

文章编号: 0583-1431(2021)02-0311-06

文献标识码: A

强 Prüfer 环的同调刻画

王芳贵 乔 磊

四川师范大学数学科学学院 成都 610068
E-mail: wangfg2004@163.com; lqiao@sicnu.edu.cn

周德川

西南科技大学理学院 绵阳 621010
E-mail: dechuan11119@sina.com

摘 要 设 R 是环, R 的小 finitistic 维数定义为 $\text{fPD}(R) = \sup\{\text{pd}_R M \mid M \in \text{FPR}\}$. 本文证明了: 若 R 是连通的强 Prüfer 环, 则 $\text{fPD}(R) \leq 1$. 也证明了若 R 是强 Prüfer 环, $M \in \text{FPR}$, 且 M 是 \mathcal{Q} -挠模, 则 $\text{pd}_R M \leq 1$.

关键词 有限投射分解; 小 finitistic 维数; \mathcal{Q} -挠模; 强 Prüfer 环; 连通环

MR(2010) 主题分类 13F05, 13D05

中图分类 O154

A Homological Characterization of Strong Prüfer Rings

Fang Gui WANG Lei QIAO

*School of Mathematical Sciences, Sichuan Normal University,
Chengdu 610068, P. R. China
E-mail: wangfg2004@163.com; lqiao@sicnu.edu.cn*

De Chuan ZHOU

*College of Science, Southwest University of Science and Technology,
Mianyang 621010, P. R. China
E-mail: dechuan11119@sina.com*

Abstract Let R be a commutative ring. Then the small finitistic projective dimension of R is defined as $\text{fPD}(R) = \sup\{\text{pd}_R M \mid M \in \text{FPR}\}$. In this paper, it is shown that if R is a connected strong Prüfer ring, then $\text{fPD}(R) \leq 1$. It is also shown that if R is a strong Prüfer ring, and if M is a \mathcal{Q} -torsion module with $M \in \text{FPR}$, then $\text{pd}_R M \leq 1$.

Keywords finite projective resolution; small finitistic projective dimension; \mathcal{Q} -torison module; strong Prüfer ring; connected ring

MR(2010) Subject Classification 13F05, 13D05

Chinese Library Classification O154

收稿日期: 2020-03-07; 接受日期: 2020-07-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11671283, 11701398)

1 引言

本文恒设 R 是交换环, 用 $\text{Max}(R)$ 表示 R 的极大理想的集合, $T(R)$ 表示 R 的完全商环. 设 M 是 R -模, 用 $\text{pd}_R M$ 表示 M 的投射维数.

设 M 是 R -模, 若有正合列

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad (1.1)$$

其中 P_i 都是有限生成投射 R -模, 则称 M 有有限投射分解, 记为 $M \in \text{FPR}(R)$ (finite projective resolution). 当我们的问题讨论只涉及一个环时, 也简记为 $M \in \text{FPR}$. 显然, $M \in \text{FPR}$ 当且仅当 M 是超有限表现模, 且 $\text{pd}_R M < \infty$.

Dedekind 整环是每个非零理想可逆的整环. 众所周知, Dedekind 整环也是整体维数不超过 1 的整环. 对比于 Dedekind 整环, 1932 年 Prüfer 在文献 [14] 引入了每个有限生成非零理想都可逆的整环, 后人称之为 Prüfer 整环. 对应地, Prüfer 整环是弱整体维数不超过 1 的整环. Dedekind 整环和 Prüfer 整环有细致的环结构刻画. 由于 Dedekind 整环和 Prüfer 整环的重要应用意义, 学者们尝试把这些概念推广到一般交换环上.

回顾 R 的理想 I 称为正则理想, 是指 I 中至少有一个正则元素 (即非零因子). 对 R 的理想 I , 定义

$$I^{-1} = \{z \in T(R) \mid zI \subseteq R\}.$$

文 [4, 8] 提出了 Prüfer 环的概念. R 称为 Prüfer 环, 是指 R 的每个有限生成正则理想 I 是可逆理想, 即 $II^{-1} = R$. 在文献 [8] 中, Griffin 利用乘法理想理论的研究方法, 给出了 Prüfer 环多条的等价刻画.

