第64卷第3期 数学学报中文版 Vol.64, No.3
2021年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES May, 2021

文章编号: 0583-1431(2021)03-0385-20 **文献标识码: A**

图像配准中方向场正则化模型的适定性和收敛性

郑晓俊

海南师范大学初等教育学院 海口 571158
E-mail: xjzheng88@163.com

郇中丹 刘 君

北京师范大学数学科学学院 北京 100875
E-mail: zdhuan@bnu.edu.cn; jliu@bnu.edu.cn

摘 要 图像配准是图像处理的一个重要方面. 方向场正则化模型是现有配准方法中效果相对突出的模型. 然而它仍然无法正确对齐所有感兴趣的区域. 因此, 本文从理论角度研究方向场正则化模型, 希望寻找模型设计可能存在的问题. 由于模型中有一个直接变量和一个由直接变量通过常微初值问题确定的间接变量, 所以它是数学上的一类新颖的正则化模型. 方向场正则化模型定义为 $\min_v \{\alpha\|v\|_H^2 + \rho(T(y^v(\tau)), S)\}$, 其中 T 和 S 分别是模板图像和参考图像, $y^v(\tau): x \mapsto y^v(\tau; 0, x)$ 是由初值问题 $\frac{dy}{ds} = v(s, y)$, $y(0) = x$ 的解 $y^v(s; 0, x)$ 定义的变换, ρ 是相似性泛函, $\alpha > 0$ 是正则化参数, H 是希尔伯特空间. 本文首先证明了方向场正则化模型有稳定解, 然后证明了其收敛性. 结合 $y^v(\tau)$ 与 v 的收敛关系和正则化问题的经典理论可得上述结论. 然而, 在现有理论下, ρ, S 和 T 需满足较强的条件. 本文通过充分利用 $y^v(\tau)$ 的性质, 提出了关于 ρ, S 和 T 的相对弱的条件. 此外, 我们还验证了配准常用的 3 个相似性泛函都满足所提条件.

关键词 方向场正则化模型; 存在性; 稳定性; 收敛性; 图像配准
MR(2010) 主题分类 47J06, 49J45
中图分类 O177.92

Well-posedness and Convergence of the Vector Field Regularization Model in Image Registration

Xiao Jun ZHENG

Elementary Education School, Hainan Normal University,
Haikou 571158, *P. R. China*
E-mail: *xjzheng88@163.com*

收稿日期: 2020-03-03; 接受日期: 2020-06-01
基金项目: 海南省自然科学基金资助项目 (118QN023)

Zhong Dan HUAN Jun LIU

School of Mathematical Sciences,Beijing Normal University,
Beijing 100875, *P. R. China*
E-mail: *zdhuan@bnu.edu.cn*; *jliu@bnu.edu.cn*

Abstract Image registration is fundamental to image processing. The vector field regularization model performs relatively well among a large number of registration methods. However, it still can't correspond to all interested regions across images correctly. Therefore, we hope to study the theory of the vector field regularization model to see whether there are some problems with the design of the model. Moreover, as there are two unknowns which are related by an initial value problem in the regularization model, it is novel in mathematics. The vector field regularization model takes the form $\min_v \{\alpha\|v\|_H^2 + \rho(T(y^v(\tau)), S)\}$, where T is a template image, S is a reference image, $y^v(\tau) : x \mapsto y^v(\tau; 0, x)$ is a transformation determined by the solution $y^v(s; 0, x)$ of the initial value problem $\frac{dy}{ds} = v(s, y)$, $y(0) = x$, ρ is a similarity functional, $\alpha > 0$ is a regularization parameter and H is a Hilbert space. In this paper, we firstly show the vector field regularization model has stable solutions and then demonstrate its convergence. The above results can be obtained by the standard arguments of regularized problems together with the convergence relation of $y^v(\tau)$ and v. However, the requirements for ρ, S and T are relatively strong under the existing regularization theory. We give relatively weak conditions for ρ, S and T by taking full advantage of the good properties of $y^v(\tau)$. In addition, we verify that three commonly used similarity functionals in image registration satisfy the given conditions.

Keywords vector field regularization model; existence; stability; convergence; image registration

MR(2010) Subject Classification 47J06, 49J45

Chinese Library Classification O177.92

1 引言

图像配准是图像处理领域的一个重要方面, 是图像分析的基础 [6, 20]. 同时, 图像配准也是包含数学问题相对丰富的一类问题. 图像配准在众多领域有着广泛的应用, 例如, 遥感融合 [22]、计算机视觉 [23]、医学成像 [33] 等. 本文主要考虑其在医学成像, 尤其是脑成像方面的应用. 在利用脑成像的各神经科学领域中, 研究者对单个的脑图像并不感兴趣, 他们主要是比较和分析同一被试在不同时间或不同条件下的脑图像、不同被试在同一时间的脑图像, 以及同一被试的不同类型的脑图像, 并且通过解剖区域表达分析结果 [25]. 然而, 由于这些图像不完全相同, 不同图像中的解剖区域无法直接对应 [6, 12, 25], 所以需要建立不同脑图像中空间位置及解剖区域的对应. 手动标记脑区是建立解剖对应的可靠方法 [32]. 然而, 手动标记很耗时并且需要专业人员完成, 此外, 不同标记人员还会带来标记的不一致性 [17]. 因此, 通过逐个标记脑图像建立解剖对应往往不能满足实际需求 [11], 利用计算机自动确定解剖对应势在必行. 自动确定解剖对应是通过坐标变换直接建立脑图像之间的两两对应或者脑图像与模板图像之间的对应. 可见, 图像配准的关键是确定图像间的合适变换. 现有的配准方法丰富多样 [27, 28, 31], 这些方法的基本想法也相似. 然

而, 没有一种方法可以达到令人满意的配准效果, 配准存在 "配不准" 的问题 [25]. 因此, 研究图像配准的理论可能是探索 "配不准" 原因的一个方面, 也可以为模型设计提供一定的指导. 目前关于配准问题的研究主要侧重设计求解模型 [13, 29, 30] 和数值算法 [24, 26] 两个方面, 深入到配准理论的研究相对较少. 本文从理论上研究 SyN (Symmetric Normalization) [2] 方法中的基本模型 - 方向场正则化模型. SyN 方法是配准效果相对突出且在医学图像处理中得到广泛应用的一种方法 [35, 37], 例如, 当今流行的开源图像处理软件 ANTS (Advanced Neuroimaging Tools) [3, 4] 就是以 SyN 方法为核心开发的. 此外, 从 Klein 的研究 [25] 中的排名也可见 SyN 的突出效果. 虽然 SyN 方法通过引入两个方向场考虑了配准的方向性 [8], 但这两个方向场的地位相当, 并不会给理论研究带来太多困难. 所以, 本文忽略配准的方向性, 考虑最本质的方向场配准方法 [5].

下面, 将分别介绍配准的一般正则化模型和配准的方向场正则化模型.

1.1 图像配准的正则化模型

图像配准可以简单地表述为: 给定参考图像 S 和可形变的模板图像 T, 找到一个合适的变换使得变换作用后的模板图像 T 和参考图像 S 尽可能接近. 特别地, 由于参考图像和模板图像表示的是不同但相似的物体, 它们之间存在真实的差异, 所以我们只希望形变后的模板图像和参考图像相似而非相同. 从数学角度讲, 一幅图像可以看成是一个映射, 它将图像定义域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中的一个点 x 对应到这点的像素值. 同时, 因为一个合适的变换应该能保持曲线的连续性和区域的连通性, 所以它最好是一个微分同胚变换. 进一步, 形变模板图像和参考图像之间的拟合程度可以通过相似性泛函 ρ 度量. 然而, 如果直接通过求解极小化问题 $\min_\varphi \rho(T(\varphi), S)$ 来找变换, 很难保证变换是光滑的或者是微分同胚, 需要加上一个正则泛函 R 来保证变换的一些性质. 因此, 配准最终归结为求解正则化极小问题

$$\min_{\varphi}\{\alpha R(\varphi) + \rho(T(\varphi), S)\}, \tag{1.1}$$

其中, $\alpha > 0$ 是调节 $R(\varphi)$ 和 $\rho(T(\varphi), S)$ 的权重的正则化参数. 问题 (1.1) 也称为图像配准的正则化模型.

1.2 图像配准的方向场正则化模型

方向场正则化模型也是一个形如 (1.1) 的极小化问题, 然而, 由于方向场形变变换是通过依赖时间的方向场定义的, 所以极小化问题是关于方向场而非变换的. 为什么变换通过方向场定义呢? 因为从理论上看, 只要方向场足够光滑, 由它定义的变换就是微分同胚. 进一步, 方向场如何控制形变呢? 形象地讲, 给定一个模板 T 和一个形变变换 φ, 形变后的模板 $T(\varphi)$ 可以想象成是由 T 经过一段时间的连续变形得到的, 其中连续变形的轨迹相当于给出了一个曲线族. 由方向场和曲线族的关系知, 给定一个曲线族对应着一个方向场, 而给定一个方向场也可以决定一个曲线族, 因此, 自然地, 可以用方向场刻画曲线族. 具体地, 给定一个方向场 $v : [0,\tau] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, $\tau > 0$ 是常数, 我们可以由下述微分方程得到一个曲线族

$$\frac{dy}{ds} = v(s, y).$$

进一步, 对任意的 $x \in \Omega$, 考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{ds} = v(s, y), \\ y(0) = x. \end{cases} \tag{1.2}$$

已有结果表明, 当 $v(s,y)$ 关于 s 可积, 关于 y Lipschitz 连续时, (1.2) 有唯一的 Carathéodory 解 $y^v(s;0,x)$. 而解曲线 $y^v(s;0,x)$ 可以看成是从 x 点出发的粒子, 在 v 的控制下, 最终到达 $y^v(\tau;0,x)$ 点这一过程形成的轨迹, 轨迹上的点 $y^v(t;0,x)$ 是粒子在 t 时刻的位置. 因此, 对任意的 $t\in[0,\tau]$, 可以利用粒子在 t 时刻的位置定义一个 Ω 上的变换, 即

$$y^v(t): x\mapsto y^v(t;0,x).$$

特别地, 如果将前面提到的形变的模板 $T(\varphi)$ 看成是模板 T 连续变形到 τ 时刻的结果, 那么变换 $y^v(\tau)$ 就是将 T 变成 $T(\varphi)$ 的形变变换. 此外, 文献 [14] 中证明了, 对任意的 $t\in[0,\tau]$, 如果 $v\in L^1([0,\tau],C_0^1(\Omega))$, 则 $y^v(t)$ 是 Ω 上的微分同胚. 因此, 图像配准的方向场正则化模型为

$$\min_v\{\alpha\|v\|_H^2+\rho(T(y^v(\tau)),S)\}, \tag{1.3}$$

其中 H 可取 $L^2([0,\tau],W_0^{[\frac{n}{2}]+2,2}(\Omega))$, v 的正则性由其 H- 范的有限性保证.

