第64卷第3期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.64, No.3
2021年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES May, 2021

文章编号: 0583-1431(2021)03-0443-12 **文献标识码: A**

一个实现包含圈 $C_3,\ldots,C_\ell$ 可图序列问题的渐近解

李光明 尹建华

海南大学理学院 海口 570228
E-mail: m15964910127@163.com; yinjh@hainanu.edu.cn

摘 要 一个非增的非负整数序列 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)$ 称为是可图的如果它是一个 n 个顶点的简单图 G 的度序列. 一个可图序列 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)$ 称为是蕴含 ${}_3C_\ell$- 可图的如果 π 有一个实现包含每一个长为 r 的圈, 其中 $3\le r\le \ell$. 众所周知, 如果一个关于 ℓ 个顶点的图 G 的非增的度序列 $(d_1,\ldots,d_\ell)$ 满足 Pósa 条件, 即如果对于每一个 i, $1\le i<\frac{\ell}{2}$, 有 $d_{\ell+1-i}\ge i+1$, 则 G 是泛圈的或者是二部的. 在本文中, 我们得到了一个蕴含 ${}_3C_\ell$- 可图序列的 Pósa- 型条件, 即证明如果 $\ell\ge 5$ 是一个整数, $n\ge \ell$ 且 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)$ 是一个可图序列满足对于每一个 i, $1\le i<\frac{\ell}{2}$, 有 $d_{\ell+1-i}\ge i+1$, 则 π 是蕴含 ${}_3C_\ell$- 可图的. 我们也证明了这个结果是 Li 等人 [*Adv. Math.* (*China*), 2004, **33**(3): 273–283] 一个问题的渐近解. 作为应用, 我们也证明了此结果完全包含了 Lai [*J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 2004, **49**: 57–64] 对于 $\ell\ge 5$ 且 $n\ge\ell$, $\sigma(C_\ell,n)$ 之值.

关键词 可图序列; 实现; 蕴含 ${}_3C_\ell$- 可图序列
MR(2010) 主题分类 05C07, 05C35
中图分类 O157.5

Asymptotic Solution to a Problem about Graphic Sequences with a Realization Containing Cycles $C_3,\ldots,C_\ell$

Guang Ming LI Jian Hua YIN

School of Science, Hainan University, Haikou 570228, *P. R. China*
E-mail: *m15964910127@163.com*; *yinjh@hainanu.edu.cn*

Abstract A non-increasing sequence $\pi=(d_1,\ldots,d_n)$ of nonnegative integers is said to be *graphic* if it is realizable by a simple graph G on n vertices. A graphic sequence $\pi=(d_1,\ldots,d_n)$ is said to be potentially ${}_3C_\ell$-graphic if there is a realization of π containing cycles of every length r, $3\le r\le\ell$. It is well-known that if the non-increasing degree sequence $(d_1,\ldots,d_\ell)$ of a graph G on ℓ vertices satisfies the Pósa

收稿日期: 2020-03-27; 接受日期: 2020-06-01
基金项目: 海南省自然科学基金高层次人才资助项目 (2019RC085); 国家自然科学基金资助项目 (11961019)
通讯作者: 尹建华

condition that $d_{\ell+1-i} \geq i+1$ for every i with $1 \leq i < \frac{\ell}{2}$, then G is either pancyclic or bipartite. In this paper, we obtain a Pósa-type condition of potentially ${}_3C_\ell$-graphic sequences, that is, we prove that if $\ell \geq 5$ is an integer, $n \geq \ell$ and $\pi = (d_1, \ldots, d_n)$ is a graphic sequence with $d_{\ell+1-i} \geq i+1$ for every i with $1 \leq i < \frac{\ell}{2}$, then π is potentially ${}_3C_\ell$-graphic. We show that this result is an asymptotic solution to a problem due to Li et al. [*Adv. Math.* (*China*), 2004, **33**(3): 273–283]. As an application, we also show that this result completely implies the value $\sigma(C_\ell, n)$ for $\ell \geq 5$ and $n \geq \ell$ due to Lai [*J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 2004, **49**: 57–64].

Keywords graphic sequence; realization; potentially ${}_3C_\ell$-graphic sequence
MR(2010) Subject Classification 05C07, 05C35
Chinese Library Classification O157.5

1 引言

这篇论文中的图都是有限, 无向且简单的. 这里没有定义的术语和标记均来源于 [1]. 由非负整数构成的序列 $\pi = (d_1, \ldots, d_n)$ (不要求是非增的) 被称为是可图的, 如果它是某个 n 个点的简单图 G 的度序列. 这种情况下, G 也被称为是 π 的一个实现. 由所有非负整数序列 $(d_1, \ldots, d_n)$ 具有 $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ 且 $d_1 \leq n-1$ 构成的集合记作 NS_n. 将 NS_n 中所有的可图序列构成的集合记作 GS_n. 对于一个非负整数序列 $\pi = (d_1, \ldots, d_n)$, 我们记 $\sigma(\pi) = d_1 + \cdots + d_n$. 一个序列 $\pi \in \mathrm{GS}_n$ 被称为是蕴含 C_ℓ- 可图的, 如果 π 有一个实现包含 C_ℓ 作为子图, 其中 C_ℓ 是长为 ℓ 的圈. 此外, 一个序列 $\pi \in \mathrm{GS}_n$ 被称为是蕴含 ${}_3C_\ell$- 可图的, 如果 π 有一个实现包含每一个长为 r 的圈, $3 \leq r \leq \ell$. Li 和 Yin 提出了两个问题如下.

问题 1.1 [7] 给出蕴含 C_ℓ- 可图序列的一个判定, 其中 $\ell \geq 3$.

问题 1.2 [7] 给出蕴含 ${}_3C_\ell$- 可图序列的一个判定, 其中 $\ell \geq 4$.

在文 [10] 中, Yin 完全解决了问题 1.1. 然而随着时间的推移, 问题 1.2 看起来似乎更具有挑战性. 一定程度上, 通常人们对于蕴含 ${}_3C_\ell$- 可图序列所需要的条件知之甚少.

定理 1.3 设 $\pi = (d_1 \ldots, d_n) \in \mathrm{GS}_n$.

(i) [11] 如果 $n \geq 5$, $d_5 \geq 2$ 且 $d_4 \geq 3$, 则 π 是蕴含 ${}_3C_5$- 可图的.

(ii) [2] 如果 $n \geq 6$, $d_6 \geq 2$ 且 $d_5 \geq 3$, 则 π 是蕴含 ${}_3C_6$- 可图的.

(iii) [12] 如果 $\ell \geq 7$, $n \geq \ell$ 且 $d_\ell \geq \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$, 则 π 是蕴含 ${}_3C_\ell$- 可图的.

众所周知, 如果一个 ℓ 个点的图 G 的非增度序列 $(d_1, \ldots, d_\ell)$ 满足 Pósa 条件, 即对于 $1 \leq i < \frac{\ell}{2}$, 有 $d_{\ell+1-i} \geq i+1$, 则 G 是泛圈的或者是二部的 [9]. 受这个结果和定理 1.3 的启发, 我们得到了蕴含 ${}_3C_\ell$- 可图序列的一个 Pósa- 型条件, 其中 $\ell \geq 5$.

定理 1.4 如果 $\ell \geq 5$ 是一个整数, $n \geq \ell$ 且 $\pi = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathrm{GS}_n$ 满足对于每一个 $1 \leq i < \frac{\ell}{2}$ (即 $i = 1, \ldots, \lceil \frac{\ell}{2} \rceil - 1$), 有 $d_{\ell+1-i} \geq i+1$, 则 π 是蕴含 ${}_3C_\ell$- 可图的.

定理 1.4 在某种意义上是最好可能的, 比如对每一个 $i = 1, \ldots, \lceil \frac{\ell}{2} \rceil - 1$, 条件 $d_{\ell+1-i} \geq i+1$ 不能被 $d_{\ell+1-i} \geq i$ 所替代, 因为对 $\ell = 2m$, $((n-1)^i, (2m-i-1)^{m-i}, m^{m-i}, i^{n-2m+i})$ 和对 $\ell = 2m+1$, $((n-1)^i, (2m-i)^{m-i+1}, (m+1)^{m-i}, i^{n-2m+i-1})$ 都是可图的, 其中在一个序列中记号 x^y 代表 y 个连续的项 x, 但是 $((n-1)^i$, $(2m-i-1)^{m-i}$, m^{m-i}, $i^{n-2m+i})$ 不是蕴含 ${}_3C_{2m}$-

可图的, $((n-1)^i, (2m-i)^{m-i+1}, (m+1)^{m-i}, i^{n-2m+i-1})$ 也不是蕴含 ${}_3C_{2m+1}$- 可图的. 这说明定理 1.4 是问题 1.2 的一个渐近解.