Prüfer 环刻画系统总结见文 [3]. 这些刻画主要集中于理想的刻画, 但对 Prüfer 环的同调刻画, 学者们颇为踌躇. 因而 Cahen 等人在文 [5] 中, 提出了一个公开问题 (Problem 1a): 若 R 是 Prüfer 环, 则是否有 $\text{fPD}(R) \leq 1$, 其中 fPD 是环的小 finitistic (投射) 维数.

环的小 finitistic 维数是 Bass 首先提出的 [2], 原始定义是:

$$\text{fPD}(R) = \sup\{\text{pd}_R M \mid M \text{ 是有限生成模, 且 } \text{pd}_R M < \infty\}.$$

这样定义的环的小 finitistic 维数在讨论 Noether 环时有很好的作用, 但在一般应用上非常困难, 这是因为尽管 M 是有限生成的, 但 M 的各次合冲未必是有限生成的. 因而 Glaz 在文献 [6] 把环的小 finitistic 维数的定义改写为:

$$\text{fPD}(R) = \sup\{\text{pd}_R M \mid M \in \text{FPR}\}. \quad (1.2)$$

现在通用的, 以及本文所说的 fPD , 都是 (1.2) 式意义下的小 finitistic 维数.

当 $T(R) = R$ 时, R 肯定是 Prüfer 环. 由此可见 Prüfer 环的定义给我们的信息太少. 为了更好的认识 Prüfer 环, 文 [1] 引入了强 Prüfer 环的概念. 环 R 称为强 Prüfer 环, 是指 R 的有限生成半正则理想是局部主理想, 等价地, 是 Q_0 -可逆理想 [12]. 回顾 R 的有限生成理想 I 称为半正则理想, 是指 $\text{ann}(I) = 0$. 设 \mathcal{Q} 表示 R 的有限生成半正则理想的集合. 显然 \mathcal{Q} 是 R 的理想的乘法系, 即若 $I, J \in \mathcal{Q}$, 必有 $IJ \in \mathcal{Q}$. 设 x 表示 R 上的未定元. 容易看到, 设 $b_0, b_1, \dots, b_n \in R$, 则理想 $I := (b_0, b_1, \dots, b_n)$ 是半正则理想当且仅当多项式 $f(x) := b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ 是 $R[x]$ 的非零因子 (见文 [15, 习题 6.5]). 在文献 [12] 中, Lucas 利用 \mathcal{Q} 描述了 R 的有限分式扩环

$$Q_0(R) := \{\alpha \in T(R[x]) \mid \text{存在 } I \in \mathcal{Q}, \text{ 使得 } I\alpha \subseteq R\}. \quad (1.3)$$

对 $\alpha \in Q_0(R)$, α 也可以明确表示为

$$\alpha = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i},$$

其中 $a_i, b_i \in R$, $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{Q}$, 且对任何下标 i, j , 有 $a_i b_j = a_j b_i$. 显然有 $R \subseteq T(R) \subseteq Q_0(R)$, 且当 R 是整环时, $Q_0(R) = T(R)$ 就是 R 的商域. 对 R 的理想 I , 定义 $I^{-1_q} = \{z \in Q_0(R) \mid zI \subseteq R\}$. I 称为 Q_0 -可逆理想, 是指 $II^{-1_q} = R$.

本文借助 Fitting 理想的半正则性, 证明若 R 是连通的强 Prüfer 环, 则一定有 $\text{fPD}(R) \leq 1$.

设 M 是有限表现模, 则有正合列

$$R^m \xrightarrow{\alpha} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0. \quad (1.4)$$

对有限生成自由模 R^n , 我们把其中的元素用 n 维行向量来表示. 于是 α 可以记成 $m \times n$ 矩阵 $\alpha = (a_{ij})$. 此时 $P := \text{Im}(\alpha)$ 就是向量 $z_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$, 生成的子模. 记 $s = \min\{m, n\}$. 对 $k < s$, 令 $F_k(M)$ 表示 $\alpha = (a_{ij})$ 的 $s - k$ 阶子式生成的理想. 对 $k \geq s$, 定义 $F_k(M) = R$. $F_k(M)$ 称为 M 的第 k 级 Fitting 不变理想. 下面我们需要特别关注 0 级 Fitting 不变理想 $F_0(M)$.