可见, 从模型的设计上讲, 方向场正则化模型首先通过求解正则化模型 (1.3) 得到一个合适的方向场 v_0, 然后通过求解由方向场 v_0 确定的初值问题 (1.2) 得到形变变换. 那么, 理论上, 利用正则化模型 (1.3) 找配准变换是否合理呢? 接下来, 将考虑以下几个基本问题:

存在性. 首先需要确保对于给定的数据 T,S 以及参数 α, 正则化模型 (1.3) 有解.

稳定性. 在数值求解 (1.3) 时, 由数据离散, 舍入等带来的数值误差不应该使得到的计算解偏离理论解太多, 也就是说, (1.3) 的解应该连续依赖数据 (T,S).

收敛性. 因为由 (1.3) 的解决定的配准变换一般只是配准原问题 (寻找一个微分同胚变换 φ_0, 使得 $\rho(T(\varphi_0),S)\le\rho(T(\varphi),S)$, 其中 φ 是微分同胚) 的近似解, 这里希望能取到合适的正则化参数, 使近似解尽可能地接近原问题的解.

关于正则化问题解的适定性及收敛性研究已有很多, 但正则化问题 (1.3) 是一类新颖的正则化问题. 因为, 大家通常考虑的正则化问题主要是 Tikhonov 型正则化问题 [34], 即

$$\min_\varphi\{\alpha R(\varphi)+\rho(F(\varphi),\psi)\}, \tag{1.4}$$

其中, R,ρ 仍分别是正则泛函和相似泛函, F 是给定的算子或函数, ψ 是给定的函数, α 是正则化参数. 在图像配准的情形下, F 和 ψ 分别是给定的模板图像和参考图像, 未知量 φ 就是要找的配准变换. 显然, 在 (1.4) 中 φ 是唯一的未知量. 然而, 在 (1.3) 中, 泛函以决定变换的方向场 (而非变换) 为未知量, 从而, 同时含有直接变量 v 和 v 通过初值问题 (1.2) 决定的间接变量 $y^v(\tau)$. 所以, (1.3) 是一类新颖的正则化问题.

据我们所知, 正则化问题 (1.3) 的已有理论主要是 Dupuis 等人 [14] 证明了 ρ 取平方 L^2 范, S,T 有界且 T 几乎处处连续时, (1.3) 有解. 本文考虑了一般的相似性泛函 ρ, 通过对 ρ 提出合适的假设条件, 并利用 $y^v(\tau)$ 与 v 的收敛关系得到了 (1.3) 解的存在性, 稳定性以及收敛性结论. 虽然利用 $y^v(\tau)$ 与 v 的收敛关系, 结合 Tikhonov 正则化问题的经典理论 [19] 也可以得到 ρ, S 和 T 要满足的条件, 但由此得到的条件较强. 本文充分利用了 $y^v(\tau)$ 的良好性质, 得到了相对弱的条件. 进一步, 通过验证配准中常用的 3 个相似泛函满足所提的条件, 说明了所提条件的适用性.

2 方向场正则化模型的适定性

本节研究正则化模型 (1.3) 解的存在性和稳定性问题, 其中 $H=L^2([0,\tau],W_0^{[\frac{n}{2}]+2,2}(\Omega))$, $\rho: L^p(\Omega)\times L^p(\Omega)\to\mathbb{R}$ $(1\le p\le+\infty)$ 下有界, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界闭集. 此外 ρ 还有如下两个假设条件:

(1) 设 $\{\varphi_k\}$ 和 φ 是 Ω 上的微分同胚, $\{|\det(D\varphi_k^{-1})|\}$ 一致有界. 任取 $f,g\in L^p(\Omega)$, 若 $\varphi_k(x)\to\varphi(x)\,(k\to+\infty)$, $\forall x\in\Omega$, 则

$$\rho(f\circ\varphi,g)\le\liminf_{k\to+\infty}\rho(f\circ\varphi_k,g).$$

(2) 设 $\{\varphi_k\}$ 和 φ 是 Ω 上的微分同胚, $\{|\det(D\varphi_k^{-1})|\}$ 一致有界. 若 $f_k\xrightarrow{L^p(\Omega)}f$, $g_k\xrightarrow{L^p(\Omega)}g$ $(k\to+\infty)$ 且 $\varphi_k(x)\to\varphi(x)$ $(k\to+\infty)$, $\forall x\in\Omega$, 则

$$\rho(f_k\circ\varphi_k,g_k)\longrightarrow\rho(f\circ\varphi,g)\quad(k\to+\infty).$$

假设 (1) 保证了正则化模型 (1.3) 有解, 假设 (2) 进一步保证了解的稳定性. 易知, 当 $1\le p<+\infty$ 时, 如果在一般正则化问题中常用的条件 “ρ 下半连续” 成立, 假设 (1) 必成立, 所以假设 (1) 是相对弱的条件. 类似地, 当 $1\le p<+\infty$ 时, 常用条件 “ρ 连续” 成立时, 假设 (2) 也一定成立.

注 2.1 已知, 当 $v(s,y)$ 关于 s 可积且关于 y Lipschitz 连续时, (1.2) 有唯一的 Carathéodory 解 $y^v(s;0,x)$. 进一步, 可以证明当 $v(s,y)\in L([0,\tau],C_0^1(\Omega))$ 时, 对任意取定的 $s\in[0,\tau]$, 解 $y^v(s;0,x)\in C^1(\Omega)$. 因此, 为了保证变换 $y^v(\tau;0,x)$ 的光滑性, 我们取 H 为 $L^1([0,\tau],C_0^1(\Omega))$ 的子空间 $L^2([0,\tau],W_0^{[\frac{n}{2}]+2,2}(\Omega))$. 如果可以得到关于初值问题 (1.2) 的 Carathéodory 解的更弱的结果, 解空间还可以更弱. 这也是我们正在考虑的问题之一.

2.1 存在性

定理 2.2 若关于 ρ 的假设条件 (1) 成立, 则对任意的 $S,T\in L^p(\Omega)$ 及 $\alpha>0$, 正则化模型 (1.3) 在空间 H 中有解.

为了证明定理 2.2, 我们需要下述引理. 引理 2.3 表明正则化模型是有意义的. 引理 2.4 给出了 v 和 $y^v(\tau)$ 的收敛关系. 引理 2.5 得到了 $\det(D_xy^v(s;t,x))$ 关于 v 的一个估计, 它是 ρ 的假设条件中的条件之一.

引理 2.3 若 $f\in L^p(\Omega)$, $1\le p\le+\infty$ 且 φ 是 Ω 上的微分同胚, 则 $f\circ\varphi\in L^p(\Omega)$.

证明是常规的, 这里略去.

引理 2.4 若 $\{v_k\}$ 是 H 中的一个有界序列, 则存在 $\{v_k\}$ 的一个收敛子列 $\{v_{k_j}\}$ 和一个弱极限 $\bar v\in H$, 使得 $v_{k_j}\overset{H}{\rightharpoonup}\bar v$ $(j\to+\infty)$, 且

$$y^{v_{k_j}}(\tau;0,x)\to y^{\bar v}(\tau;0,x)\quad(j\to+\infty),\quad\forall x\in\Omega,$$

其中 $y^{v_{k_j}}(\tau;0,x)$ 和 $y^{\bar v}(\tau;0,x)$ 分别是 $y^{v_{k_j}}(s;0,x)$ 和 $y^{\bar v}(s;0,x)$ 在 τ 时刻的值, $y^{v_{k_j}}(s;0,x)$ 和 $y^{\bar v}(s;0,x)$ 分别是由 v_{k_j} 和 $\bar v$ 定义的初值问题 (1.2) 的解.

我们将略去细节, 只给出证明的想法.

因为 H 是 Hilbert 空间, 且 $\{v_k\}$ 是 H 中的有界序列, 由 Eberlein–Schmulyan 定理 [36] 知, 存在 $\{v_k\}$ 的弱收敛子列 $\{v_{k_j}\}$ 和弱极限 $\bar v\in H$, 使得 $v_{k_j}\overset{H}{\rightharpoonup}\bar v$ $(j\to+\infty)$. 进一步, 关于 $y^{v_{k_j}}(\tau;0,x)\to y^{\bar v}(\tau;0,x)$ $(j\to+\infty)$, $\forall x\in\Omega$ 的证明可参考文献 [14].

引理 2.5 若 $v\in H$, $y^v(s;t,x)$ 是初值问题 (1.2) 的唯一解, 其中初始时间是 t, 则对任意的 $x\in\Omega$ 和 $s,t\in[0,\tau]$, 有

$$|D_xy^v(s;t,x)|\le n\exp\left\{\int_0^\tau\left|\frac{\partial v}{\partial y}(s,y^v(s;t,x))\right|ds\right\},$$

且

$$|\det\left(D_xy^v(s;t,x)\right)|\le\exp\left\{\int_0^\tau\left|\frac{\partial v}{\partial y}(s,y^v(s;t,x))\right|ds\right\}\le\exp\{C(n,\tau,\Omega)\|v\|_H\},$$

其中 $C(n,\tau,\Omega)$ 是依赖于 n,τ 和 Ω 的常数.