在文 [6] 中, Lai 曾经考虑了一个关于蕴含 C_ℓ- 可图序列的极值问题如下: 确定一个最小的正偶数 $\sigma(C_\ell,n)$, 使得对于每一个满足 $\sigma(\pi)\ge\sigma(C_\ell,n)$ 的序列 $\pi\in\mathrm{GS}_n$ 是蕴含 C_ℓ- 可图的. 我们称 $\sigma(C_\ell,n)$ 为 C_ℓ 的蕴含数. 因为 $\sigma(\pi)$ 是 π 的任何实现的边数的两倍, 这个问题可以视为是 C_ℓ 的 Turán 数的一个蕴含度序列松弛. Lai [6] 证明了对 $m\ge 2$ 和 $n\ge 3m$, 有 $\sigma(C_{2m+1},n)=m(2n-m-1)+2$, 并且对 $m\ge 2$ 和 $n\ge 5m-2$, 有 $\sigma(C_{2m+2},n)=m(2n-m-1)+4$. 作为一个应用, 定理 1.4 完全包含了当 $\ell\ge 5$ 且 $n\ge\ell$ 时, $\sigma(C_\ell,n)$ 之值.

定理 1.5 设 $m\ge 2$, 则当 $n\ge 2m+1$ 时, 有 $\sigma(C_{2m+1},n)=\max\{2n+4m^2-6m, m(2n-m-1)\}+2$; 当 $n\ge 2m+2$ 时, 有 $\sigma(C_{2m+2},n)=\max\{2n+4m^2-2m-2, m(2n-m-1)+2\}+2$.

2 定理 1.4 和 1.5 的证明

我们首先介绍一些有用的已知定理和引理.

设 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)\in\mathrm{NS}_n$, 并且设 k 是一个满足 $1\le k\le n$ 的整数. 我们定义 π_k' 为一个非增的序列, 使得 π_k' 是由 π 通过删除 d_k, 并把 $d_1,\ldots,d_{k-1},d_{k+1},\ldots,d_n$ 中的 d_k 个最大项每一项减 1 后而得到的序列. 我们称 π_k' 是通过 π 删去 d_k 后得到的剩余序列.

定理 2.1 [5] $\pi\in\mathrm{GS}_n$ 当且仅当 $\pi_k'\in\mathrm{GS}_{n-1}$.

定理 2.2 [3] 设 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)\in\mathrm{NS}_n$, 其中 $\sigma(\pi)$ 是偶数, 则 $\pi\in\mathrm{GS}_n$ 当且仅当对于任意 $1\le t\le n-1$, 有 $\sum_{i=1}^t d_i\le t(t-1)+\sum_{i=t+1}^n\min\{t,d_i\}$.

注释 Nash-Williams [8] 证明: 为说明 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)\in\mathrm{NS}_n$ 是可图的, 只需要对满足 $d_t>d_{t+1}$ 的 t 来验证 $\sum_{i=1}^t d_i\le t(t-1)+\sum_{i=t+1}^n\min\{t,d_i\}$ 即可. 此外, 不难证明: 为说明 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)\in\mathrm{NS}_n$ 是可图的, 只需对满足 $1\le t\le f(\pi)$ 的 t 来验证 $\sum_{i=1}^t d_i\le t(t-1)+\sum_{i=t+1}^n\min\{t,d_i\}$ 即可, 其中 $f(\pi)=\max\{i\,|\,d_i\ge i\}$.

定理 2.3 [4] 如果 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)\in\mathrm{GS}_n$ 有一个实现 G 包含 H 作为子图, 则一定存在 π 的一个实现 G' 包含 H 使得 H 落在那些度为 $d_1,\ldots,d_{|V(H)|}$ 的顶点上.

引理 2.4 [12] 如果 $\ell\ge 3$ 且 $\pi=(d_1,\ldots,d_\ell)\in\mathrm{GS}_\ell$ 满足对每个 $1\le i<\frac{\ell}{2}$ (即 $i=1,\ldots,\lceil\frac{\ell}{2}\rceil-1$), 有 $d_{\ell+1-i}\ge i+1$, 则 π 有一个泛圈实现, 也就是说, π 有一个实现包含所有长度为 3 到 ℓ 的圈.

引理 2.5 [12] 如果 $m\ge 4$, $n\ge 2m$ 且 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)\in\mathrm{GS}_n$ 满足 $d_{2m}\ge m$, 则 π 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\ldots,d_{2m}$ 的顶点上.

我们还需要一系列引理如下.

引理 2.6 设 $m\ge 5$, $n\ge 2m+1$ 且 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)\in\mathrm{GS}_n$ 满足 $m-1\ge d_n\ge 1$, $d_{d_n-1}\ge m+1$, $d_{d_n}=\cdots=d_{m+1}=m$ 和对 $1\le i\le m-1$ 有 $d_{2m+1-i}\ge i+1$. 如果 $n\ge 2m+2$, 令 $\omega=(d_1-1,\ldots,d_{d_n-1}-1,d_{d_n},\ldots,d_{n-2},d_{n-1}-1)$ (也就是说, ω 是由 π 得到的, 通过删除 d_n 并且对每一个 $i\in\{1,\ldots,d_n-1,n-1\}$ 把 d_i 减 1), 并如果 $n=2m+1$ 且存在一个整数 k, $1\le k\le m-2$, 满足 $d_{2m+1-k}\ge k+2$ (这里我们选择最小的那个 k), 设 $\omega=(d_1-1,\ldots,d_{d_n-1}-1,d_{d_n},\ldots,d_{2m-k},d_{2m+1-k}-1,d_{2m+2-k},\ldots,d_{n-1})$, 则 ω 是可图的.

证明 记 $\omega=(\rho_1,\ldots,\rho_{n-1})$. 显然, 对 $1\le i\le d_n-1$, 有 $\rho_i=d_i-1$, $\rho_{d_n}=\cdots=\rho_{m+2}=m$

和 $\rho_{n-1} \geq d_n - 1$. 对于 $1 \leq t \leq d_n - 1$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{t} \rho_i \leq t(n-2) = t(t-1) + t(n-1-t) \leq t(t-1) + \sum_{i=t+1}^{n-1} \min\{t, \rho_i\}.$$

此外, 对 $t = m+2$, 我们也有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{t} \rho_i &\leq (n-2)(d_n-1) + m(m+3-d_n) \leq (m+2)(m+1) + (d_n-1)(n-t-1) \\ &\leq t(t-1) + \sum_{i=t+1}^{n-1} \min\{t, \rho_i\}.\end{aligned}$$

因此, 根据 $f(\rho) = m < m+2$ 和定理 2.2, ω 是可图的.

引理 2.7 设 $m \geq 5$, $n \geq 2m+1$ 且 $\pi = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathrm{GS}_n$ 满足 $m-1 \geq d_n \geq 1$, $d_{d_n-1} = d_{d_n} = \cdots = d_{m+2} = m$ 和 $d_{m+3} = \cdots = d_{2m+1} = m-1$. 记 $p = \max\{i \,|\, d_i \geq m+1\}$. 当 $p = 0$ 且 $n \geq 2m+3$ 时, 令 $\rho = (d_1, \ldots, d_{m+3}, d_{m+4}-1, \ldots, d_{2m}-1, d_{2m+2}-1, d_{2m+3}-1, d_{2m+4}, \ldots, d_n)$ (也就是说, ρ 是由 π 得到的, 通过删除 $d_{2m+1} = m-1$ 然后对于每一个 $i \in \{m+4, \ldots, 2m, 2m+2, 2m+3\}$ 把 d_i 减 1). 当 $p = 1$ 且 $n \geq 2m+2$ 时, 令 $\rho = (d_1-1, d_2, \ldots, d_{m+3}, d_{m+4}-1, \ldots, d_{2m}-1, d_{2m+2}-1, d_{2m+3}, \ldots, d_n)$. 当 $p = 2$ 时, 令 $\rho = (d_1-1, d_2-1, d_3, \ldots, d_{m+3}, d_{m+4}-1, \ldots, d_{2m}-1, d_{2m+2}, \ldots, d_n)$. 当 $p \geq 3$ 时, 令 $\rho = (d_1-1, \ldots, d_p-1, d_{p+1}, \ldots, d_{m+3}, d_{m+4}-1, \ldots, d_{2m+2-p}-1, d_{2m+3-p}, \ldots, d_{2m}, d_{2m+2}, \ldots, d_n)$, 则 ρ 是可图的.