设

$$0 \longrightarrow R^m \xrightarrow{\alpha} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (1.5)$$

是正合列, 由 Morris 定理 (见文 [15, 定理 4.3.18]), 有 $m \leq n$, 故此时有 $s = m$, 从而 $F_0(M)$ 就是 α 的 m 级子式生成的理想.

2 主要结果及其证明

命题 2.1 (1) 设 I 是 R 的有限生成理想, 则 I 是半正则的当且仅当对任何 $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$, $I_{\mathfrak{m}}$ 是 $R_{\mathfrak{m}}$ 的半正则理想.

(2) 若对任何 $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$, 有 $\text{fPD}(R_{\mathfrak{m}}) \leq 1$, 则 $\text{fPD}(R) \leq 1$.

证明 (1) 设 I 是半正则的. 设 $a \in R$, 使得在 $R_{\mathfrak{m}}$ 中, 有 $\frac{a}{1}I_{\mathfrak{m}} = 0$, 则存在 $s \in R - \mathfrak{m}$, 使得 $saI = 0$. 故 $sa = 0$. 因此有 $\frac{a}{1} = 0$, 即 $I_{\mathfrak{m}}$ 是半正则的.

反之, 设 $aI = 0$, 则对任何 $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$, $\frac{a}{1}I_{\mathfrak{m}} = 0$. 由于 $I_{\mathfrak{m}}$ 是 $R_{\mathfrak{m}}$ 的半正则理想, 故 $\frac{a}{1} = 0$. 于是有 $a = 0$, 即 I 是半正则的.

(2) 设 $M \in \text{FPR}$, $0 \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ 是正合列, 其中 F 是有限生成自由模. 于是 P 是有限表现模. 对任何 $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$, $0 \rightarrow P_{\mathfrak{m}} \rightarrow F_{\mathfrak{m}} \rightarrow M_{\mathfrak{m}} \rightarrow 0$ 是正合列. 由于 $\text{fPD}(R_{\mathfrak{m}}) \leq 1$, 故 $P_{\mathfrak{m}}$ 是自由 $R_{\mathfrak{m}}$ -模, 从而有 P 是投射 R -模. 故 $\text{pd}_R M \leq 1$, 从而有 $\text{fPD}(R) \leq 1$. 证毕.

使用命题 2.1, 可以通过局部化方法来简化我们需要讨论的问题. 回顾环 R 称为连通环, 是指 R 除 0 和 1 外, 无其它的幂等元. 也回顾模 M 称为有常秩的, 是指存在自然数 n , 使得对任何 $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$, $M_{\mathfrak{m}} \cong R_{\mathfrak{m}}^n$. 有常秩的模显然是平坦模. 在文 [6] 指出, 若 R 是连通环, 则任何有限生成投射模都是有常秩的.

引理 2.2 设 R 是连通环, $M \in \text{FPR}$, 且 $\text{pd}_R M = 1$, 则 $I := F_0(M)$ 是半正则理想.

证明 设 $0 \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ 是正合列, 其中 F 是有限生成自由模, 且 $\text{rank}(F) = n$. 由于 $\text{pd}_R M = 1$, 故 P 是有限生成投射模. 由于 R 是连通环, 则 P 有常秩, 设为 m . 显然 $m \neq 0$.

设 $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$, 则 $P_{\mathfrak{m}} \cong R_{\mathfrak{m}}^m$. 由 MyCoy 定理 (见文 [15, 定理 9.2.10]), $\text{ann}(I_{\mathfrak{m}}) = \text{ann}(I)_{\mathfrak{m}} = 0$, 即 $I_{\mathfrak{m}}$ 是半正则的. 由命题 2.1, I 是半正则的. 证毕.

引理 2.3 设 (R, \mathfrak{m}) 是局部环, $0 \rightarrow R^m \xrightarrow{\alpha} R^n \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ 是正合列, 其中 $m > 0$, g 是 M 的投射盖. 若 $I := F_0(M)$ 是自由理想, 则 M 不能嵌入一个自由模.