证明 因为 $D_xy^v(s;t,x)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{ds}=\dfrac{\partial v}{\partial y}(s,y^v(s;t,x))\xi, \\ \xi(t)=I, \end{cases}$$

则

$$D_xy^v(s;t,x)=I+\int_t^s\frac{\partial v}{\partial y}(r,y^v(r;t,x))D_xy^v(r;t,x)dr,$$

且

$$|D_xy^v(s;t,x)|\le|I|+\left|\int_t^s\left|\frac{\partial v}{\partial y}(r,y^v(r;t,x))D_xy^v(r;t,x)\right|dr\right|.$$

由 Gronwall 不等式 [16] 知

$$\begin{aligned}|D_xy^v(s;t,x)|&\le|I|\exp\left\{\left|\int_t^s\left|\frac{\partial v}{\partial y}(r,y^v(r;t,x))\right|dr\right|\right\}\\&\le|I|\exp\left\{\int_0^\tau\left|\frac{\partial v}{\partial y}(s,y^v(s;t,x))\right|ds\right\}\\&=n\exp\left\{\int_0^\tau\left|\frac{\partial v}{\partial y}(s,y^v(s;t,x))\right|ds\right\}.\end{aligned}$$

又因为 $\frac{\partial y^v}{\partial x_k}(s;t,x)$ $(k=1,2,\dots,n)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{ds}=\dfrac{\partial v}{\partial y}(s,y^v(s;t,x))\xi, \\ \xi(t)=e_k, \end{cases}$$

且 $x\mapsto y^v(s;t,x)$ 是 Ω 上的微分同胚, 所以 $D_xy^v(s;t,x)$ 是线性方程组

$$\frac{d\xi}{ds}=\frac{\partial v}{\partial y}(s,y^v(s;t,x))\xi$$

的基解矩阵且 $D_xy^v(t;t,x)=I$. 从而由解组 $D_xy^v(s;t,x)$ 的 Wronsky 行列式的刘维尔公式 [1] 知

$$\begin{aligned}\det(D_xy^v(s;t,x))&=\det(D_xy^v(t;t,x))\exp\left\{\int_t^s\operatorname{tr}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(r,y^v(r;t,x))\right)dr\right\}\\&=\det(I)\exp\left\{\int_t^s\operatorname{tr}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(r,y^v(r;t,x))\right)dr\right\}\\&=\exp\left\{\int_t^s\operatorname{tr}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(r,y^v(r;t,x))\right)dr\right\},\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}|\det(D_xy^v(s;t,x))|&\le\exp\left\{\int_0^\tau\left|\operatorname{tr}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(s,y^v(s;t,x))\right)\right|ds\right\}\\&\le\exp\left\{\int_0^\tau\left|\frac{\partial v}{\partial y}(s,y^v(s;t,x))\right|ds\right\}\\&\le\exp\left\{\int_0^\tau\left\|\frac{\partial v}{\partial y}(s,\cdot)\right\|_\infty ds\right\}\\&\le\exp\left\{C(n,\tau,\Omega)\|v\|_H\right\},\end{aligned}$$

其中, 第二个不等式用到了关系 $|\mathrm{tr}(A)| \leq |A|$, $|A|$ 是 n 阶矩阵 A 的 1- 范数. 证毕.

下面证明定理 2.2.

记 $J(v) = \alpha\|v\|_H^2 + \rho(T(y^v(\tau)), S)$. 因为 ρ 有下界且 $\|v\|_H^2 \geq 0$, 所以存在极小化序列 $\{v_k\} \subset H$, 使得

$$J(v_k) \to \inf_{v\in H} J(v) \quad (k \to +\infty).$$

又因为 $J(v)$ 强制, 所以 $\{v_k\}$ 有界. 由引理 2.4 知, 存在 $\{v_k\}$ 的弱收敛子列, 不妨仍记作 $\{v_k\}$ 和弱极限 $\bar{v} \in H$, 使得

$$v_k \overset{H}{\rightharpoonup} \bar{v} \ \text{ 且 }\ y^{v_k}(\tau; 0, x) \to y^{\bar{v}}(\tau; 0, x) \quad (k \to +\infty), \quad \forall x \in \Omega.$$

下面证明弱极限 $\bar{v}$ 就是 $J(v)$ 的极小元, 即 $J(\bar{v}) = \inf_{v\in H} J(v)$. 显然 $J(\bar{v}) \geq \inf_{v\in H} J(v)$, 只需证明 $J(\bar{v}) \leq \inf_{v\in H} J(v)$. 注意到 $\|\cdot\|_H^2$ 弱下半连续, 即

$$\|\bar{v}\|_H^2 \leq \liminf_{k\to+\infty} \|v_k\|_H^2,$$

只需要考虑 $\rho(T(y^{v_k}(\tau)), S)$ 的收敛情况. 对任意的 $k \in \mathbb{N}_+$, 因为 $v_k \in H$, 所以 $y^{v_k}(\tau)$ 是 Ω 上的微分同胚且其逆变换 $z \mapsto y^{v_k}(0; \tau, z)$ 也是 Ω 上的微分同胚, 其中 $y^{v_k}(0; \tau, z)$ 是初值问题 $dy/ds = v_k(s, y)$, $y(\tau) = z$ 的解 $y^{v_k}(s; \tau, z)$ 在 $s = 0$ 时刻的值.

由引理 2.5 知

$$|\det(D_z y^{v_k}(0; \tau, z))| \leq \exp\{C(n, \tau, \Omega)\|v_k\|_H\},$$

因为 $\{v_k\}$ 是 H 中的有界序列, 所以 $\{\det(Dy^{v_k}(\tau)^{-1})\} = \{\det(D_z y^{v_k}(0; \tau, z))\}$ 一致有界. 综上, $\{y^{v_k}(\tau)\}$ 和 $y^{\bar{v}}(\tau)$ 是 Ω 上的微分同胚, $y^{v_k}(\tau; 0, x) \to y^{\bar{v}}(\tau; 0, x)$ $(k \to +\infty)$, $\forall x \in \Omega$ 且 $\{\det(Dy^{v_k}(\tau)^{-1})\}$ 一致有界, 由关于 ρ 的假设条件 (1) 知

$$\rho(T(y^{\bar{v}}(\tau)), S) \leq \liminf_{k\to+\infty} \rho(T(y^{v_k}(\tau)), S),$$

即

$$J(\bar{v}) \leq \liminf_{k\to+\infty} J(v_k) = \inf_{v\in H} J(v).$$

可见, 泛函 $J(v)$ 的极小元就是其有界极小化序列的弱极限.

注 2.6 已知, 若泛函 $J(v) = \alpha\|v\|_H^2 + \rho(T(y^v(\tau)), S)$ 关于 v 严格凸, (1.3) 有唯一解. 然而, 即使 ρ 是凸的, 都很难保证 $\rho(T(y^v(\tau)), S)$ 关于 v 凸, 所以本文还未得到 (1.3) 解的唯一性. 在将来的工作中, 我们希望构造一个例子说明解是不唯一的.

2.2 稳定性

我们已经证明了, 当 ρ 满足假设条件 (1) 时, 给定 $(S, T) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$, 正则化模型 (1.3) 有解 $v \in H$. 从而, 自然可以定义一个 $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \to H$ 的解算子 $\mathcal{R} : (S, T) \mapsto v$. 本小节将进一步证明当 ρ 满足假设条件 (2) 时, 解算子 $\mathcal{R}$ 连续.

定理 2.7 设 ρ 满足假设条件 (2), 且对任意取定的 $\alpha > 0$, 记 v_k $(k \in \mathbb{N})$ 是

$$\min_v \left\{\alpha\|v\|_H^2 + \rho(T_k(y^v(\tau)), S_k)\right\}$$

的解. 若 $S_k \overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow} S$, $T_k \overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow} T$ $(k \to +\infty)$, 则存在 $\{v_k\}$ 的收敛子列 $\{v_{k_j}\}$, 满足 $v_{k_j} \overset{H}{\longrightarrow} \bar{v}$ $(j \to +\infty)$, 且

$$\bar{v} = \arg\min_v \{\alpha\|v\|_H^2 + \rho(T(y^v(\tau)), S)\}.$$

证明 因为 $v_k=\arg\min_v\left\{\alpha\|v\|_H^2+\rho(T_k(y^v(\tau)),S_k)\right\}$, 所以

$$\alpha\|v_k\|_H^2+\rho(T_k(y^{v_k}(\tau)),S_k)\le\alpha\|v\|_H^2+\rho(T_k(y^v(\tau)),S_k),\quad\forall\, v\in H.$$

取定 $\tilde v\in H$, 使得

$$\alpha\|\tilde v\|_H^2+\rho(T(y^{\tilde v}(\tau)),S)<+\infty. \tag{2.1}$$

由 $\left|\det(Dy^{\tilde v}(\tau)^{-1})\right|=\left|\det\left(D_zy^{\tilde v}(0;\tau,z)\right)\right|\le\exp\{C(n,\tau,\Omega)\|\tilde v\|_H\}$ 知 $\{\det(Dy^{\tilde v}(\tau)^{-1})\}$ 有界. 因为 $y^{\tilde v}(\tau)$ 是 Ω 上的微分同胚, $\{\det(Dy^{\tilde v}(\tau)^{-1})\}$ 有界, 且 $S_k\stackrel{L^p(\Omega)}{\longrightarrow}S$, $T_k\stackrel{L^p(\Omega)}{\longrightarrow}T$ $(k\to+\infty)$, 由关于 ρ 的假设条件 (2) 知

$$\rho(T_k(y^{\tilde v}(\tau)),S_k)\to\rho(T(y^{\tilde v}(\tau)),S)\quad(k\to+\infty). \tag{2.2}$$

结合 (2.1) 和 (2.2) 知 $\left\{\alpha\|\tilde v\|_H^2+\rho(T_k(y^{\tilde v}(\tau)),S_k)\right\}$ 有界. 进一步, 由 v_k 的定义知

$$\alpha\|v_k\|_H^2+\rho(T_k(y^{v_k}(\tau)),S_k)\le\alpha\|\tilde v\|_H^2+\rho(T_k(y^{\tilde v}(\tau)),S_k),$$

从而 $\{\|v_k\|_H\}$ 有界. 因为 H 是自反的 Banach 空间, 且 $\|v_k\|_H$ 有界, 所以, 存在 $\{v_k\}$ 的弱收敛子列, 我们仍记作 $\{v_k\}$, 且 $v_k\stackrel{H}{\rightharpoonup}\bar v$ $(k\to+\infty)$.

下面证明 $\bar v$ 是 $\min_v\left\{\alpha\|v\|_H^2+\rho(T(y^v(\tau)),S)\right\}$ 的解. 由 $\|\cdot\|_H^2$ 的弱下半连续性知

$$\|\bar v\|_H^2\le\liminf_{k\to+\infty}\|v_k\|_H^2.$$

此外, 因为 $\{y^{v_k}(\tau)\}$ 和 $y^{\bar v}(\tau)$ 是 Ω 上的微分同胚, $y^{v_k}(\tau;0,x)\to y^{\bar v}(\tau;0,x)\,(k\to+\infty)$, $\forall\, x\in\Omega$ 且 $\{\det(Dy^{v_k}(\tau)^{-1})\}$ 一致有界, 所以

$$\lim_{k\to+\infty}\rho(T_k(y^{v_k}(\tau)),S_k)=\rho(T(y^{\bar v}(\tau)),S).$$

再由 $\alpha\|v_k\|_H^2+\rho(T_k(y^{v_k}(\tau)),S_k)\le\alpha\|v\|_H^2+\rho(T_k(y^v(\tau)),S_k)$, $\forall\, v\in H$, 可得

$$\begin{aligned}\alpha\|\bar v\|_H^2+\rho(T(y^{\bar v}(\tau)),S)&\le\liminf_{k\to+\infty}\alpha\,\|v_k\|_H^2+\rho(T_k(y^{v_k}(\tau)),S_k)\\&\le\liminf_{k\to+\infty}\alpha\|v\|_H^2+\rho(T_k(y^v(\tau)),S_k)\\&=\alpha\|v\|_H^2+\rho(T(y^v(\tau)),S),\quad\forall\, v\in H,\end{aligned}$$

所以 $\bar v$ 是 $\min_v\left\{\alpha\|v\|_H^2+\rho(T(y^v(\tau)),S)\right\}$ 的解.