证明 设 $\rho' = (\rho_1, \ldots, \rho_{n-1})$ 是 ρ 的一个非增重排. 显然, $\rho_i = d_i - 1$, 其中 $1 \leq i \leq p$; $\rho_i = d_i = m$, 其中 $p+1 \leq i \leq m+2$, 且 $\rho_{n-1} \geq d_n - 1$. 对于 $1 \leq t \leq p$, 根据 $p \leq d_n - 2$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{t} \rho_i \leq t(n-2) = t(t-1) + t(n-1-t) = t(t-1) + \sum_{i=t+1}^{n-1} \min\{t, \rho_i\}.$$

此外, 对 $t = m+2$, 我们也有

$$\sum_{i=1}^{t} \rho_i \leq p(n-2) + (t-p)m \leq t(t-1) + (n-1-t)p \leq t(t-1) + \sum_{i=t+1}^{n-1} \min\{t, \rho_i\}.$$

因此, 根据 $f(\rho') = m < m+2$ 和定理 2.2, ρ' 是可图的, 也就是说, ρ 是可图的.

引理 2.8 设 $m \geq 5, n \geq 2m+1$ 且 $\pi = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathrm{GS}_n$ 满足 $m-1 \geq d_{2m} \geq d_{2m+1} \geq 1$, $d_{d_n-1} = d_{d_n} = \cdots = d_{m+1} = m$ 和 $d_{2m+1-i} \geq i+1$, 其中 $1 \leq i \leq m-1$. 记 $p = \max\{i \,|\, d_i \geq m+1\}$. 显然, $d_{2m} \geq p+2$. 令 $\omega_1 = (d_1-1, \ldots, d_m-1, d_{m+1}, d_{m+3}, \ldots, d_n)$ (也就是说, ω_1 是由 π 得到的, 通过删去 $d_{m+2} = m$, 然后对每一个 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 把 d_i 减 1). 实际上, ω_1 (不必是非增的) 是 π 通过删去 $d_{m+2} = m$ 所得到的剩余序列. 如果 $p \geq 1$ 或 $d_{2m} \leq m-2$, 令 $\omega_2 = (d_1-2, \ldots, d_p-2, d_{p+1}-1, \ldots, d_{m+1}-1, d_{m+3}-1, \ldots, d_r-1, d_{r+1}, \ldots, d_{2m-1}, d_{2m+1}, \ldots, d_n)$, 其中 $r = m+1+d_{2m}-p$. 如果 $p = 0$ 且 $d_{2m} = m-1$, 令 $\omega_2 = (d_1-2, \ldots, d_p-2, d_{p+1}-1, \ldots, d_{m+1}-1, d_{m+3}-1, \ldots, d_{2m-1}-1, d_{2m+1}-1, d_{2m+2}, \ldots, d_n)$, 则 ω_2 是可图的.

证明 如果 $d_r = m$, 则 ω_2 (不必是非增的) 是通过 ω_1 删去 d_{2m} 所得到的剩余序列. 根据定理 2.1, ω_1 和 ω_2 都是可图的. 假设 $d_r \leq m-1$. 令 $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{n-2})$ 是 ω_2 的非增重排. 显然, 对 $1 \leq k \leq p$, 有 $\rho_k = d_k - 2$, 对 $p+1 \leq k \leq m+1$ 有 $\rho_k = m-1$, 且 $\rho_{n-2} \geq d_n - 1$. 对 $1 \leq t \leq p$,

根据 $p\le d_n-1$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{t}\rho_i=\sum_{i=1}^{t}(d_i-2)\le t(n-3)=t(t-1)+t(n-2-t)\le t(t-1)+\sum_{i=t+1}^{n-2}\min\{t,\rho_i\}.$$

此外, 对于 $t=m+1$, 我们也有

$$\sum_{i=1}^{t}\rho_i\le p(n-3)+(t-p)(m-1)\le t(t-1)+p(n-2-t)\le t(t-1)+\sum_{i=t+1}^{n-2}\min\{t,\rho_i\}.$$

因此, 根据 $f(\rho)=m-1<m+1$ 和定理 2.2, 可知 ρ 是可图的, 也就是说 ω_2 是可图的.

引理 2.9　设 $m\ge 5$ 且 $\pi=(d_1,\dots,d_{2m+1})\in \mathrm{GS}_{2m+1}$ 满足对 $2\le i\le m+2$ 有 $d_i=m$ 和对 $1\le i\le m-2$ 有 $d_{2m+1-i}=i+1$. 如果 $d_{2m+1}=2$ 且 $d_1\ge m+1$, 或者如果 $d_{2m+1}=1$ 且 $d_1=m$, 则 π 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$ 的顶点上.

证明　首先, 假设 $d_{2m+1}=2$ 且 $d_1\ge m+2$. 那么此时 $\pi=(d_1,m^{m+1},m-1,m-2,\dots,2,2)$. 令 $\omega_0=\pi$. 令 $\omega_1=(d_1',\dots,d_{2m}')$ 为通过 π 删去 $d_{2m+1}=2$ 所得到的剩余序列, 则 $\omega_1=(d_1-1,m^m,m-1,m-1,m-2,\dots,2)$. 令 $\omega_2=(d_1'',\dots,d_{2m-1}'')$ 为通过 ω_1 删去 $d_{m+3}'=m-1$ 所得到的剩余序列, 则 $\omega_2=(d_1-2,m^2,(m-1)^{m-1},m-2,\dots,2)$. 令 $\omega_3=(d_1''',\dots,d_{2m-2}''')$ 为通过 ω_2 删去 $d_{2m-2}''=3$ 所得到的剩余序列, 则 $\omega_3=(d_1-3,(m-1)^{m+1},m-2,\dots,2)$. 根据定理 2.1 和引理 2.4, ω_3 有一个泛圈实现 G_3. 对于 i 依次等于 $2,1,0$, 令 G_i 由 G_{i+1} 添加一个新的点 u_i 得到, 其中 u_i 与那些从 ω_i 变到 ω_{i+1} 时度减少了 1 的点相连, 则 G_0 是 π 的一个实现且包含 G_3. 令 $C=x_1x_2\dots x_{2m-2}x_1$ 为 G_3 的一个 Hamilton 圈, 则 $V(G_0)=\{x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1,u_2\}$, $d_{G_0}(u_0)=d_{2m+1}=2$, $d_{G_0}(u_1)=d_{m+3}=m-1$ 且 $d_{G_0}(u_2)=d_{2m-1}=3$. 因此, C 落在那些度为 $d_1,\dots,d_{m+2},d_{m+4},\dots,d_{2m-2},d_{2m}$ 的顶点上. 为了方便, 令 $\{i_1,\dots,i_{m+1}\}\subseteq\{1,2,\dots,2m-2\}$, 从而对 $1\le j\le m+1$ 有 $d_{G_0}(x_{i_j})=d_j$. 显然, $u_2x_{i_1},u_2x_{i_2},u_2x_{i_3}\in E(G_0)$, 并且对 $j=1$ 和 $4\le j\le m+1$, 有 $u_1x_{i_j}\in E(G_0)$. 此外, 易知存在四个不同的正整数 $p_1,p_2,p_3,p_4\in\{i_1,\dots,i_{m+1}\}$ 满足 $x_{p_1}x_{p_2},x_{p_3}x_{p_4}\in E(C)$. 我们现在说明 π 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$ 的顶点上. 不失一般性, 我们只需考虑下面两种情况.

情况 1　$x_{i_1}\ne x_{p_1},x_{p_2},x_{p_3},x_{p_4}$.

如果 $x_{i_2}=x_{p_1}$ 且 $x_{i_3}=x_{p_2}$, 则 $u_2x_{p_1},u_2x_{p_2},u_1x_{p_3},u_1x_{p_4}\in E(G_0)$, 这说明 G_0 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$ 的顶点上. 如果 $x_{i_2}=x_{p_1}$ 且 $x_{i_3}\ne x_{p_2}$, 令 $G_1=G_0-\{u_2x_{i_3},u_1x_{p_2}\}+\{u_2x_{p_2},u_1x_{i_3}\}$, 则 G_1 是 π 的实现并且有 $u_2x_{p_1},u_2x_{p_2},u_1x_{p_3},u_1x_{p_4}\in E(G_1)$. 因此 G_1 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$ 的顶点上. 如果 $x_{i_2}\ne x_{p_1},x_{p_2}$ 且 $x_{i_3}\ne x_{p_1},x_{p_2}$, 令 $G_1=G_0-\{u_2x_{i_2},u_2x_{i_3},u_1x_{p_1},u_1x_{p_2}\}+\{u_2x_{p_1},u_2x_{p_2},u_1x_{i_2},u_1x_{i_3}\}$, 则 G_1 是 π 的一个实现并且包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$ 的顶点上.