证明 记 $\alpha := (a_{ij})$. 反设 M 可以嵌入一个自由模, 则 M 是无挠 R -模. 由于 g 是 M 的投射盖, 则 $\text{Ker}(g) = \text{Im}(\alpha) \subseteq \mathfrak{m}R^n$. 于是对任何下标 (i, j) , 有 $a_{ij} \in \mathfrak{m}$. 由于 R 是局部环, 故任何列向量

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \text{ 均不是幺模列.}$$

由于 $I = (d)$ 是自由理想, 故 d 是正则元. 由于 R 是局部环, 不妨设 α 的左上角的 m 级子矩阵 (a_{ij}) 的行列式 d . 设第 m 列的元素 a_{im} 的代数余子式为 b_i , 则 $y = (b_1, \dots, b_m) \in R^m$. 当 $1 \leq k < m$ 时, 由行列式的性质知 $b_1 a_{1k} + \dots + b_m a_{mk} = 0$, 且 $b_1 a_{1m} + \dots + b_m a_{mm} = d$. 当 $k = m+1, \dots, n$ 时, 由于

$$b_1 a_{1k} + \dots + b_m a_{mk} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m-1} & a_{1k} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm-1} & a_{mk} \end{pmatrix} \in (d). \quad (2.1)$$

故

$$\alpha(y) = (b_1, \dots, b_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in dR^n. \quad (2.2)$$

由于 M 是无挠模, 故诱导的序列 $0 \rightarrow R^m/dR^m \xrightarrow{\bar{\alpha}} R^n/dR^n \rightarrow M/dM \rightarrow 0$ 是正合列. 由于 $\bar{\alpha}(\bar{y}) = \overline{\alpha(y)} = 0$, 故 $\bar{y} = 0$, 即 $y \in dR^m$. 于是可设 $b_i = dc_i$, $c_i \in R$, $i = 1, \dots, m$. 故

$$b_1 a_{1m} + \dots + b_m a_{mm} = d(c_1 a_{1m} + \dots + c_m a_{mm}) = d. \quad (2.3)$$

由于 d 是正则元, 故 $c_1 a_{1m} + \dots + c_m a_{mm} = 1$. 于是

$$\begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} \text{ 是幺模列,}$$

矛盾. 因此 M 不是自由模的子模. 证毕.

定理 2.4 设 R 是连通的强 Prüfer 环, 则 $\text{fPD}(R) \leq 1$.

证明 设 $M \in \text{FPR}$, 则 $\text{pd}_R M < \infty$. 欲证 $\text{pd}_R M \leq 1$, 我们只需证明 $\text{pd}_R M \leq 2$, 就有 $\text{pd}_R M \leq 1$.

设 $0 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ 是正合列, 其中 F 是有限生成自由模. 由于 $\text{pd}_R M \leq 2$, 故 $\text{pd}_R N \leq 1$. 我们要证明 $\text{pd}_R N = 0$, 即对任何 $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$, $N_{\mathfrak{m}}$ 是自由 $R_{\mathfrak{m}}$ -模.

若有 $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$, 使得 $\text{pd}_{R_{\mathfrak{m}}} N_{\mathfrak{m}} = 1$. 由引理 2.2, $I := F_0(N)$ 是半正则理想. 由于 R 是强 Prüfer 环, I 是局部自由理想, 即 $I_{\mathfrak{m}} = aR_{\mathfrak{m}}$ 是 $R_{\mathfrak{m}}$ 的自由理想, $a \in I_{\mathfrak{m}}$. 注意 $N_{\mathfrak{m}}$ 是自由 $R_{\mathfrak{m}}$ -

模 F_m 的子模, 这与引理 2.3 矛盾. N_m 是自由 R_m -模. 从而有 $\text{pd}_R N = 0$, 亦即 $\text{pd}_R M \leq 1$. 故 $\text{fPD}(R) \leq 1$. 证毕.

引理 2.5 若 R 有无限多个幂等元, 则 R 有可数多个两两正交的幂等元 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, 使得对任何 n , $I_n := \bigoplus_{i=1}^n Re_i \neq R$.

