足 $p\equiv 1 \bmod 24$ 的奇素数, 则对模 p 的任意 24 阶特征 ψ, 有恒等式

$$\frac{\tau^6(\psi^7)\cdot\tau^6(\psi)}{\tau^6(\psi^{11})\cdot\tau^6(\psi^5)}+\frac{\tau^6(\psi^{11})\cdot\tau^6(\psi^5)}{\tau^6(\psi^7)\cdot\tau^6(\psi)}=\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2.$$

证明 令 χ_8 为一个八阶特征, λ 为模 p 的一个三阶特征且 $\psi=\chi_8\lambda$. 由 (2.1) 和 (2.2) 的证明方法可得

$$\sum_{a=0}^{p-1}\psi\left(a^2-1\right)=\chi_4(2)\overline{\lambda}(2)\cdot\frac{\tau(\psi)\tau(\overline{\chi}_4\lambda)}{\tau(\overline{\psi})}\tag{2.8}$$

和

$$\sum_{a=0}^{p-1}\psi\left(a^2-1\right)=\overline{\chi}_8(-1)\cdot\frac{\sqrt{p}\cdot\tau\left(\chi_8^3\overline{\lambda}\right)}{\tau(\overline{\psi})}. \tag{2.9}$$

注意 $\psi^{11}=\chi_8^3\overline{\lambda}$, 由 (2.8) 和 (2.9) 有恒等式

$$\tau^6\left(\overline{\chi}_4\lambda\right)=p^3\cdot\frac{\tau^6(\psi^{11})}{\tau^6(\psi)}\quad 和\ \tau^6\left(\overline{\chi}_4\overline{\lambda}\right)=p^3\cdot\frac{\tau^6(\psi^7)}{\tau^6(\psi^5)}$$

或

$$\frac{\tau^6\left(\overline{\chi}_4\overline{\lambda}\right)}{\tau^6\left(\overline{\chi}_4\lambda\right)}=\frac{\tau^6(\psi^7)\cdot\tau^6(\psi)}{\tau^6(\psi^{11})\cdot\tau^6(\psi^5)} \tag{2.10}$$

且 $\mu=\overline{\chi}_4\lambda$ 为模 p 的 12 阶特征, $\mu^5=\overline{\chi}_4\overline{\lambda}$, 由 (2.10) 和引理 2 可得恒等式

$$\frac{\tau^6(\psi^7)\cdot\tau^6(\psi)}{\tau^6(\psi^{11})\cdot\tau^6(\psi^5)}+\frac{\tau^6(\psi^{11})\cdot\tau^6(\psi^5)}{\tau^6(\psi^7)\cdot\tau^6(\psi)}=\frac{\tau^6(\overline{\chi}_4\overline{\lambda})}{\tau^6(\overline{\chi}_4\lambda)}+\frac{\tau^6(\overline{\chi}_4\lambda)}{\tau^6(\overline{\chi}_4\overline{\lambda})}=\frac{\tau^6(\mu^5)}{\tau^6(\mu)}+\frac{\tau^6(\mu)}{\tau^6(\mu^5)}=\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2,$$

即证引理 3.

3 主要定理及其证明

首先证明定理 1. 对任意整数 $k\geq 0$, 令 ψ 为模 p 的任意 12 阶特征且 $U_k(\psi,p)=\frac{\tau^{6k}(\psi)}{\tau^{6k}(\psi^5)}+\frac{\tau^{6k}(\psi^5)}{\tau^{6k}(\psi)}$, $k=0,1,2,\ldots$, 则对所有整数 $k\geq 2$, 由引理 2 有

$$\begin{aligned}U_k(\psi,p)\cdot U_1(\psi,p)&=\left(\frac{\tau^{6k}(\psi)}{\tau^{6k}(\psi^5)}+\frac{\tau^{6k}(\psi^5)}{\tau^{6k}(\psi)}\right)\cdot\left(\frac{\tau^{6}(\psi)}{\tau^{6}(\psi^5)}+\frac{\tau^{6}(\psi^5)}{\tau^{6}(\psi)}\right)\\&=\frac{\tau^{6(k+1)}(\psi)}{\tau^{6(k+1)}(\psi^5)}+\frac{\tau^{6(k+1)}(\psi^5)}{\tau^{6(k+1)}(\psi)}+\frac{\tau^{6(k-1)}(\psi)}{\tau^{6(k-1)}(\psi^5)}+\frac{\tau^{6(k-1)}(\psi^5)}{\tau^{6(k-1)}(\psi)}\\&=U_{k+1}(\psi,p)+U_{k-1}(\psi,p)\end{aligned}$$

或

$$U_k(\psi,p)=\left(\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2\right)\cdot U_{k-1}(\psi,p)-U_{k-2}(\psi,p),\quad k\geq 2\ 为任意整数,$$

其中初值为 $U_0(\psi,p)=2$, $U_1(\psi,p)=(2-\frac{d^2}{p})^2-2$, 即证定理 1.

类似地, 对任意整数 $k\geq 0$, 令 $V_k(\psi,p)=\tau^{6k}(\psi)\tau^{6k}(\overline{\psi}^5)+\tau^{6k}(\overline{\psi})\tau^{6k}(\psi^5)$, 则由引理 2 以及定理 1 的证明方法可得

$$V_k(\psi,p)=p^6\cdot\left(\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2\right)\cdot V_{k-1}(\psi,p)-p^{12}\cdot V_{k-2}(\psi,p),\quad k\geq 2\ 为任意整数,$$

其中初值为 $V_0(\psi,p)=2$, $V_1(\psi,p)=p^6\cdot[(2-\frac{d^2}{p})^2-2]$.