最后, 我们证明 v_k 在 H 中强收敛到 $\bar v$, 即

$$\lim_{k\to+\infty}\|v_k-\bar v\|_H=0.$$

因为

$$\alpha\,\|v_k\|_H^2+\rho(T_k(y^{v_k}(\tau)),S_k)\le\alpha\|\bar v\|_H^2+\rho(T_k(y^{\bar v}(\tau)),S_k),$$

所以

$$\|v_k\|_H^2\le\|\bar v\|_H^2+\frac{1}{\alpha}\left(\rho(T_k(y^{\bar v}(\tau)),S_k)-\rho(T_k(y^{v_k}(\tau)),S_k)\right),$$

且

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to+\infty}\|v_k\|_H^2&\le\|\bar v\|_H^2+\frac{1}{\alpha}\limsup_{k\to+\infty}\left(\rho(T_k(y^{\bar v}(\tau)),S_k)-\rho(T_k(y^{v_k}(\tau)),S_k)\right)\\&=\|\bar v\|_H^2+\frac{1}{\alpha}\left(\rho(T(y^{\bar v}(\tau)),S)-\rho(T(y^{\bar v}(\tau)),S)\right)=\|\bar v\|_H^2.\end{aligned}$$

由上式和 $\|\cdot\|_H^2$ 的弱下半连续性可知

$$\|\bar{v}\|_H^2 \leq \liminf_{k\to+\infty} \|v_k\|_H^2 \leq \limsup_{k\to+\infty} \|v_k\|_H^2 \leq \|\bar{v}\|_H^2,$$

即

$$\lim_{k\to+\infty} \|v_k\|_H^2 = \|\bar{v}\|_H^2.$$

又因为 $v_k \xrightarrow{H} \bar{v}\ (j\to+\infty)$, 所以

$$\langle v_k, \bar{v}\rangle \to \langle \bar{v}, \bar{v}\rangle = \|\bar{v}\|_H^2 \quad (k\to+\infty),$$

且

$$\lim_{k\to+\infty} \|v_k - \bar{v}\|_H^2 = \lim_{k\to+\infty} (\|v_k\|_H^2 + \|\bar{v}\|_H^2 - 2\langle v_k, \bar{v}\rangle_H) = 0.$$

证毕.

3 方向场正则化模型的收敛性

前面提到, 配准原问题是要找一个方向场 $v_0 \in L^1([0,\tau], C_0^1(\Omega))$, 使得由 v_0 决定的变换 φ_0 满足

$$\rho(T(\varphi_0), S) \leq \rho(T(y^v(\tau)), S), \quad \forall\, v \in L^1([0,\tau], C_0^1(\Omega)).$$

事实上, 为了保证 v_0 的性质, 尤其是 $y^{v_0}(\tau)$ 的性质, 配准问题归结为先求解正则化问题 (1.3)

$$\min_v \left\{\alpha\|v\|_H^2 + \rho(T(y^v(\tau)), S)\right\}$$

找一个近似的方向场 v^α, 然后通过求解由 v^α 定义的初值问题 (1.2) 得到配准的变换 $y^{v^\alpha}(\tau)$. 我们知道, 由此得到的变换 $y^{v^\alpha}(\tau)$ 几乎不可能是配准问题原本要找的变换. 然而, 如果 (1.3) 收敛, 即, 对给定的 S, T, 能够取到一列 $\{\alpha_k\}$, 使得由解序列 $\{v^{\alpha_k}\}$ 决定的变换序列 $\{y^{v^{\alpha_k}}(\tau)\}$ 可以收敛到配准原问题的一个解, 那么通过选择合适的正则化参数, 就可以保证正则化问题的解能够收敛到原问题的一个解.

在给出上述收敛性分析之前, 我们先阐明方向场配准原问题解的定义.

定义 3.1 变换 $\varphi_0 : \Omega \to \Omega$ 称为方向场配准原问题的解, 如果:

(1) 存在方向场 $v \in H$, 使得 φ_0 与由 v 决定的微分同胚变换族 $\{y^v(s) : x \mapsto y^v(s; 0, x) \mid s \in [0,\tau]\}$ 的端点变换 $y^v(\tau)$ 相吻合, 即 $\varphi_0 = y^v(\tau)$;

(2) $\rho(T(\varphi_0), S) \leq \rho(T(y^v(\tau)), S)$, $\forall\, v \in H$.

定理 3.2 设 ρ 满足假设条件 (1), φ_0 是方向场配准原问题的一个解, 且 $\forall\, k \in \mathbb{N}$, 记

$$v^{\alpha_k} = \arg\min_v \left\{\alpha_k\|v\|_H^2 + \rho(T(y^v(\tau)), S)\right\}.$$

若 $\alpha_k \to 0\ (k\to+\infty)$, 则 $\{v^{\alpha_k}\}$ 有收敛子列 (不妨仍记作 $\{v^{\alpha_k}\}$), 即 $v^{\alpha_k} \xrightarrow{H} \bar{v}\ (k\to+\infty)$, 且 $y^{\bar{v}}(\tau)$ 是方向场配准原问题的一个解.

证明 因为 φ_0 是方向场配准原问题的一个解, 由定义 3.1 知, 存在方向场 $v_0 \in H$, 使得 $\varphi_0 = y^{v_0}(\tau)$, 且

$$\rho(T(y^{v_0}(\tau)), S) \leq \rho(T(y^v(\tau)), S), \quad \forall\, v \in H. \tag{3.1}$$

而由 v^{α_k} 的定义知

$$\alpha_k \|v^{\alpha_k}\|_H^2 + \rho(T(y^{v^{\alpha_k}}(\tau)), S) \leq \alpha_k \|v_0\|_H^2 + \rho(T(y^{v_0}(\tau)), S), \tag{3.2}$$

从而

$$\alpha_k \|v^{\alpha_k}\|_H^2 \leq \alpha_k \|v_0\|_H^2 + \rho(T(y^{v_0}(\tau)), S) - \rho(T(y^{v^{\alpha_k}}(\tau)), S).$$

因为由 (3.1) 已知 $\rho(T(y^{v_0}(\tau)), S) \leq \rho(T(y^{v^{\alpha_k}}(\tau)), S)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}_+$, 所以 $\alpha_k \|v^{\alpha_k}\|_H^2 \leq \alpha_k \|v_0\|_H^2$, 即

$$\|v^{\alpha_k}\|_H \leq \|v_0\|_H, \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}_+.$$

可见序列 $\{\|v^{\alpha_k}\|_H\}$ 有界, 由引理 2.4 知, 存在 $\{v^{\alpha_k}\}$ 的弱收敛子列 (仍记作 $\{v^{\alpha_k}\}$) 满足 $v^{\alpha_k} \overset{H}{\rightharpoonup} \bar{v}$ $(k \to +\infty)$, 且 $y^{v^{\alpha_k}}(\tau; 0, x) \to y^{\bar{v}}(\tau; 0, x)$ $(k \to +\infty)$, $\forall\, x \in \Omega$.

下面先证明 $y^{\bar{v}}(\tau)$ 是配准原问题的一个解. 显然 $y^{\bar{v}}(\tau)$ 是由方向场 $\bar{v} \in H$ 决定的变换, 所以要证明 $y^{\bar{v}}(\tau)$ 是方向场配准原问题的解, 只需要证明 $\rho(T(y^{\bar{v}}(\tau)), S) \leq \rho(T(y^{v}(\tau)), S)$, $\forall\, v \in H$. 我们将通过证明

$$\rho(T(y^{\bar{v}}(\tau)), S) = \rho(T(\varphi_0), S)$$

得到上式. 仍由 (3.2) 知

$$\rho(T(y^{v^{\alpha_k}}(\tau)), S) - \rho(T(\varphi_0), S) \leq \alpha_k \|v_0\|_H^2,$$

从而

$$\limsup_{k \to +\infty} (\rho(T(y^{v^{\alpha_k}}(\tau)), S) - \rho(T(\varphi_0), S)) \leq \limsup_{k \to +\infty} \alpha_k \|v_0\|_H^2 = 0.$$

此外, 由关于 ρ 的假设条件 (1) 知

$$\begin{aligned} \limsup_{k \to +\infty} (\rho(T(y^{v^{\alpha_k}}(\tau)), S) - \rho(T(\varphi_0), S)) &= \lim_{k \to +\infty} \rho(T(y^{v^{\alpha_k}}(\tau)), S) - \rho(T(\varphi_0), S) \\ &= \rho(T(y^{\bar{v}}(\tau)), S) - \rho(T(\varphi_0), S) \geq 0. \end{aligned}$$

因此

$$0 \leq \rho(T(y^{\bar{v}}(\tau)), S) - \rho(T(\varphi_0), S) = \limsup_{k \to +\infty} \rho(T(y^{v^{\alpha_k}}(\tau)), S) \leq 0,$$

且

$$\rho(T(y^{\bar{v}}(\tau)), S) = \rho(T(\varphi_0), S).$$

最后证明

$$v^{\alpha_k} \xrightarrow{H} \bar{v} \ \ (k \to +\infty).$$

因为

$$\alpha_k \|v^{\alpha_k}\|_H^2 + \rho(T(y^{v^{\alpha_k}}(\tau)), S) \leq \alpha_k \|\bar{v}\|_H^2 + \rho(T(y^{\bar{v}}(\tau)), S),$$

且 $\rho(T(y^{\bar{v}}(\tau)), S) \leq \rho(T(y^{v^{\alpha_k}}(\tau)), S)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}_+$, 所以

$$\|v^{\alpha_k}\|_H^2 \leq \|\bar{v}\|_H^2, \quad 且 \ \limsup_{k \to +\infty} \|v^{\alpha_k}\|_H^2 \leq \|\bar{v}\|_H^2.$$

再由 $\|\cdot\|_H^2$ 的弱下半连续性知

$$\|\bar{v}\|_H^2 \leq \liminf_{k \to +\infty} \|v^{\alpha_k}\|_H^2 \leq \limsup_{k \to +\infty} \|v^{\alpha_k}\|_H^2 \leq \|\bar{v}\|_H^2,$$

即

$$\lim_{k\to+\infty}\|v^{\alpha_k}\|_H^2=\|\bar{v}\|_H^2.$$

又因为 $v^{\alpha_k}\overset{H}{\rightharpoonup}\bar{v}\ (k\to+\infty)$, 所以

$$\lim_{k\to+\infty}\|v^{\alpha_k}-\bar{v}\|_H^2=\lim_{k\to+\infty}\left(\|v^{\alpha_k}\|_H^2+\|\bar{v}\|_H^2-2\langle v^{\alpha_k},\bar{v}\rangle_H\right)=0,$$

从而 $\{v^{\alpha_k}\}$ 强收敛到 $\bar{v}$. 证毕.