情况 2　$x_{i_1}=x_{p_1}$.

如果 $x_{i_2}=x_{p_3}$ 且 $x_{i_3}=x_{p_4}$, 则 $u_2x_{p_3},u_2x_{p_4},u_1x_{p_1},u_1x_{p_2}\in E(G_0)$ 且 G_0 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$ 的顶点上. 如果 $x_{i_2}=x_{p_3}$ 且 $x_{i_3}\ne x_{p_4}$, 令 $G_1=G_0-\{u_2x_{i_3},u_1x_{p_4}\}+\{u_2x_{p_4},u_1x_{i_3}\}$, 则 G_1 是 π 的一个实现, 并且包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$ 的顶点上. 如果 $x_{i_2}\ne x_{p_3},x_{p_4}$ 且 $x_{i_3}\ne x_{p_3},x_{p_4}$, 令 $G_1=G_0-\{u_2x_{i_2},u_2x_{i_3},u_1x_{p_3},u_1x_{p_4}\}+\{u_2x_{p_3},u_2x_{p_4},u_1x_{i_2},u_1x_{i_3}\}$, 则 G_1 是 π 的一个实现并且包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$ 的顶点上.

现在假设 $d_{2m+1}=2$ 且 $d_1=m+1$, 或者假设 $d_{2m+1}=1$ 且 $d_1=m$, 则 $\pi=(d_1,m^{m+1},m-1,m-2,\dots,2,d_{2m+1})$. 令 $\omega_1=(m^{m+1},(m-1)^2,m-2,\dots,2)$, $\omega_2=(m^2,(m-1)^m,m-2,\dots,2)$ 和 $\omega_3=((m-1)^{m+2},m-2,\dots,3)$. 显然, ω_1 是通过 π 删去项 d_{2m+1} 所得到的剩余序列, ω_2 是通过 ω_1 删去项 $m-1$ 所得到的剩余序列, ω_3 是通过 ω_2 删去项 2 所得到的剩余序列. 根据定理 2.1 和引理 2.4, ω_3 有一个泛圈实现 G_3. 对于 i 依次等于 $2,1,0$, 令 G_i 通过由 G_{i+1} 添加一个点 u_i 得到, 其中 u_i 与那些从 ω_i 变到 ω_{i+1} 时度减少了 1 的点相连, 则 G_0 是 π 的一个实现并且包含 G_3. 令 $C=x_1x_2\dots x_{2m-2}x_1$ 为 G_3 的一个 Hamilton 圈, 则 $V(G_0)=\{x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1,u_2\}$, $d_{G_0}(u_0)=d_{2m+1}$, $d_{G_0}(u_1)=d_{m+3}=m-1$ 且 $d_{G_0}(u_2)=d_{2m}=2$. 因此, C 落在那些度为 $d_1,\dots,d_{m+2},d_{m+4},\dots,d_{2m-1}$ 的顶点上. 方便起见, 令 $\{i_1,\dots,i_{m+1}\}\subseteq\{1,2,\dots,2m-2\}$ 满足对 $1\le j\le m+1$, 有 $d_{G_0}(x_{i_j})=d_j$. 显然 $u_2x_{i_1},u_2x_{i_2}\in E(G_0)$ 且对 $3\le j\le m+1$, 有 $u_1x_{i_j}\in E(G_0)$. 此外, 存在四个不同的正整数 $p_1,p_2,p_3,p_4\in\{i_1,\dots,i_{m+1}\}$ 满足 $x_{p_1}x_{p_2},x_{p_3}x_{p_4}\in E(C)$. 不失一般性, 如果 $x_{i_1}=x_{p_1}$ 且 $x_{i_2}=x_{p_2}$, 则 $u_2x_{p_1},u_2x_{p_2},u_1x_{p_3},u_1x_{p_4}\in E(G_0)$, 因此 G_0 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_1,u_2$ 的顶点上. 换句话说, G_0 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$ 的顶点上. 如果 $x_{i_1}=x_{p_1}$ 且 $x_{i_2}\ne x_{p_2}$, 令 $G_1=G_0-\{u_2x_{i_2},u_1x_{p_2}\}+\{u_2x_{p_2},u_1x_{i_2}\}$, 则 G_1 是 π 的一个实现并且 $u_2x_{p_1},u_2x_{p_2},u_1x_{p_3},u_1x_{p_4}\in E(G_1)$, 这说明 G_1 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$ 的顶点上. 如果 $x_{i_1}\ne x_{p_1},x_{p_2}$ 且 $x_{i_2}\ne x_{p_1},x_{p_2}$, 令 $G_1=G_0-\{u_2x_{i_1},u_2x_{i_2},u_1x_{p_1},u_1x_{p_2}\}+\{u_2x_{p_1},u_2x_{p_2},u_1x_{i_1},u_1x_{i_2}\}$, 则 G_1 是 π 的一个实现并且 $u_2x_{p_1},u_2x_{p_2},u_1x_{p_3},u_1x_{p_4}\in E(G_1)$. 因此 G_1 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$的顶点上.

引理 2.10 设 $\ell\in\{7,8\}$, $n\ge\ell$ 且 $\pi=(d_1,\dots,d_n)\in\mathrm{GS}_n$ 满足 $d_{\ell-2}\ge4$, $d_{\ell-1}\ge3$ 和 $d_\ell\ge2$, 则 π 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_\ell$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_\ell$ 的顶点上.

证明 首先考虑 $\ell=8$ 的情况. 根据引理 2.4 知, 当 $n=8$ 时引理 2.10 成立. 假设 $n\ge9$. 如果 $d_8\ge4$, 根据引理 2.5, 则 π 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_8$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_8$ 的顶点上. 假设 $d_8\le3$. 如果 $d_{d_n}\ge5$, 则通过 π 删去 d_n 所得到的剩余序列 $\pi_n'=(d_1',\dots,d_{n-1}')$ 满足 $d_6'\ge4$, $d_7'\ge3$ 和 $d_8'\ge2$. 根据归纳假设, π_n' 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_8$ 在那些度为 $d_1',\dots,d_8'$ 的顶点上, 因此 π 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_8$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_8$ 的顶点上. 假设 $d_{d_n}=\cdots=d_6=4$ 且 $d_n\ge1$. 记 $p=\max\{i\,|\,d_i\ge5\}$.

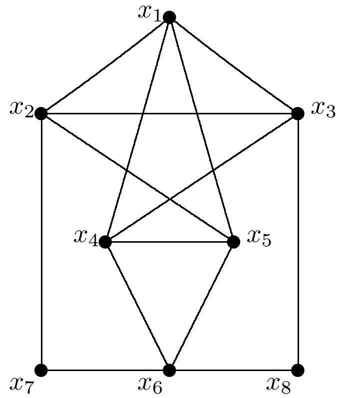
情况 1 $d_n=1$.

此时 $p=0$. 如果 $n\ge10$, 令 $\pi'=(d_1,\dots,d_{n-2},d_{n-1}-1)$, 如果 $n=9$ 且 $d_8\ge3$, 令 $\pi'=(d_1,\dots,d_7,d_8-1)$, 如果 $n=9$, $d_8=2$ 且 $d_7=4$, 令 $\pi'=(d_1,\dots,d_6,d_7-1,d_8)$. 易知 $\pi'\in\mathrm{GS}_{n-1}$. 记 $\pi'=(d_1',\dots,d_{n-1}')$. 显然, π' 满足 $d_6\ge4$, $d_7\ge3$ 和 $d_8\ge2$. 根据归纳假设知, π' 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_8$ 在那些度为 $d_1',\dots,d_8'$ 的顶点上, 因此, π 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_8$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_8$ 的顶点上. 因此我们可以假设 $n=9$, $d_8=2$ 和 $d_7=3$, 也就是说 $\pi=(4^6,3,2,1)$. 令 $\pi'=(4^6,3^2)$, 显然它是通过 π 删去 $d_9=1$ 并且把 d_8 减 1 得到的. 图 1 表明 π' 有一个泛圈实现, 这说明 π 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_8$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_8$ 的顶点上.

情况 2 $d_n=2$.