现在我们证明定理 3. 令 p 为满足 $p\equiv 1 \bmod 24$ 的奇素数, ψ 为模 p 的任意 24 阶特征. 对任意整数 $k\geq 0$, 令 $W_k(\psi,p)=\frac{\tau^{6k}(\psi^7)\cdot\tau^{6k}(\psi)}{\tau^{6k}(\psi^{11})\cdot\tau^{6k}(\psi^5)}+\frac{\tau^{6k}(\psi^{11})\cdot\tau^{6k}(\psi^5)}{\tau^{6k}(\psi^7)\cdot\tau^{6k}(\psi)}$. 注意恒等式

$$W_k(\psi,p)\cdot W_1(\psi,p)=W_{k+1}(\psi,p)+W_{k-1}(\psi,p),\quad k\geq 1.$$

由引理 3 及定理 1 的证明方法可得二阶线性递推公式

$$W_k(\psi,p)=\left(\left(2-\frac{d^2}{p}\right)^2-2\right)\cdot W_{k-1}(\psi,p)-W_{k-2}(\psi,p),\quad k\geq 2\ 为任意整数,$$

其中初值为 $W_0(\psi,p)=2$, $W_1(\psi,p)=(2-\frac{d^2}{p})^2-2$.

这就完成了所有结果的证明.

4 总结

本文的主要结果是三个定理. 定理 1 和 2 得到了当素数 $p\equiv 1 \bmod 12$ 时, 与模 p 的 12 阶特征 ψ 有关的某些对称高斯和的两个二阶线性递推公式. 定理 3 给出了当素数 $p\equiv 1 \bmod 24$ 时, 与模 p 的 24 阶特征 ψ 有关的某种对称高斯和的恒等式. 作为应用, 我们还推导了与模 p 的 24 阶特征 ψ 相关的高斯和的二阶线性递推公式. 这些结果不仅揭示了某些特殊高斯和值分布的规律性, 而且为相关领域的研究工作提供了一些新的思路和方法. 对于模 p 的 $3\cdot 2^k$ 阶特征 ψ $(k\geq 4)$ 及相应的高斯和 $\tau(\psi)$, 显然应该也有一个对应的结果. 但是当 k 足够大时, 此类问题会变得更加复杂, 因此本文没有进一步讨论. 作为一个公开的问题留给有兴趣的读者.

致谢 对审稿人提出的宝贵意见和建议表示衷心的感谢. 同时, 在本文的选题以及完成过程中得到了导师张文鹏教授的热情鼓励和指导, 在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Apostol Tom M., Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] Bai H., Hu J. Y., On the classical Gauss sum and the recursive properties, *Advances in Difference Equations*, 2018, **2018**: 387.

[3] Berndt B. C., Evans R. J., Sums of Gauss, Jacobi, and Jacobsthal, *Journal of Number Theory*, 1979, **11**: 349–389.

[4] Berndt B. C., Evans R. J., The determination of Gauss sums, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1981, **5**: 107–128.

[5] Chen L., On the classical Gauss sums and their some properties, *Symmetry*, 2018, **10**: 625.

[6] Chen L., Hu J. Y., A linear Recurrence Formula Involving Cubic Gauss Sums and Kloosterman Sums, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2018, **61**: 67–72.

[7] Chen Z. Y., Zhang W. P., On the fourth-order linear recurrence formula related to classical Gauss sums, *Open Mathematics*, 2017, **15**: 1251–1255.

[8] Chowla S., Cowles J., Cowles M., On the number of zeros of diagonal cubic forms, *Journal of Number Theory*, 1977, **9**: 502–506.

[9] Ireland K., Rosen M., A Classical Introduction to Modern Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1982.

[10] Kim T., Dolgy D. V., Kim D. S., Representing sums of finite products of Chebyshev polynomials of the second kind and Fibonacci polynomials in terms of Chebyshev polynomials, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 2018, **28**: 321–336.

[11] Kim T., Kim D. S., Dolgy D. V., et al., Sums of finite products of Chebyshev polynomials of the third and fourth kinds, *Advances in Difference Equations*, 2018, **2018**: 283.

[12] Kim T., Kim D. S., Dolgy D. V., et al., Representation by several orthogonal polynomials for sums of finite products of Chebyshev polynomials of the first, third and fourth kinds, *Advances in Difference Equations*, 2019, **2019**: 110.

[13] Kim T., Kim D. S., Jang L. C., et al., Representing by several orthogonal polynomials for sums of finite products of Chebyshev polynomials of the first kind and Lucas polynomials, *Advances in Difference Equations*, 2019, **2019**: 162.

[14] Pan C. D., Pan C. B., Goldbach Conjecture (in Chinese), Science Press, Beijing, 1992.

[15] Ren G. L., He D. D., Zhang T. P., On general partial Gaussian sums, *J. Inequal. Appl.*, 2016, **2016**: 295.

[16] Shen S. M., Zhang W. P., On the quartic Gauss sums and their recurrence property, *Advances in Difference Equations*, 2017, **2017**: 43.

[17] Wang T. T., Chen G. H., A note on the classical Gauss sums, *Mathematics*, 2018, **6**: 313.

[18] Zhang W. P., Hu J. Y., The number of solutions of the diagonal cubic congruence equation mod p, *Mathematical Reports*, 2018, **20**: 73–80.