我们已经证明, 当正则化参数趋于 0 时, 近似解 $y^{v^{\alpha}}(\tau)$ 可以收敛到方向场配准原问题的一个解, 但是并不知道收敛的快慢, 事实上, 得到收敛速度还是很有必要的. 然而, 按照经典的估计收敛速度的方法很难得到正则化模型 (1.3) 解的收敛速度. 下面我们对估计收敛速度时存在的问题做一点说明. 在估计 Tikhonov 型正则化问题

$$\min_{\varphi}\{\alpha R(\varphi)+\rho(F(\varphi),\psi)\}$$

解的收敛速度时, 需要要求算子 F 以及原问题 $F(\varphi)=\psi$ 的解 φ_0 满足一定的附加条件, 即所谓的源条件假设 [7, 15] 或变分不等式假设 [18, 21]. 在源条件假设中最基本的一条就是 F 是 Fréchet 可微的, 且在变分不等式成立的充分条件中, 通常也需要求 F 是 Gâteaux 可导的. 然而, 由于 (1.3) 中含有间接变量 $y^v(\tau)$, 即 T 间接作用在 v 上, 且 v 通过常微初值问题决定 $y^v(\tau)$, 从而得不到算子 $v\mapsto y^v(\tau)$ 的可微性, 所以无法提出保证 $T(y^v(\tau))$ 关于 v 可微的合适条件. 因此, 目前还得不到 $y^{v^{\alpha}}(\tau)$ 收敛速度的估计. 那么, 如果先取 ρ 为平方 L^2 范, 能否针对 (1.3) 的特点, 通过提出其它的假设条件或者采用不同的方法估计 $y^{v^{\alpha}}(\tau)$ 的收敛速度, 还有待进一步研究.

4 应用举例

本节证明图像配准中常用的三个相似性泛函均满足第 2 节的条件 (1) 和 (2). 这三个相似性泛函分别是平方 L^2 范, 互相关泛函和 Kullback–Leibler 偏差泛函. 显然, 若假设条件 (2) 成立, 假设条件 (1) 必成立, 所以我们只验证选取的泛函满足假设条件 (2). 特别地, 对于平方 L^2 范和互相关泛函, 我们直接证明它们是连续的. 因为前面我们已提到, 如果 ρ 是 $L^p(\Omega)\times L^p(\Omega), 1\leq p<+\infty$ 上的连续泛函, 则假设条件 (2) 必成立. 为了说明这一结论, 只需要下述引理.

引理 4.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界闭集, $f\in L^p(\Omega)$, $1\leq p<+\infty$, $\{\varphi_k\}$ 和 φ 是 Ω 上的微分同胚, 且 $\{|\det(D\varphi_k^{-1})|\}$ 一致有界. 若 $f_k\xrightarrow{L^p(\Omega)}f$ 且 $\varphi_k(x)\to\varphi(x)\ (k\to+\infty)$, $\forall\, x\in\Omega$, 则

$$f_k\circ\varphi_k\xrightarrow{L^p(\Omega)}f\circ\varphi\quad(k\to+\infty).$$

证明 令 $|\det(D\varphi_k^{-1}(z))|\leq M_1$, $\forall\, z\in\Omega$, $k\in\mathbb{N}_+$, 且 $\|\det(D\varphi^{-1})\|_\infty=M_2$, 其中 M_1 和 M_2 是常数. 因为 $f\in L^p(\Omega)$, 所以, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\tilde{f}\in C_0^\infty(\Omega)$, 使得

$$\|f-\tilde{f}\|_p<\frac{\varepsilon}{3\max\{M_1^{\frac{1}{p}},M_2^{\frac{1}{p}}\}}.$$

由三角不等式知

$$\begin{aligned}\|f_k\circ\varphi_k-f\circ\varphi\|_p&=\|(f_k\circ\varphi_k-f\circ\varphi_k)+(f\circ\varphi_k-f\circ\varphi)\|_p\\&\leq\|f_k\circ\varphi_k-f\circ\varphi_k\|_p+\|f\circ\varphi_k-f\circ\varphi\|_p,\end{aligned}$$

且

$$\|f\circ\varphi_k - f\circ\varphi\|_p \le \|f\circ\varphi_k - \tilde f\circ\varphi_k\|_p + \|\tilde f\circ\varphi_k - \tilde f\circ\varphi\|_p + \|\tilde f\circ\varphi - f\circ\varphi\|_p.$$

下面先证明 $\|f\circ\varphi_k - f\circ\varphi\|_p \to 0\,(k\to+\infty)$. 给定 $k\in\mathbb{N}_+$, 令 $z=\varphi_k(x)$, 则

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi_k - \tilde f\circ\varphi_k\|_p^p &= \int_\Omega |f(\varphi_k(x)) - \tilde f(\varphi_k(x))|^p dx,\\ &= \int_\Omega |f(z)-\tilde f(z)|^p|\det(D_z\varphi_k^{-1}(z))|dz\\ &\le M_1\|f-\tilde f\|_p^p,\end{aligned}$$

即对任意的 $k\in\mathbb{N}_+$,

$$\|f\circ\varphi_k - \tilde f\circ\varphi_k\|_p \le M_1^{\frac{1}{p}}\|f-\tilde f\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

类似地, 我们可以得到

$$\|f\circ\varphi - \tilde f\circ\varphi\|_p^p = \int_\Omega |f(z)-\tilde f(z)|^p|\det(D_z\varphi^{-1}(z))|dz \le M_2\|f-\tilde f\|_p^p,$$

即

$$\|f\circ\varphi - \tilde f\circ\varphi\|_p \le M_2^{\frac{1}{p}}\|f-\tilde f\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

此外, 因为 $\tilde f\in C_0^\infty(\Omega)$ 且 $\varphi_k(x)\to\varphi(x)\,(k\to+\infty)$, $\forall\, x\in\Omega$, 有 $\tilde f(\varphi_k(x))\to\tilde f(\varphi(x))\,(k\to+\infty)$. 由 Lebesgue 控制收敛定理知 $\|\tilde f\circ\varphi_k - \tilde f\circ\varphi\|_p\to 0\,(k\to+\infty)$, 即对上述 $\varepsilon>0$ 存在 $N>0$, 使得对任意的 $k>N$, 有

$$\|\tilde f\circ\varphi_k - \tilde f\circ\varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{3},$$

从而

$$f\circ\varphi_k \xrightarrow{L^p(\Omega)} f\circ\varphi \quad (k\to+\infty).$$

接着证明 $\|f_k\circ\varphi_k - f\circ\varphi_k\|_p\to 0\,(k\to+\infty)$. 同样地, 给定 $k\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\|f_k\circ\varphi_k - f\circ\varphi_k\|_p^p = \int_\Omega |f_k(z)-f(z)|^p|\det(D_z\varphi_k^{-1}(z))|dz \le M_1\|f_k-f\|_p^p,$$

因为 $f_k \xrightarrow{L^p(\Omega)} f$, 所以

$$\|f_k\circ\varphi_k - f\circ\varphi_k\|_p\to 0 \quad (k\to+\infty).$$

综上

$$\|f_k\circ\varphi_k - f\circ\varphi\|_p\to 0 \quad (k\to+\infty).$$

证毕.

4.1 平方 L^2 范

定义 4.2 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, 称 $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 上的泛函

$$\rho_{L^2}(f,g) = \int_\Omega |f(x)-g(x)|^2dx, \quad \forall\, f,g\in L^2(\Omega)$$

为平方 L^2 范.

显然, ρ_{L^2} 是非负的, 进一步, 我们将证明它在 $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 上连续.

定理 4.3 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域. 若 $f_k \stackrel{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} f$ 且 $g_k \stackrel{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} g\,(k\to+\infty)$, 则

$$\rho_{L^2}(f_k,g_k)\to\rho_{L^2}(f,g)\quad(k\to+\infty).$$

证明 由三角不等式和 $f_k \stackrel{L^p(\Omega)}{\longrightarrow} f$, $g_k \stackrel{L^p(\Omega)}{\longrightarrow} g\,(k\to+\infty)$ 知

$$\|(f_k-g_k)-(f-g)\|_2\le\|f_k-f\|_2+\|g_k-g\|_2\to0\quad(k\to+\infty),$$

即 $\|f_k-g_k\|_2\to\|f-g\|_2\,(k\to+\infty)$, 且 ρ_{L^2} 连续. 证毕.

注 4.4 由定理 2.2 知, 当 $\rho=\rho_{L^2}$ 时, 只要 $S,T\in L^2(\Omega)$, 正则化模型 (1.3) 有解. 然而, 文 [14] 中的存在性定理要求 T 是 Ω 上几乎处处连续的有界函数, 且 S 有界.

注 4.5 易知, 定理 4.3 对 ρ_{L^p} $(1\le p\le\infty)$ 也成立. 但因为 ρ_{L^2} 是图像配准中最常用的相似性泛函之一, 所以本文以它为例.