证明 任取一个幂等元 $e_1 \neq 0, 1$, 则 $Re_1 \neq R$, 且必有非平凡幂等元 $\varepsilon \neq e_1, 1 - e_1$. 若 $\varepsilon(1 - e_1) = 0$, 则令 $e_2 = (1 - \varepsilon)(1 - e_1)$. 若 $\varepsilon(1 - e_1) \neq 0$, 则令 $e_2 = \varepsilon(1 - e_1)$, 故 e_1, e_2 是正交的非平凡的幂等元, 且 $Re_1 \oplus Re_2 = R(e_1 + e_2) \neq R$. 归纳设 e_1, \dots, e_{n-1} 是两两正交的幂等元集, 且 $R(e_1 + \dots + e_{n-1}) \neq R$. 由上面的做法, 存在非平凡的幂等元 e_n , 使得

$$e_n(e_1 + \dots + e_{n-1}) = 0, \quad (2.4)$$

且

$$Re_1 \oplus \dots \oplus Re_{n-1} \oplus Re_n \neq R. \quad (2.5)$$

由 $e_n(e_1 + \dots + e_{n-1})e_i = e_ne_i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, 故 e_1, \dots, e_{n-1}, e_n 是两两正交的. 由归纳法原理知引理为真. 证毕.

若 R 只有有限个幂等元, 则由引理 2.5 能够看到, R 可以表示为环的直积 $R = R_1 \times \dots \times R_k$, 其中每个 R_i 是连通环. 此时 R 的理想 I 也可以表示为 $I = I_1 \times \dots \times I_k$, 其中 I_i 是环 R_i 的理想. 容易看到, $Q_0(R) = Q_0(R_1) \times \dots \times Q_0(R_k)$, 且 I 是有限生成半正则理想 (或 $Q_0(R)$ -可逆的) 当且仅当每个 I_i 是 R_i 的有限生成半正则理想 (或 $Q_0(R_i)$ -可逆的).

推论 2.6 设 R 是强 Prüfer 环, 且只有有限个幂等元, 则 $\text{fPD}(R) \leq 1$.

对给定的环 R , 何时 R 只有有限个幂等元, 我们有下面的命题:

命题 2.7 若每个有限生成平坦 R -模是投射模, 则 R 只有有限个幂等元.

证明 设有限生成平坦模是投射模. 若 R 有无限多个幂等元, 由引理 2.5, 则可选取可数无限多个两两正交的幂等元 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, 使得

$$I_n = \bigoplus_{i=1}^n Re_i = R(e_1 + \dots + e_n) \neq R,$$

则 I_n 是 R 的直和加项, 故 R/I_n 是投射模. 令 $I = \bigoplus_{n=1}^\infty I_n = \varinjlim I_n$, 则显然有 I 不是有限生成的. 由于 $R/I = \varinjlim R/I_n$ 是循环平坦 R -模, 由假设条件, R/I 是投射模, 故是有限表现模. 因此, I 是有限生成的, 矛盾. 故 R 只有有限多个幂等元. 证毕.

回顾 R -模 M 称为 \mathcal{Q} -挠模, 是指对任何 $x \in M$, 存在 $I \in \mathcal{Q}$, 使得 $Ix = 0$. 设 R 是半遗传环 (弱整体维数不超过 1 的凝聚环), 则有限生成自由模的有限生成子模 P 是投射模, 且有 $P \cong I_1 \oplus \dots \oplus I_n$, 其中 I_1, \dots, I_n 是 R 的有限生成 (投射) 理想. 对强 Prüfer 环, 我们也有下面的弱刻画.

定理 2.8 设 R 是强 Prüfer 环, P 是自由模有限生成 F 的子模, 且 $P \in \text{FPR}$. 若 $M := F/P$ 是 \mathcal{Q} -挠模, 则

$$P \cong I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n, \quad (2.6)$$

其中 I_1, I_2, \dots, I_n 是有限生成半正则理想. 从而有 P 是投射模.

证明 记 $\text{rank}(F) = n$. 若 $n = 1$, 则 P 是 R -的理想. 由于 M 是有限表现的 \mathcal{Q} -挠模, 故 P 是有限生成半正则理想. 由于 R 是强 Prüfer 环, 故 P 是投射模.