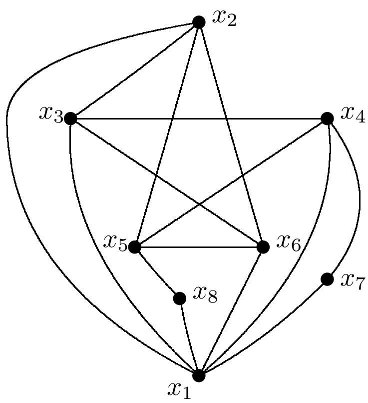
此时 $p\le1$. 如果 $p=1$ 且 $n\ge10$, 或者如果 $p=1$, $n=9$ 且 $d_8\ge3$, 令 $\pi'=(d_1-1,d_2,\dots,d_{n-2},d_{n-1}-1)$. 如果 $p=1$, $n=9$, $d_8=2$ 且 $d_7=4$, 令 $\pi'=(d_1-1,d_2,\dots,d_6,d_7-1,d_8)$. 如果 $p=0$ 且 $n\ge11$, 或者如果 $p=0$, $n=10$ 且 $d_8\ge3$, 令 $\pi'=(d_1,\dots,d_{n-3},d_{n-2}-$

$1, d_{n-1}-1)$. 如果 $p=0$, $n=10$, $d_8=2$ 且 d_7=4, 令 $\pi'=(d_1,\dots,d_6,d_7-1,d_8,d_9-1)$. 易知 $\pi'\in \mathrm{GS}_{n-1}$. 记 $\pi'=(d_1',\dots,d_{n-1}')$. 显然, π' 满足 $d_6\geq 4$, $d_7\geq 3$ 和 $d_8\geq 2$. 根据归纳假设, π' 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_8$ 在那些度为 $d_1',\dots,d_8'$ 的顶点上, 因此 π 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_8$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_8$ 的顶点上. 因此, 我们可以假设 $p=1$, $n=9$, $d_8=2$ 且 $d_7=3$, 或者假设 $p=0$, $n=10$, $d_8=2$ 且 $d_7=3$, 或者假设 $p=0$ 且 $n=9$. 如果 $p=0$, $n=10$, $d_8=2$ 且 $d_7=3$, 那么 $\pi=(4^6,3,2^3)$, 此时 $\sigma(\pi)$ 为奇数, 这显然是不可能的. 如果 $p=1$, $n=9$, $d_8=2$ 且 $d_7=3$, 那么 $\pi=(5,4^5,3,2^2)$ 或者 $(7,4^5,3,2^2)$. 如果 $\pi=(5,4^5,3,2^2)$ (相应的, $\pi=(7,4^5,3,2^2)$), 令 $\pi'=(4^6,2^2)$ (相应的, $\pi'=(6,4^5,2^2)$), 它是通过 π 删去 $d_9=2$ 并且把 d_1 和 d_7 都减 1 得到的. 图 1 (相应的, 图 2) 表明 π' 有一个泛圈实现. 因此 π 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_8$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_8$ 的顶点上. 如果 $p=0$ 且 $n=9$, 那么 $\pi=(4^7,2^2)$ 或者 $(4^6,3^2,2)$. 如果 $\pi=(4^7,2^2)$ (相应的, $\pi=(4^6,3^2,2)$), 令 $\pi'=(4^5,3^2,2)$ (相应的, $\pi'=(4^6,2^2)$)), 它是通过 π 删去 $d_9=2$ 并且把 d_6 和 d_7 减 1 (相应的, 把 d_7 和 d_8 减 1) 得到的. 图 3 (相应的, 图 1) 表明 π' 有一个泛圈实现. 因此 π 有一个实现包含 $C_3,\dots,C_8$ 在那些度为 $d_1,\dots,d_8$ 的顶点上.



$C_3=x_4x_5x_6x_4$
$C_4=x_1x_4x_6x_5x_1$
$C_5=x_1x_4x_3x_2x_5x_1$
$C_6=x_1x_2x_7x_6x_8x_3x_1$
$C_7=x_4x_5x_2x_7x_6x_8x_3x_4$
$C_8=x_2x_5x_1x_4x_3x_8x_6x_7x_2$

图 1 $\pi=(4^6,2^2)$ 的泛圈实现



$C_3=x_1x_2x_3x_1$
$C_4=x_1x_8x_5x_6x_1$
$C_5=x_2x_5x_4x_3x_6x_2$
$C_6=x_4x_3x_6x_5x_8x_1x_4$
$C_7=x_4x_3x_6x_5x_8x_1x_7x_4$
$C_8=x_5x_2x_6x_3x_4x_7x_1x_8x_5$

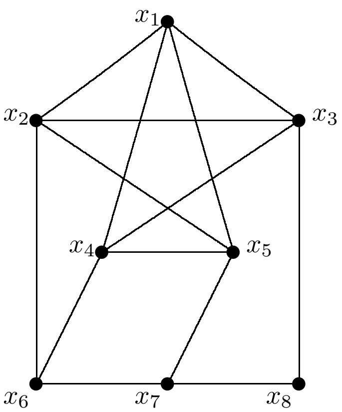
图 2 $\pi=(6,4^5,2^2)$ 的泛圈实现

情况 3 $d_n=3$.

此时 $p\leq 2$. 如果 $p=2$, 令 $\pi'=(d_1-1,d_2-1,d_3,\dots,d_{n-2},d_{n-1}-1)$. 如果 $p=1$ 且 $n\geq 10$, 或者如果 $p=1$, $n=9$ 且 $d_7=4$, 令 $\pi'=(d_1-1,d_2,\dots,d_{n-3},d_{n-2}-1,d_{n-1}-1)$. 如果 $p=0$ 且

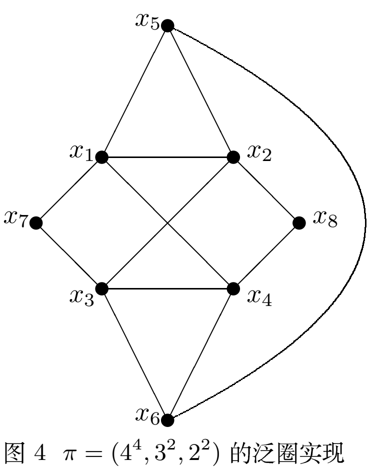
$n \geq 11$, 或者如果 $p=0$, $n=10$ 且 $d_7=4$, 令 $\pi'=(d_1,\ldots,d_{n-4},d_{n-3}-1,d_{n-2}-1,d_{n-1}-1)$. 易知 $\pi' \in \mathrm{GS}_{n-1}$. 记 $\pi'=(d'_1,\ldots,d'_{n-1})$. 显然, π' 满足 $d_6 \geq 4$, $d_7 \geq 3$ 和 $d_8 \geq 2$. 根据归纳假设, π' 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_8$ 在那些度为 $d'_1,\ldots,d'_8$ 的顶点上, 因此 π 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_8$ 在那些度为 $d_1,\ldots,d_8$ 的顶点上. 因此, 我们可以假设 $p=1$, $n=9$ 且 $d_7=3$, 或者假设 $p=0$, $n=10$ 且 $d_7=3$, 或者假设 $p=0$ 且 $n=9$. 如果 $p=1$, $n=9$ 且 $d_7=3$, 则 $\pi=(5,4^5,3^3)$ 或者 $(7,4^5,3^3)$. 如果 $\pi=(5,4^5,3^3)$ (相应的, $(7,4^5,3^3)$), 令 $\pi'=(4^6,2^2)$ (相应的, $\pi'=(6,4^5,2^2)$), 它是通过 π 删去 $d_9=3$ 然后把 d_1, d_7 和 d_8 都减 1 得到的. 图 1 (相应的, 图 2) 表明 π' 有一个泛圈实现. 因此 π 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_8$ 在那些度为 $d_1,\ldots,d_8$ 的顶点上. 如果 $p=0$, $n=10$ 且 $d_7=3$, 则 $\pi=(4^6,3^4)$. 令 $\pi'=(d'_1,\ldots,d'_9)=(4^6,2^3)$, 它是通过 π 删去 $d_{10}=3$ 并且把 d_7, d_8 和 d_9 都减 1 得到的, 然后令 $\pi''=(4^4,3^2,2^2)$, 它是通过 π' 删去 $d'_9=2$, 并且把 d'_5 和 d'_6 都减去 1 得到的. 图 4 表明 π'' 有一个泛圈实现, 这说明 π 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_8$ 在那些度为 $d_1,\ldots,d_8$ 的顶点上. 如果 $p=0$ 且 $n=9$, 那么 $\pi=(4^7,3^2)$. 令 $\pi'=(4^5,3^2,2)$, 它是通过 π 删去 $d_9=3$, 并且把 d_6, d_7 和 d_8 都减 1 得到的. 图 3 表明 π' 有一个泛圈实现, 这说明 π 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_8$ 在那些度为 $d_1,\ldots,d_8$ 的顶点上.