4.2 互相关泛函

定义 4.6 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, 称 $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 上的泛函

$$\rho_{\rm CC}(f,g)=-\int_\Omega\frac{\langle f-\mu^1(x),g-\mu^2(x)\rangle_{U(x)}^2}{\|f-\mu^1(x)\|_{L^2(U(x))}^2\,\|g-\mu^2(x)\|_{L^2(U(x))}^2+\varepsilon}dx,\quad\forall\,f,g\in L^2(\Omega)\tag{4.1}$$

为互相关泛函, 其中 $\varepsilon>0$ 是给定的常数, $U(x)$ 是以 x 为心的领域, 且

$$\begin{aligned}
&\mu^1(x)=\frac{1}{|U(x)|}\int_{U(x)}f(z)dz,\quad\mu^2(x)=\frac{1}{|U(x)|}\int_{U(x)}g(z)dz,\\
&\|f-\mu^1(x)\|_{L^2(U(x))}^2=\int_{U(x)}|f(z)-\mu^1(x)|^2dz,\\
&\|g-\mu^2(x)\|_{L^2(U(x))}^2=\int_{U(x)}|g(z)-\mu^2(x)|^2dz,\\
&\langle f-\mu^1(x),g-\mu^2(x)\rangle_{U(x)}=\int_{U(x)}(f(z)-\mu^1(x))\times(g(z)-\mu^2(x))dz.
\end{aligned}$$

注 4.7 在现有的将互相关泛函作为保真项的配准方法 [2] 中, 都是直接定义互相关泛函为

$$-\int_\Omega\frac{\langle f-\mu^1(x),g-\mu^2(x)\rangle_{U(x)}^2}{\|f-\mu^1(x)\|_{L^2(U(x))}^2\,\|g-\mu^2(x)\|_{L^2(U(x))}^2}dx,$$

并没有明确指出当 f 或 g 在邻域 $U(x)$ 上几乎处处取常值时, 泛函 $\rho_{\rm CC}$ 如何定义. 然而, 如果 f,g 是图像函数, 常常会出现 f 或 g 在某邻域内取常值的情况, 也就是说 $f=\mu^1(x)$ 或 $g=\mu^2(x)$ 这种情况是不可避免的. 因此, 本文对上述定义稍做了修改, 定义了形如 (4.1) 式的互相关泛函. 此外, 考虑 (4.1) 式中的被积函数, 注意到

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\langle f-\mu^1(x),g-\mu^2(x)\rangle_{U(x)}^2}{\|f-\mu^1(x)\|_{L^2(U(x))}^2\,\|g-\mu^2(x)\|_{L^2(U(x))}^2+\varepsilon}\\
&\quad=\begin{cases}0, & \|f-\mu^1(x)\|_{L^2(U(x))}=0\text{或}\|g-\mu^2(x)\|_{L^2(U(x))}=0\\ \dfrac{\langle f-\mu^1(x),g-\mu^2(x)\rangle_{U(x)}^2}{\|f-\mu^1(x)\|_{L^2(U(x))}^2\|g-\mu^2(x)\|_{L^2(U(x))}^2}, & \text{其他}\end{cases}\\
&\quad=r_{U(x)}(f,g)^2,
\end{aligned}$$

其中, $r_{U(x)}(f,g)$ 是 f 和 g (在邻域 $U(x)$ 上) 的相关系数. 但是, 如果定义互相关泛函为

$$-\int_\Omega r_{U(x)}(f,g)^2dx,$$

那么, 当 f 或 g 在邻域 $U(x)$ 上几乎处处取常值时, $r_{U(x)}(f,g)$ 在这样的 f 或 g 处不连续. 为了说明上述问题, 可以看这样一个例子: 不妨考虑定义在区域 U 上的两个均值为 0 的函数 ξ,η. 设 $\xi,\eta\in L^2(U)$, 且 ξ 在 U 上几乎处处取常值, 则 $\|\xi\|_{L^2(U)}=0$, 由相关系数的定义知 $r_U(\xi,\eta)=0$. 若取序列 $\xi_k=\frac{1}{k}\eta$, 显然 $\xi_k\xrightarrow{L^2(U)}\xi\,(k\to+\infty)$, 但

$$r_U(\xi_k,\eta)=\frac{\langle\xi_k,\eta\rangle}{\|\xi_k\|_{L^2(U)}\|\eta\|_{L^2(U)}}\to 1\neq r_U(\xi,\eta)\quad(k\to+\infty),$$

即 $r_U(\xi,\eta)$ 在 ξ 处不连续. 事实上, 可以取到不同的子列 $\{\xi_k\}$, 使得 $\lim_{k\to+\infty}r_U(\xi_k,\eta)\in[-1,1]$, 所以没有办法用一个确定的值作为极限值, 使得 $r_U(\xi,\eta)$ 在 ξ 或 η 几乎处处取常值的地方连续. 因此, 我们并没有选择 $-\int_\Omega r_{U(x)}(f,g)^2dx$ 这种定义方式.

注 4.8 理论上, $U(x)$ 只要是一个以 x 为心, 以确定的数为半径的邻域即可. 然而, 在实际的图像配准中, 通常选取 $U(x)$ 是以 x 为心, n 为半径的方领域, 即所谓的 n^D 窗, 其中 D 是图像的维数, n 一般取 5 [2].

继续分析 $\rho_{\rm CC}$. 对 $\rho_{\rm CC}(f,g)$ 中的被积函数运用 Hölder 不等式, 有

$$\left|\frac{\langle f-\mu_1(x),g-\mu_2(x)\rangle^2}{\|f-\mu_1(x)\|^2\|g-\mu_2(x)\|^2+\varepsilon}\right|<1,$$

即 $\rho_{\rm CC}$ 是 $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 上的下有界泛函. 结合下面的收敛性结果, 即可证明 $\rho_{\rm CC}$ 在 $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 上连续.

引理 4.9 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界区域, 任取 $x\in\Omega$, 令 $\mu^1(x),\mu^2(x),\mu_k^1(x),\mu_k^2(x)$ 分别表示 f,g,f_k,g_k 在领域 $U(x)$ 上的均值. 若 $f_k\xrightarrow{L^2(\Omega)}f$, $g_k\xrightarrow{L^2(\Omega)}g\,(k\to+\infty)$, 则

$$\|f_k-\mu_k^1(x)\|_{L^2(U(x))}\to\|f-\mu^1(x)\|_{L^2(U(x))},\quad \|g_k-\mu_k^2(x)\|_{L^2(U(x))}\to\|g-\mu^2(x)\|_{L^2(U(x))},$$

且

$$\int_{U(x)}(f_k(z)-\mu_k^1(x))(g_k(z)-\mu_k^2(x))dz\to\int_{U(x)}(f(z)-\mu^1(x))(g(z)-\mu^2(x))dz.$$

证明 因为

$$\begin{aligned}|\mu_k^1(x)-\mu^1(x)|&=\left|\frac{1}{|U(x)|}\int_{U(x)}(f_k(z)-f(z))dz\right|\leq\frac{1}{|U(x)|}\int_{U(x)}|f_k(z)-f(z)|dz\\&\overset{\text{Hölder}}{\leq}\frac{1}{\sqrt{|U(x)|}}\|f_k-f\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

其中 $U(x)$ 是取定的领域, 且 $\|f_k-f\|_{L^2(\Omega)}\to 0$ $(k\to+\infty)$, 所以 $\mu_k^1(x)\to\mu^1(x)$ $(k\to+\infty)$. 从而

$$\begin{aligned}\|(f_k-\mu_k^1(x))-(f-\mu^1(x))\|_{L^2(U(x))}&\leq\|f_k-f\|_{L^2(U(x))}+|\mu_k^1(x)-\mu^1(x)|\sqrt{|U(x)|}\\&\leq\|f_k-f\|_{L^2(\Omega)}+|\mu_k^1(x)-\mu^1(x)|\sqrt{|\Omega|}\to 0\quad(k\to+\infty),\end{aligned}$$

即

$$\|f_k-\mu_k^1(x)\|_{L^2(U(x))}\to\|f-\mu^1(x)\|_{L^2(U(x))}\quad(k\to+\infty).$$

同理可得

$$\mu_k^2(x) \to \mu^2(x) \quad (k \to +\infty),$$

且

$$\left\|g_k - \mu_k^2(x)\right\|_{L^2(U(x))} \to \left\|g - \mu^2(x)\right\|_{L^2(U(x))} \quad (k \to +\infty).$$

又因为

$$\begin{aligned}\left|\int_{U(x)}(f_k(z)g_k(z)-f(z)g(z))dz\right| &\le \int_{U(x)}|f_k(z)(g_k(z)-g(z))|dz+\int_{U(x)}|(f_k(z)-f(z))g(z)|dz\\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \|f_k\|_{L^2(\Omega)}\|g_k-g\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\Omega)}\|f_k-f\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

且由 $\{f_k\}$ 收敛知 $\|f_k\|_{L^2(\Omega)}$ 有界, 所以

$$\int_{U(x)} f_k(z)g_k(z)dz \to \int_{U(x)} f(z)g(z)dz \quad (k \to +\infty).$$

此外, 由于

$$\begin{aligned}&\left|\int_{U(x)}(f_k(z)\mu_k^2(x)-f(z)\mu^2(x))dz\right|\\ &\quad=\left|\int_{U(x)}(f_k(z)-f(z))\mu^2(x)dz+\int_{U(x)}f_k(z)(\mu_k^2(x)-\mu^2(x))dz\right|\\ &\quad\le\sqrt{|\Omega|}(\|f_k-f\|_{L^2(\Omega)}|\mu^2(x)|+\|f_k\|_{L^2(\Omega)}|\mu_k^2(x)-\mu^2(x)|),\end{aligned}$$

所以

$$\int_{U(x)} f_k(z)\mu_k^2(x)dz \to \int_{U(x)} f(z)\mu^2(x)dz \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

同理

$$\int_{U(x)} g_k(z)\mu_k^1(x)dz \to \int_{U(x)} g(z)\mu^1(x)dz \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

综上可得

$$\int_{U(x)}(f_k(z)-\mu_k^1(x))(g_k(z)-\mu_k^2(x))dz \to \int_{U(x)}(f(z)-\mu^1(x))(g(z)-\mu^2(x))dz.$$

证毕.

定理 4.10 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域. 若 $f_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} f$, $g_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} g\,(k \to +\infty)$, 则

$$\rho_{\mathrm{CC}}(f_k, g_k) \to \rho_{\mathrm{CC}}(f, g) \quad (k \to +\infty).$$

由引理 4.9 的结果和 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\rho_{\mathrm{CC}}(f_k,g_k)&=-\int_\Omega\lim_{k\to+\infty}\frac{\left(\int_{U(x)}(f_k(z)-\mu_k^1(x))(g_k(z)-\mu_k^2(x))dz\right)^2}{\left(\int_{U(x)}|f_k(z)-\mu_k^1(x)|^2dz\right)\left(\int_{U(x)}|g_k(z)-\mu_k^2(x)|^2dz\right)+\varepsilon}dx\\ &=-\int_\Omega\frac{\left(\int_{U(x)}(f(z)-\mu^1(x))(g(z)-\mu^2(x))dz\right)^2}{\left(\int_{U(x)}|f(z)-\mu^1(x)|^2dz\right)\left(\int_{U(x)}|g(z)-\mu^2(x)|^2dz\right)+\varepsilon}dx\\ &=\rho_{\mathrm{CC}}(f,g),\end{aligned}$$

因此 ρ_{CC} 连续且满足关于 ρ 的假设条件 (2). 证毕.