设 $n > 1$. 由于 M 是有限生成 \mathcal{Q} -挠模, 故存在 $I \in \mathcal{Q}$, 使得 $IM = 0$, 因此有 $IF \subseteq P$. 记 $F = R^n$, 设 $p: R^n \rightarrow R$ 是第 n -个分量的射影, 则有下面的行列都是正合列的 3×3 交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P & \xrightarrow{p} & I_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R^{n-1} & \longrightarrow & R^n & \xrightarrow{p} & R \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & R/I \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0,
 \end{array}$$

其中 $I_n = p(P)$. 由于 $IR^n \subseteq P$, 故 $I \subseteq I_n$. 因此, $I_n \in \mathcal{Q}$. 由于 R 是强 Prüfer 环, 故 I_n 是投射模, 因此有 $P \cong A \oplus I_n$, 从而有 $A \in \text{FPR}$. 注意 M_1 是 \mathcal{Q} -挠模, 故由归纳假设有 $A \cong I_1 \oplus \cdots \oplus I_{n-1}$. 从而有

$$P \cong I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_{n-1} \oplus I_n.$$

证毕.

推论 2.9 设 R 是强 Prüfer 环, $M \in \text{FPR}$. 若 M 是 \mathcal{Q} -挠模, 则 $\text{pd}_R M \leq 1$.

参 考 文 献

- [1] Anderson D. D., Anderson D. F., Markanda R., The rings $R(x)$ and $R\langle x \rangle$, *J. Algebra*, 1985, **95**(1): 96–115.
- [2] Bass H., Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1960, **95**: 466–488.
- [3] Bazzoni S., Glaz S., Prüfer rings, In: *Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra*, Springer, New York, 2006: 55–72.
- [4] Butts H. S., Smith W., Prüfer rings, *Math. Z.*, 1967, **95**: 196–211.
- [5] Cahen P. J., Fontana M., Frisch S., Glaz S., Open problems in commutative ring theory, In: *Commutative Algebra*, Springer, New York, 2014: 353–375.
- [6] Glaz S., *Commutative Coherent Rings*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [7] Glaz S., Schwarz R., Prüfer conditions in commutative rings, *Arab. J. Sci. Eng.*, 2011, **36**(6): 967–983.
- [8] Griffin M., Prüfer rings with zero-divisors, *J. Reine Angew. Math.*, 1969, **239/240**: 55–67.
- [9] Huckaba J., *Commutative Rings with Zero Divisors*, Marcel Dekker Inc., New York, 1988.
- [10] Klingler L., Lucas T. G., Sharma T., Local types of Prüfer rings, *J. Algebra Appl.*, 2019, **18**(3): 1950042, 23 pp.
- [11] Li W. X., Chen J. L., Kourki F., On strongly C2 modules and D2 modules, *J. Algebra Appl.*, 2013, **12**(7): 1350029, 14 pp.
- [12] Lucas T. G., Strong Prüfer rings and the ring of finite fractions, *J. Pure Appl. Algebra*, 1993, **84**(1): 59–71.
- [13] Lucas T. G., The integral closure of $R(x)$ and $R\langle x \rangle$, *Comm. Algebra*, 1997, **25**(3): 847–872.
- [14] Prüfer H., Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern (in German), *J. Reine Angew. Math.*, 1932, **168**: 1–36.
- [15] Wang F. G., Kim H., *Foundations of Commutative Rings and Their Modules*, Springer, Singapore, 2016.
- [16] Wang F. G., Qiao L., Kim H., Super finitely presented modules and Gorenstein projective modules, *Comm. Algebra*, 2016, **44**(9): 4056–4072.
- [17] Wang F. G., Kim H., Xiong T., Finitistic weak dimensions of pullbacks, *J. Pure Appl. Algebra*, 2020, **224**(6): 106274, 12 pp.
- [18] Wang F. G., Zhou D. C., Kim H., Chen D., Module-theoretic characterizations of the ring of finite fractions of a commutative ring, *J. Commut. Algebra*, 2020, <https://projecteuclid.org/euclid.jca/1589335712>.