$\ell=7$ 的情况的证明是相似的, 这里我们省略它.



$C_3 = x_1x_2x_3x_1$
$C_4 = x_4x_5x_7x_6x_4$
$C_5 = x_1x_5x_2x_3x_4x_1$
$C_6 = x_1x_4x_6x_7x_8x_3x_1$
$C_7 = x_1x_4x_3x_8x_7x_6x_2x_1$
$C_8 = x_3x_2x_5x_1x_4x_6x_7x_8x_3$

图 3 $\pi=(4^5,3^2,2)$ 的泛圈实现



$C_3 = x_1x_5x_2x_1$
$C_4 = x_1x_7x_3x_2x_1$
$C_5 = x_1x_7x_3x_2x_5x_1$
$C_6 = x_1x_2x_8x_4x_3x_7x_1$
$C_7 = x_1x_7x_3x_4x_8x_2x_5x_1$
$C_8 = x_1x_7x_3x_6x_4x_8x_2x_5x_1$

图 4 $\pi=(4^4,3^2,2^2)$ 的泛圈实现

引理 2.11 设 $m\geq 4$, $n\geq 2m$ 且 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)\in \mathrm{GS}_n$ 满足对 $1\leq i\leq m-1$ 有 $d_{2m+1-i}\geq i+1$, 则 π 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\ldots,d_{2m}$ 的顶点上.

证明 根据引理 2.10 易知引理 2.11 在 $m=4$ 时成立. 假设 $m\geq 5$. 根据引理 2.4 易知引理 2.11 在 $n=2m$ 时成立. 我们进一步假设 $n\geq 2m+1$ 和 $d_n\geq 1$. 如果 $d_{2m}\geq m$, 根据引理 2.5, 则 π 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\ldots,d_{2m}$ 的顶点上. 假设 $d_{2m}\leq m-1$.

如果 $d_{d_n}\geq m+1$, 则通过 π 删去 d_n 所得到的剩余序列 $\pi_n'=(d_1',\ldots,d_{n-1}')$ 满足对 $1\leq i\leq m-1$ 有 $d_{2m+1-i}'\geq i+1$. 根据归纳假设, π_n' 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1',\ldots,d_{2m}'$ 的顶点上, 这说明 π 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\ldots,d_{2m}$ 的顶点上. 因此可以假设 $d_{d_n}=\cdots=d_{m+2}=m$. 记 $p=\max\{i\,|\,d_i\geq m+1\}$.

如果 $d_{d_n-1}\geq m+1$ 且 $n\geq 2m+2$, 令 $\omega=(d_1-1,\ldots,d_{d_n-1}-1,d_{d_n},\ldots,d_{n-2},d_{n-1}-1)$, 并且如果 $d_{d_n-1}\geq m+1$, $n=2m+1$ 且存在一个整数 k, $1\leq k\leq m-2$, 满足 $d_{2m+1-k}\geq k+2$ (我们选择最小的 k), 令 $\omega=(d_1-1,\ldots,d_{d_n-1}-1,d_{d_n},\ldots,d_{2m-k},d_{2m+1-k}-1,d_{2m+2-k},\ldots,d_{n-1})$. 根据引理 2.6, $\omega\in \mathrm{GS}_{n-1}$. 记 $\omega=(\rho_1,\ldots,\rho_{n-1})$. 显然, ω 满足对 $1\leq i\leq m-1$ 有 $\rho_{2m+1-i}\geq i+1$. 根据归纳假设 ω 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_{2m}$ 在那些度为 $\rho_1,\ldots,\rho_{2m}$ 的顶点上, 因此 π 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\ldots,d_{2m}$ 的顶点上. 如果 $d_{d_n-1}\geq m+1$, $n=2m+1$ 且对 $1\leq i\leq m-2$ 有 $d_{2m+1-i}=i+1$, 根据 $1\leq d_{2m+1}\leq 2$ 和引理 2.9, 则 π 有一个实现包含 $C_3,\ldots,C_{2m}$ 在那些度为 $d_1,\ldots,d_{2m}$ 的顶点上. 因此可以进一步假设 $d_{d_n-1}=m$.

如果 $d_{m+3}=\cdots=d_{2m+1}=m-1$, 当 $p=0$ 且 $n\geq 2m+3$ 时, 令 $\rho=(d_1,\ldots,d_{m+3},d_{m+4}-1,\ldots,d_{2m}-1,d_{2m+2}-1,d_{2m+3}-1,d_{2m+4},\ldots,d_n)$; 当 $p=1$ 且 $n\geq 2m+2$ 时, 令 $\rho=(d_1-1,d_2,\ldots,d_{m+3},d_{m+4}-1,\ldots,d_{2m}-1,d_{2m+2}-1,d_{2m+3},\ldots,d_n)$; 当 $p=2$ 时, 令 $\rho=(d_1-1,d_2-1,d_3,\ldots,d_{m+3},d_{m+4}-1,\ldots,d_{2m}-1,d_{2m+2},\ldots,d_n)$; 当 $p\geq 3$ 时, 令 $\rho=(d_1-1,\ldots,d_p-1,d_{p+1},\ldots,d_{m+3},d_{m+4}-1,\ldots,d_{2m+2-p}-1,d_{2m+3-p},\ldots,d_{2m},d_{2m+2},\ldots,d_n)$. 根据引理 2.7 知 ρ 是可图的. 令 $\rho'=(\rho_1,\ldots,\rho_{n-1})$ 是 ρ 的非增重排. 显然, ρ' 满足对 $1\leq i\leq m-1$ 有 $\rho_{2m+1-i}\geq i+1$. 根据归纳假设, ρ' 有一个实现 G' 包含 $C_3,\ldots,C_{2m}$ 在那些度为 $\rho_1,\ldots,\rho_{2m}$ 的顶点上. π 的一个实现 G 可以由 G' 通过添加一个新的点得到, 其中这个点和那些由 π 变为 ρ' 时度减 1 了的点相连. 令 H 是 G' 中由度为 $\rho_1,\ldots,\rho_{2m}$ 的点所诱导的子图. 显然, H 是 G 的一个子图并且是泛圈的. 根据定理 2.3, π 有一个实现包含 H (因此包含 $C_3,\ldots,C_{2m}$) 在那些度为 $d_1,\ldots,d_{2m}$ 的顶点上. 因此现在可以进一步假设 $d_{m+3}=m$, 或者假设 $d_{m+3}=m-1$ 且 $d_{2m+1}\leq m-2$, 或者假设 $d_{m+3}=\cdots=d_{2m+1}=m-1$ 且对 $p\in\{0,1\}$ 有 $n\leq 2m+2-p$.

显然, $d_{2m}\geq p+2$. 令 $\omega_1=(d_1-1,\ldots,d_m-1,d_{m+1},d_{m+3},\ldots,d_n)$. 如果 $p\geq 1$ 或 $d_{2m}\leq m-2$, 令 $\omega_2=(d_1-2,\ldots,d_p-2,d_{p+1}-1,\ldots,d_{m+1}-1,\ d_{m+3}-1,\ldots,d_r-1,d_{r+1},\ldots,d_{2m-1},$ $d_{2m+1},\ldots,d_n)$, 其中 $r=m+1+d_{2m}-p$. 如果 $p=0$ 且 $d_{2m}=m-1$, 令 $\omega_2=(d_1-2,\ldots,d_p-2,d_{p+1}-1,\ldots,d_{m+1}-1,d_{m+3}-1,\ldots,d_{2m-1}-1,d_{2m+1}-1,d_{2m+2},\ldots,d_n)$. 根据引理 2.8, ω_2 是可图的. 令 $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_{n-2})$ 为 ω_2 的非增重排. 显然, 对 $1\leq i\leq m-2$ 有 $\rho_{2m-1-i}\geq i+1$, 并且 $\{d_1-2,\ldots,d_p-2,d_{p+1}-1,\ldots,d_{m+1}-1\}\subseteq\{\rho_1,\ldots,\rho_{2m-2}\}$. 此外, 易知 $d_{m+3}-1\in\{\rho_1,\ldots,\rho_{2m-2}\}$. 根据归纳假设, ρ 有一个实现 G_2 包含 $C_3,\ldots,C_{2m-2}$ 在那些度为 $\rho_1,\ldots,\rho_{2m-2}$ 的顶点上. 对于 i 依次等于 $1,0$, 令 G_i 为由 G_{i+1} 添加一个新的点 u_i 所得到的图, 其中 u_i 和那些由 ω_i 变到 ω_{i+1} 时度减 1 的点相连, 其中 $\omega_0=\pi$. 那么 G_0 是 π 的一个实现