4.3 Kullback–Leibler 偏差泛函

定义 4.11 设 f,g 是有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数, 定义其 Kullback–Leibler 偏差为

$$\rho_{\mathrm{KLD}}(f,g)=\int_{\mathbb{R}^2}p_{f,g}(i,j)\log\frac{p_{f,g}(i,j)}{p(i,j)}didj,$$

其中, $p_{f,g}(i,j)$ 是由 f 和 g 的取值确定的联合密度函数, $p(i,j)$ 是给定的密度函数.

特别地, 如果 $f,g\in L^\infty(\Omega)$, 不妨记 $M=\max\{\|f\|_\infty,\|g\|_\infty\}$, 并且按下述方式定义密度函数 $p_{f,g}(i,j)$, 即

$$p_{f,g}(i,j)=\begin{cases}\dfrac{\tilde{p}_{f,g}(i,j)}{\int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M}\tilde{p}_{f,g}(i,j)didj}, & (i,j)\in[-M,M]\times[-M,M],\\ 0, & (i,j)\notin[-M,M]\times[-M,M],\end{cases}$$

其中

$$\tilde{p}_{f,g}(i,j)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega G(f(x)-i,g(x)-j)dx>0,$$

$G(\cdot,\cdot)$ 是均值为 0, 方差为 σ 的二维高斯函数. 从而

$$\rho_{\mathrm{KLD}}(f,g)=\int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M}p_{f,g}(i,j)\log\frac{p_{f,g}(i,j)}{p(i,j)}didj.$$

常见的估计密度函数的方法有直方图方法和 Parzen 窗密度估计方法 [9], 本文统一按后者估计密度函数.

因为文 [10] 中已证明 $\rho_{\mathrm{KLD}}(f,g)\geq 0$, 所以 ρ_{KLD} 是 $L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$ 上的下有界泛函. 进一步, 我们将证明 ρ_{KLD} 满足关于 ρ 的假设条件 (2).

定理 4.12 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界区域, $\{\varphi_k\}$ 和 φ 是 Ω 上的微分同胚, 且 $\{|\det(D\varphi_k^{-1})|\}$ 一致有界. 若 $f_k\xrightarrow{L^\infty(\Omega)}f$, $g_k\xrightarrow{L^\infty(\Omega)}g\,(k\to+\infty)$ 且 $\varphi_k(x)\to\varphi(x)\,(k\to+\infty)$, 则

$$\rho_{\mathrm{KLD}}(f_k\circ\varphi_k,g_k)\to\rho_{\mathrm{KLD}}(f\circ\varphi,g)\quad(k\to+\infty).$$

下面先证明 $\{f_k\circ\varphi_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 几乎处处一致有界.

引理 4.13 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界区域, $\{\varphi_k\}$ 是 Ω 上的微分同胚. 若 $f_k\xrightarrow{L^\infty(\Omega)}f$, $g_k\xrightarrow{L^\infty(\Omega)}g\,(k\to+\infty)$, 则 $\{f_k\circ\varphi_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 几乎处处一致有界.

证明 因为 $\|f_k-f\|_\infty\to 0\,(k\to+\infty)$, 所以存在 $N>0$, 使得对任意的 $k>N$, $\|f_k-f\|_\infty<1$, 且

$$\|f_k\|_\infty\leq\|f_k-f\|_\infty+\|f\|_\infty\leq 1+\|f\|_\infty,\quad\forall\,k>N.$$

进一步, 由 $\|f_k\|_\infty=\inf_{E\subset\Omega,\,|E|=0}\sup_{x\in\Omega\setminus E}|f_k(x)|$ 知, 存在集合 $E_k\subset\Omega$ 且 $|E_k|=0$, 使得

$$|f_k(x)|\leq\sup_{x\in\Omega\setminus E_k}|f_k(x)|\leq\|f_k\|_\infty+1,\quad\forall\,x\in\Omega\setminus E_k.$$

由上面两个不等式可得

$$|f_k(x)|\leq\|f\|_\infty+2,\quad\forall\,x\notin E\doteq\bigcup_k E_k,\quad\forall\,k>N,$$

即 $\{f_k\}$ 几乎处处一致有界. 同理可得 $\{g_k\}$ 几乎处处一致有界. 此外, 因为 φ_k 是 Ω 上的微分同胚, 所以 $\varphi_k^{-1}(E)$ 是零测集, 且

$$|f_k(\varphi_k(x))| \leq \|f\|_\infty + 2, \quad \forall\, x \notin \bigcup_k \varphi_k^{-1}(E), \quad \forall\, k > N,$$

其中 $\bigcup_k \varphi_k^{-1}(E)$ 也是零测集, 因此, $\{f_k \circ \varphi_k\}$ 几乎处处一致有界. 证毕.

下面证明定理 4.12.

令 $M = \max\{\|f\|_\infty, \|g\|_\infty\}$, $M_k = \max\{\|f_k\|_\infty, \|g_k\|_\infty\}$, $m_k = \min\{M_k, M\}$, 且 $p_k(i,j) = p_{f_k\circ\varphi_k, g_k}(i,j)$, $p_0(i,j) = p_{f\circ\varphi, g}(i,j)$, 则有

$$\begin{aligned}
&\rho_{\text{KLD}}(f_k\circ\varphi_k, g_k) - \rho_{\text{KLD}}(f\circ\varphi, g)\\
&= \int_{-M_k}^{M_k}\int_{-M_k}^{M_k} p_k(i,j)\log\frac{p_k(i,j)}{p(i,j)}didj - \int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M} p_0(i,j)\log\frac{p_0(i,j)}{p(i,j)}didj\\
&= \int_{-m_k}^{m_k}\int_{-m_k}^{m_k}\left(p_k(i,j)\log\frac{p_k(i,j)}{p(i,j)} - p_0(i,j)\log\frac{p_0(i,j)}{p(i,j)}\right)didj\\
&\quad + \begin{cases} \displaystyle\int_{-M_k}^{M_k}\left[\left(\int_{-M_k}^{-M} + \int_{M}^{M_k}\right) + \left(\int_{-M_k}^{-M} + \int_{M}^{M_k}\right)\right]\int_{-M}^{M} p_k(i,j)\log\frac{p_k(i,j)}{p(i,j)}didj, & M_k \geq M,\\ \displaystyle -\int_{-M}^{M}\left[\left(\int_{-M}^{-M_k} + \int_{M_k}^{M}\right) + \left(\int_{-M}^{-M_k} + \int_{M_k}^{M}\right)\right]\int_{-M_k}^{M_k} p_0(i,j)\log\frac{p_0(i,j)}{p(i,j)}didj, & M_k \leq M. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

我们先证明

$$\int_{-m_k}^{m_k}\int_{-m_k}^{m_k} p_k(i,j)\log\frac{p_k(i,j)}{p(i,j)} - p_0(i,j)\log\frac{p_0(i,j)}{p(i,j)}didj \to 0 \quad (k\to+\infty).$$

因为 $\|f_k\|_\infty \to \|f\|_\infty$ 且 $\|g_k\|_\infty \to \|g\|_\infty$, 则 $m_k \to M\,(k\to+\infty)$, 即对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $N_1 > 0$, 使得 $M-\varepsilon < m_k < M+\varepsilon$, $\forall\, k > N_1$. 进一步可以证明, 在 $\mathbb{R}^2$ 中的任意有界闭区间上都有 $\tilde{p}_{f_k\circ\varphi_k, g_k}(i,j) \rightrightarrows \tilde{p}_{f\circ\varphi, g}(i,j)$ $(k\to+\infty)$, 再结合 $\log(i,j)$ 在有界闭区间上的一致连续性知, 对任意的 $(i,j) \in [-(M-\varepsilon), M-\varepsilon]^2$,

$$p_k(i,j)\log p_k(i,j) \rightrightarrows p_0(i,j)\log p_0(i,j) \quad (k\to+\infty),$$

即对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_2 > 0$, 对任意的 $k > N_2$ 和 $(i,j) \in [-(M-\varepsilon), M-\varepsilon]^2$, 有

$$|p_k(i,j)\log p_k(i,j) - p_0(i,j)\log p_0(i,j)| < \frac{\varepsilon}{4M^2},$$

从而

$$\int_{-(M-\varepsilon)}^{M-\varepsilon}\int_{-(M-\varepsilon)}^{M-\varepsilon} |p_k(i,j)\log p_k(i,j) - p_0(i,j)\log p_0(i,j)|\,didj < \varepsilon. \tag{4.3}$$

令 $\tilde{M}$ 为 $\{f_k\circ\varphi_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 的一致的界, 则对任意的 $(i,j) \in [-m_k, m_k]^2$ 和 $k \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{4\tilde{M}^2}{\sigma^2}\right\} \leq \tilde{p}_{f_k\circ\varphi_k, g_k}(i,j) \leq \frac{1}{2\pi\sigma^2},$$

且

$$p_k(i,j) \leq \frac{1}{4\tilde{M}^2}\exp\left\{\frac{4\tilde{M}^2}{\sigma^2}\right\}. \tag{4.4}$$

又因为

$$|p_k(i,j)\log p_k(i,j)| = \begin{cases} p_k(i,j)\log \dfrac{1}{p_k(i,j)}, & p_k(i,j) < 1, \\ p_k(i,j)\log p_k(i,j), & p_k(i,j) \geq 1. \end{cases}$$

当 $p_k(i,j) < 1$ 时, 由 $x\log\frac{1}{x}(x>0)$ 的最大值是 $\frac{1}{\mathrm{e}}$ 知

$$p_k(i,j)\log\frac{1}{p_k(i,j)} \leq \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

当 $p_k(i,j) \geq 1$ 时, 由 (4.4) 知

$$p_k(i,j)\log p_k(i,j) \leq \frac{\mathrm{e}^{\frac{4\tilde{M}^2}{\sigma^2}}}{4\tilde{M}^2}\log\frac{\mathrm{e}^{\frac{4\tilde{M}^2}{\sigma^2}}}{4\tilde{M}^2}.$$

从而

$$|p_k(i,j)\log p_k(i,j)| \leq B \doteq \max\left\{\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{\mathrm{e}^{\frac{4\tilde{M}^2}{\sigma^2}}}{4\tilde{M}^2}\log\frac{\mathrm{e}^{\frac{4\tilde{M}^2}{\sigma^2}}}{4\tilde{M}^2}\right\}.$$

同理可知

$$|p_0(i,j)\log p_0(i,j)| \leq B.$$

所以

$$\begin{aligned} &\int_{-m_k}^{m_k}\int_{-m_k}^{m_k}|p_k(i,j)\log p_k(i,j) - p_0(i,j)\log p_0(i,j)|didj \\ &\quad - \int_{-(M-\varepsilon)}^{M-\varepsilon}\int_{-(M-\varepsilon)}^{M-\varepsilon}|p_k(i,j)\log p_k(i,j) - p_0(i,j)\log p_0(i,j)|didj \\ &\leq 2B\times[(2m_k)^2 - (2(M-\varepsilon))^2] \leq 32BM\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.5}$$

由 (4.3) 和 (4.5) 知

$$\int_{-m_k}^{m_k}\int_{-m_k}^{m_k}(p_k(i,j)\log p_k(i,j) - p_0(i,j)\log p_0(i,j))didj \to 0 \quad (k\to+\infty).$$

类似地, 可以证明

$$\int_{-m_k}^{m_k}\int_{-m_k}^{m_k}(p_k(i,j)\log p(i,j) - p_0(i,j)\log p(i,j))didj \to 0 \quad (k\to+\infty),$$

从而

$$\int_{-m_k}^{m_k}\int_{-m_k}^{m_k}\left(p_k(i,j)\log\frac{p_k(i,j)}{p(i,j)} - p_0(i,j)\log\frac{p_0(i,j)}{p(i,j)}\right)didj \to 0 \quad (k\to+\infty),$$

即当 $k\to+\infty$ 时, (4.2) 中的第一项收敛到 0.

接下来只要证明, 若 $M_k \geq M$, 则

$$\int_{-M_k}^{M_k}\int_{M}^{M_k}\left(p_k(i,j)\log\frac{p_k(i,j)}{p(i,j)}\right)didj \to 0 \quad (k\to+\infty)$$

即可, 因为按同样的方法可以证明 (4.2) 中的剩余项也是收敛到 0 的.

由

$$\int_{-M_k}^{M_k}\int_{M}^{M_k}|p_k(i,j)\log p_k(i,j)|\,didj \leq 2BM_k(M_k - M)$$

和 $M_k \to M\,(k \to +\infty)$ 知

$$\int_{-M_k}^{M_k}\int_{M}^{M_k} p_k(i,j)\log p_k(i,j)didj \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

此外, 因为 $\log p(i,j)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的任意有界闭区间上都可积, 由积分的绝对连续性知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $F \subset E$ 且 $|F| < \delta$, 有 $\int_F |\log p(i,j)|\,didj < \varepsilon$. 进一步, 又因为 $2M_k(M_k - M) \to 0\,(k \to +\infty)$, 所以, 对上述的 $\delta > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $k > N$ 时, 有 $2M_k(M_k - M) < \delta$, 从而

$$\int_{-M_k}^{M_k}\int_{M}^{M_k} |\log p(i,j)|\,didj < \varepsilon.$$

由 $p_{f_k\circ\varphi_k,g_k}(i,j)$ 的有界性和上式知

$$\int_{-M_k}^{M_k}\int_{M}^{M_k} |p_k(i,j)\log p(i,j)|\,didj \leq \frac{\mathrm{e}^{\frac{4\tilde{M}^2}{\sigma^2}}}{4\tilde{M}^2}\varepsilon,$$

即

$$\int_{-M_k}^{M_k}\int_{M}^{M_k} p_k(i,j)\log p(i,j)didj \to 0 \quad (k \to +\infty),$$

从而

$$\int_{-M_k}^{M_k}\int_{M}^{M_k} p_k(i,j)\log \frac{p_k(i,j)}{p(i,j)}didj \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

综上可得

$$\rho_{\mathrm{KLD}}(f_k \circ \varphi_k, g_k) \to \rho_{\mathrm{KLD}}(f \circ \varphi, g) \quad (k \to +\infty).$$

证毕.

致谢 感谢匿名审稿人提出的宝贵建议.

参 考 文 献

[1] Arnold V. I., Ordinary Differerntial Equations, MIT Press, Cambridge, 1973.

[2] Avants B. B., Epstein C. L., Grossman M., et al., Symmetric diffeomorphic image registration with cross-correlation: evaluating automated labeling of elderly and neurodegenerative brain, *Med. Image Anal.*, 2008, **12**: 26–41.

[3] Avants B. B., Tustison N. J., Song G., et al., Ants: Advanced Open-source Normalization Tools for Neuroanatomy, Penn Image Computing and Science Laboratory, Philadelphia, 2009.

[4] Avants B. B., Tustison N. J., Song G., et al., A reproducible evaluation of ANTs similarity metric performance in brain image registration, *NeuroImage*, 2011, **54**: 2033–2044.

[5] Beg M. F., Miller M. I., Trouvé A., et al., Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms, *Int. J. Comput. Vision*, 2005, **61**: 139–157.

[6] Brown L. G., A survey of image registration techniques, *ACM Comput. Surv.*, 1992, **24**: 325–376.

[7] Burger M., Osher S., Convergence rates of convex variational regularization, *Inverse Probl.*, 2004, **20**: 1411–1421.

[8] Christensen G. E., Johnson H. J., Consistent image registration, *IEEE T. Med. Imaging*, 2001, **20**: 568–582.

[9] Chung A. C., Wells W. M., Norbash A., et al., Multi-modal image registration by minimising Kullback–Leibler distance, The 5th Int. Conf. on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (Lecture Notes in Computer Science), Vol. 2489, Springer-Verlag, Berlin, 2002: 523–532.

[10] Cover T. M., Thomas J. A., Elements of Information Theory, John Wiley & Sons, New York, 2012.

[11] Crum W. R., Griffin L. D., Hill D. L., et al., Zen and the art of medical image registration: correspondence, homology, and quality, *NeuroImage*, 2003, **20**: 1425–1437.

[12] Droske M., Rumpf M., A variational approach to nonrigid morphological image registration, *SIAM J. Appl. Math.*, 2004, **64**: 668–687.

[13] Du J., Younes L., Qiu A., Whole brain diffeomorphic metric mapping via integration of sulcal and gyral curves, cortical surfaces, and images, *NeuroImage*, 2011, **56**: 162–173.

[14] Dupuis P., Grenander U., Miller M. I., Variational problems on flows of diffeomorphisms for image matching, *Q. Appl. Math.*, 1998, **56**: 587–600.

[15] Engl H. W., Kunisch K., Neubauer A., Convergence rates for Tikhonov regularisation of non-linear ill-posed problems, *Inverse Probl.*, 1989, **5**: 523–540.

[16] Evants L. C., Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, 2010.

[17] Fiez J. A., Damasio H., Grabowski T. J., Lesion segmentation and manual warping to a reference brain: intra-and interobserver reliability, *Hum. Brain Mapp.*, 2000, **9**: 192–211.

[18] Flemming J., Theory and examples of variational regularization with non-metric fitting functionals, *J. Inverse Ill-Pose Probl.*, 2010, **18**: 677–699.

[19] Flemming J., Generalized Tikhonov Regularization: Basic Theory and Comprehensive Results on Convergence Rates, Ph.D. thesis, Chemnitz University of Technology Chemnitz, 2011.

[20] Hill D. L., Batchelor P. G., Holden M., et al., Medical image registration, *Phys. Med. Biol.*, 2001, **46**: R1–R45.

[21] Hofmann B., Kaltenbacher B., Poeschl C., et al., A convergence rates result for Tikhonov regularization in Banach spaces with non-smooth operators, *Inverse Probl.*, 2007, **23**: 987–1010.

[22] Jensen J. R., Introductory Digital Image Processing: A Remote Sensing Perspective, University of South Carolina, Columbia, 1986.

[23] Kasturi R., Jain R. C., Computer Vision: Principles, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, 1991.

[24] Kim M., Wu G., Yap P. T., et al., A general fast registration framework by learning deformation–appearance correlation, *IEEE T. Image P.*, 2012, **21**: 1823–1833.

[25] Klein A., Anderson J., Ardekani B. A., et al., Evaluation of 14 nonlinear deformation algorithms applied to human brain MRI registration, *NeuroImage*, 2009, **46**: 786–802.

[26] Klein S., Staring M., Pluim J. P., Evaluation of optimization methods for nonrigid medical image registration using mutual information and B-splines, *IEEE T. Image P.*, 2007, **16**: 2879–2890.

[27] Maintz J. B., Viergever M. A., A survey of medical image registration, *Med. Image Anal.*, 1998, **2**: 1–36.

[28] Modersitzki J., Numerical Methods for Image Registration, Oxford University Press, New York, 2003.

[29] Reducindo I., Arce-Santana E. R., Campos-Delgado D. U., et al., Non-rigid multimodal medical image registration based on the conditional statistics of the joint intensity distribution, *Procedia Tech.*, 2013, **7**: 126–133.

[30] Rohlfing T., Maurer C. R., Bluemke D. A., et al., Volume-preserving nonrigid registration of MR breast images using free-form deformation with an incompressibility constraint, *IEEE T. Med. Imaging*, 2003, **22**: 730–741.

[31] Sotiras A., Davatzikos C., Paragios N., Deformable medical image registration: a survey, *IEEE T. Med. Imaging*, 2013, **32**: 1153–1190.

[32] Studholme C., Cardenas V., Blumenfeld R., et al., Deformation tensor morphometry of semantic dementia with quantitative validation, *NeuroImage*, 2004, **21**: 1387–1398.

[33] Stytz M. R., Frieder G., Three-dimensional medical imaging: algorithms and computer systems, *ACM Comput. Surv.* (*CSUR*), 1991, **23**: 421–499.

[34] Vogel C. R., Computational Methods for Inverse Problems, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2002.

[35] Wang H., Suh J. W., Das S. R., et al., Multi-atlas segmentation with joint label fusion, *IEEE T. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 2013, **35**: 611–623.

[36] Yosida K., Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[37] Yushkevich P. A., Avants B. B., Pluta J., et al., A high-resolution computational atlas of the human hippocampus from postmortem magnetic resonance imaging at 9.4 T, *NeuroImage*, 2009, **44**: 385–398.