并且包含 G_2. 令 $C = x_1x_2\cdots x_{2m-2}x_1$ 为 G_2 中的 C_{2m-2}. 那么 C 包含 $m+2$ 个点, 我们把这些点标记为 $x_{i_1},\dots,x_{i_{m+2}}$, 从而满足对 $1\le j\le m+1$, 有 $d_{G_0}(x_{i_j}) = d_j$ 和 $d_{G_0}(x_{i_{m+2}}) = d_{m+3}$. 此外有 $d_{G_0}(u_0) = d_{m+2} = m$ 和 $d_{G_0}(u_1) = d_{2m}$. 显然, $u_1x_{i_{m+1}}, u_1x_{i_{m+2}} \in E(G_0)$, 对 $1\le j\le p$ 有 $u_1x_{i_j}\in E(G_0)$, 且对 $1\le j\le m$ 有 $u_0x_{i_j}\in E(G_0)$. 存在四个不同的正整数 $p_1,p_2,p_3,p_4\in\{i_1,\dots,i_{m+2}\}$ 满足 $x_{p1}x_{p2}, x_{p3}x_{p4}\in E(C)$. 我们现在说明 π 有一个实现 G 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上.

不失一般性, 只需要考虑三种情况.

情况 1 $x_{p_1},x_{p_2}\in\{x_{i_{p+1}},\dots,x_{i_{m+2}}\}$.

如果 $x_{p_1} = x_{i_{m+1}}$ 且 $x_{p_2} = x_{i_{m+2}}$, 则 $u_1x_{p_1},u_1x_{p_2},u_0x_{p_3},u_0x_{p_4}\in E(G_0)$, 这说明 G_0 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上. 如果 $x_{p_1} = x_{i_{m+1}}$ 且 $x_{p_2}\ne x_{i_{m+2}}$, 令 $G_1 = G_0-\{u_0x_{i_{p_2}},u_1x_{i_{m+2}}\}+\{u_0x_{x_{i_{m+2}}},u_1x_{p_2}\}$, 则 G_1 是 π 的一个实现, $u_1x_{p_1},u_1x_{p_2},u_0x_{p_3},u_0x_{p_4}\in E(G_1)$, 并且 G_1 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上. 如果 $x_{p_1}\ne x_{i_{m+1}},x_{i_{m+2}}$ 且 $x_{p_2}\ne x_{i_{m+1}},x_{i_{m+2}}$, 令

$$G_1 = G_0-\{u_0x_{p_1},u_0x_{p_2},u_1x_{i_{m+1}},u_1x_{i_{m+2}}\}+\{u_0x_{i_{m+1}},u_0x_{i_{m+2}},u_1x_{p_1},u_1x_{p_2}\},$$

则 $u_1x_{p_1},u_1x_{p_2},u_0x_{p_3},u_0x_{p_4}\in E(G_1)$, G_1 是 π 的一个实现并且包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上.

情况 2 $x_{p_1},x_{p_2}\in\{x_{i_1},\dots,x_{i_p}\}$.

如果 $x_{p_3}\ne x_{i_{m+1}},x_{i_{m+2}}$ 且 $x_{p_4}\ne x_{i_{m+1}},x_{i_{m+2}}$, 则 $u_1x_{p_1},u_1x_{p_2},u_0x_{p_3},u_0x_{p_4}\in E(G_0)$ 并且 G_0 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上. 如果 $x_{p_3}\ne x_{i_{m+1}},x_{i_{m+2}}$ 且 $x_{p_4} = x_{i_{m+1}}$, 根据 $p\le m-3$, 令 $G_1 = G_0-\{u_0x_{i_m},u_1x_{p_4}\}+\{u_0x_{p_4},u_1x_{i_m}\}$, 则 G_1 是 π 的一个实现并且 $u_1x_{p_1},u_1x_{p_2},u_0x_{p_3},u_0x_{p_4}\in E(G_1)$. 因此 G_1 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上. 如果 $x_{p_3} = x_{i_{m+1}}$ 且 $x_{p_4} = x_{i_{m+2}}$, 则 $u_1x_{p_3},u_1x_{p_4},u_0x_{p_1},u_0x_{p_2}\in E(G_0)$ 并且 G_0 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上.

情况 3 $x_{p_1}\in\{x_{i_1},\dots,x_{i_p}\}$ 且 $x_{p_2}\in\{x_{i_{p+1}},\dots,x_{i_{m+2}}\}$.

如果 $x_{p_2} = x_{i_{m+1}}$ 且 $x_{p_3},x_{p_4}\ne x_{i_{m+2}}$, 则 $u_1x_{p_1},u_1x_{p_2},u_0x_{p_3},u_0x_{p_4}\in E(G_0)$ 且 G_0 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上. 如果 $x_{p_2} = x_{i_{m+1}}$ 且 $x_{p_3} = x_{i_{m+2}}$, 当 $x_{p_4}\ne x_{i_m}$ 时, 令 $G_1 = G_0-\{u_0x_{i_m},u_1x_{p_3}\}+\{u_0x_{p_3},u_1x_{i_m}\}$; 当 $x_{p_4} = x_{i_m}$ 时, 令 $G_1 = G_0-\{u_0x_{i_{m-1}},u_1x_{p_3}\}+\{u_0x_{p_3},u_1x_{i_{m-1}}\}$, 则有 $u_1x_{p_1},u_1x_{p_2},u_0x_{p_3},u_0x_{p_4}\in E(G_1)$, G_1 是 π 的一个实现并且包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上. 如果 $x_{p_2}\ne x_{i_{m+1}},x_{i_{m+2}}$, $x_{p_3} = x_{i_{m+1}}$ 且 $x_{p_4} = x_{i_{m+2}}$, 则有 $u_0x_{p_1},u_0x_{p_2},u_1x_{p_3},u_1x_{p_4}\in E(G_0)$, 并且 G_0 包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上. 如果 $x_{p_2}\ne x_{i_{m+1}},x_{i_{m+2}}$, $x_{p_3} = x_{i_{m+1}}$ 且 $x_{p_4}\ne x_{i_{m+2}}$, 令 $G_1 = G_0-\{u_1x_{p_3},u_0x_{p_2}\}+\{u_1x_{p_2},u_0x_{p_3}\}$, 则有 $u_1x_{p_1},u_1x_{p_2},u_0x_{p_3},u_0x_{p_4}\in E(G_1)$, G_1 是 π 的一个实现并且包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上. 如果 $x_{p_2}\ne x_{i_{m+1}},x_{i_{m+2}}$, $x_{p_3}\ne x_{i_{m+1}},x_{i_{m+2}}$ 且 $x_{p_4}\ne x_{i_{m+1}},x_{i_{m+2}}$, 令 $G_1 = G_0-\{u_1x_{i_{m+1}},u_0x_{p_2}\}+\{u_1x_{p_2},u_0x_{i_{m+1}}\}$, 则有 $u_1x_{p_1},u_1x_{p_2},u_0x_{p_3},u_0x_{p_4}\in E(G_1)$, G_1 是 π 的一个实现并且包含 $C_3,\dots,C_{2m}$ 在点 $x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1$ 上.

令 H 是 $\{x_1,\dots,x_{2m-2},u_0,u_1\}$ 在 G 中的诱导子图. 显然, H 是泛圈的. 根据定理 2.3, π 有一个实现包含 H (也就包含了 $C_3,\dots,C_{2m}$) 在那些度为 $d_1,\dots,d_{2m}$ 的顶点上.

引理 2.12 设 $m\geq 4$, $n\geq 2m+1$ 且 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)\in \mathrm{GS}_n$ 满足对 $1\leq i\leq m$, 有 $d_{2m+2-i}\geq i+1$, 则 π 是蕴含 ${}_3C_{2m+1}$- 可图的.

证明 根据引理 2.4 易知引理 2.12 在 $n=2m+1$ 时成立. 假设 $n\geq 2m+2$. 如果 $d_{2m+1}\geq m+1$, 根据定理 1.3 (iii), 则 π 是蕴含 ${}_3C_{2m+1}$- 可图的. 假设 $d_{2m+1}\leq m$. 如果 $d_{d_n}\geq m+2$, 则由 π 删去 d_n 所得到的剩余序列 $\pi'_n=(d'_1,\ldots,d'_{n-1})$ 满足对 $1\leq i\leq m$ 有 $d'_{2m+2-i}\geq i+1$. 根据归纳假设, π'_n 是蕴含 ${}_3C_{2m+1}$- 可图的, 这说明 π 是蕴含 ${}_3C_{2m+1}$- 可图的. 假设 $d_{d_n}=\cdots=d_{m+2}=m+1$. 显然, 由 π 通过删去 $d_{m+2}=m+1$ 所得的剩余序列 $\pi'_{m+2}=(d'_1,\ldots,d'_{n-1})$ 满足对 $1\leq i\leq m-1$, 有 $d'_{2m+1-i}\geq i+1$. 根据引理 2.11, π'_{m+2} 有一个实现 G' 包含 $C_3,\ldots,C_{2m}$ 在那些度为 $d'_1,\ldots,d'_{2m}$ 的顶点上. π 的一个实现 G 可以通过由 G' 添加一个新点 u 得到, 其中 u 和那些从 π 变到 π'_{m+2} 时度减 1 的顶点相连. 根据 $d_{2m+1}\leq m$, 我们可以知道 C_{2m} 落在度为 $d_1,\ldots,d_{m+1},d_{m+3},\ldots,d_{2m+1}$ 的那些顶点上, 并且 u 和 C_{2m} 的 $m+1$ 个顶点相连. 因此 G 包含 C_{2m+1}. 也就是说 π 是蕴含 ${}_3C_{2m+1}$- 可图的.

定理 1.4 的证明 根据定理 1.3 (i), (ii) 和引理 2.10–2.12, 定理 1.4 可以立刻得到证明.

作为定理 1.4 的一个应用, 我们现在给出定理 1.5 的证明.

定理 1.5 的证明 如果 $\ell\geq 5$, 令 $\pi=(n-1,(\ell-2)^{\ell-2},1^{n-\ell+1})$, 则 π 不是蕴含 C_ℓ- 可图的, 因此 $\sigma(C_\ell,n)\geq\sigma(\pi)+2=2n+\ell^2-5\ell+6$. 此外, 对 $m\geq 2$, 根据 $\pi=((n-1)^m,m^{n-m})$ (相应的, $\pi=((n-1)^m,(m+1)^2,m^{n-m-2})$) 不是蕴含 C_{2m+1} (相应的, C_{2m+2})- 可图的, 我们有 $\sigma(C_{2m+1},n)\geq\sigma(\pi)+2=m(2n-m-1)+2$ (相应的, $\sigma(C_{2m+2},n)\geq\sigma(\pi)+2=m(2n-m-1)+4$). 因此有

$$\begin{aligned}\sigma(C_{2m+1},n)&\geq\max\{2n+(2m+1)^2-5(2m+1)+6,m(2n-m-1)+2\}\\&=\max\{2n+4m^2-6m,m(2n-m-1)\}+2\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\sigma(C_{2m+2},n)&\geq\max\{2n+(2m+2)^2-5(2m+2)+6,m(2n-m-1)+4\}\\&=\max\{2n+4m^2-2m-2,m(2n-m-1)+2\}+2.\end{aligned}$$

为了证明对 $n\geq 2m+1$, 有 $\sigma(C_{2m+1},n)\leq\max\{2n+4m^2-6m,m(2n-m-1)\}+2$, 我们只需要证明, 如果 $n\geq 2m+1$ 且 $\pi=(d_1,\ldots,d_n)\in\mathrm{GS}_n$, 满足 $\sigma(\pi)\geq\max\{2n+4m^2-6m,m(2n-m-1)\}+2$, 则 π 是蕴含 C_{2m+1}- 可图的. 对 $1\leq i\leq m$, 如果 $d_{2m+2-i}\geq i+1$, 根据定理 1.4 可知 π 是蕴含 C_{2m+1}- 可图的. 假设存在一个 k, $1\leq k\leq m$, 满足 $d_{2m+2-k}\leq k$. 记 $f(k)=3k^2+(2n-8m-3)k+4m^2+2m$, 则

$$\begin{aligned}\sigma(\pi)&=(d_1+\cdots+d_{2m+1-k})+d_{2m+2-k}+\cdots+d_n\\&\leq(2m+1-k)(2m-k)+\sum_{i=2m+2-k}^{n}\min\{2m+1-k,d_i\}+d_{2m+2-k}+\cdots+d_n\\&=(2m+1-k)(2m-k)+2(d_{2m+2-k}+\cdots+d_n)\\&\leq(2m+1-k)(2m-k)+2k(n-2m-1+k)=f(k)\leq\max\{f(1),f(m)\}\\&=\max\{2n+4m^2-6m,m(2n-m-1)\}<\sigma(\pi).\end{aligned}$$

矛盾.

相似地, 为了证明对 $n \geq 2m+2$, 有 $\sigma(C_{2m+2}, n) \leq \max\{2n+4m^2-2m-2, m(2n-m-1)+2\}+2$, 我们令 $n \geq 2m+2$ 且 $\pi = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathrm{GS}_n$, 满足 $\sigma(\pi) \geq \max\{2n+4m^2-2m-2, m(2n-m-1)+2\}+2$. 如果对 $1 \leq i \leq m$, 有 $d_{2m+3-i} \geq i+1$, 根据定理 1.4, 则 π 是蕴含 C_{2m+2}- 可图的. 假设存在一个 k, $1 \leq k \leq m$, 满足 $d_{2m+3-k} \leq k$. 记 $g(k) = 3k^2 + (2n-8m-7)k + 4m^2 + 6m + 2$, 则

$$\begin{aligned}
\sigma(\pi) &= (d_1 + \cdots + d_{2m+2-k}) + d_{2m+3-k} + \cdots + d_n \\
&\leq (2m+2-k)(2m+1-k) + \sum_{i=2m+3-k}^{n} \min\{2m+2-k, d_i\} + d_{2m+3-k} + \cdots + d_n \\
&= (2m+2-k)(2m+1-k) + 2(d_{2m+3-k} + \cdots + d_n) \\
&\leq (2m+2-k)(2m+1-k) + 2k(n-2m-2+k) = g(k) \\
&\leq \max\{g(1), g(m)\} = \max\{2n+4m^2-2m-2, m(2n-m-1)+2\} < \sigma(\pi).
\end{aligned}$$

矛盾.

参 考 文 献

[1] Bondy J. A., Murty U. S. R., Graph Theory with Applications, North-Holland, New York, 1976.

[2] Chen G., Fan Y. M., Yin J. H., On potentially ${}_3C_6$-graphic sequences, *J. Guangxi Normal Univ.* (*Nat. Sci. Ed.*), 2006, **24**(3): 26–29.

[3] Erdős P., Gallai T., Graphs with prescribed degrees of vertices (Hungarian), *Mat. Lapok*, 1960, **11**: 264–274.

[4] Gould R. J., Jacobson M. S., Lehel J., Potentially G-graphical degree sequences, in: Y. Alavi et al., (Eds.), Combinatorics, Graph Theory, and Algorithms, New Issues Press, Kalamazoo Michigan, 1999: 451–460.

[5] Kleitman D. J., Wang D. L., Algorithm for constructing graphs and digraphs with given valences and factors, *Discrete Math.*, 1973, **6**: 79–88.

[6] Lai C. H., The smallest degree sum that yields potentially C_k-graphical sequences, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 2004, **49**: 57–64.

[7] Li J. S., Yin J. H., Extremal graph theory and degree sequences (Chinese), *Adv. Math.* (*China*), 2004, **33**(3): 273–283.

[8] Nash-Williams C. St. J. A., Valency sequences which force graphs to have hamiltonian circuits, Interim report, University of Waterloo, Waterloo, 1970.

[9] Schmeichel E. F., Hakimi S. L., Pancyclic graphs and a conjecture of Bondy and Chvátal, *J. Combin. Theory* (*B*), 1974, **17**: 22–34.

[10] Yin J. H., A characterization for a graphic sequence to be potentially C_r-graphic, *Sci. China Math.*, 2010, **53**(11): 2893–2905.

[11] Yin J. H., Chen G., Chen G. L., On potentially ${}_kC_\ell$-graphic sequences, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 2007, **61**: 141–148.

[12] Yin J. H., Ye K., Li J. Y., Graphic sequences with a realization containing cycles $C_3, \ldots, C_\ell$, *Appl. Math. Comput.*, 2019, **353**: 88–94.