第64卷第2期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.64, No.2
2021年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Mar., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)02-0301-10 **文献标识码:** **A**

Banach 空间上 p-fusion 框架的若干等价描述

林丽琼

福州大学数学与计算机科学学院 福州 350108
E-mail: llq141141@163.com

张云南

福建师范大学数学与信息学院 福州 350108
E-mail: zyn126126@163.com

摘　要　本文说明 Banach 空间上 p-fusion 框架和 p- 框架有紧密联系. 应用分析算子和合成算子给出 p-fusion Bessel 序列、p-fusion 框架和 q-fusion Riesz 基的等价描述.

关键词　Banach 空间; p-fusion 框架; q-fusion Riesz 基
MR(2010) 主题分类　46B20
中图分类　O177.2

Some Equivalent Descriptions of p-fusion Frames on Banach Spaces

Li Qiong LIN

College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University,
Fuzhou 350108*, P. R. China*
E-mail: *llq*141141@163.*com*

Yun Nan ZHANG

College of Mathematics and Informatics, Fujian Normal University,
Fuzhou 350108*, P. R. China*
E-mail: *zyn*126126@163.*com*

Abstract　We describe a close relation between the p-fusion frames and the p-frames on Banach spaces. Using the analysis operators and the synthesis operators, we provide the equivalent descriptions of the p-fusion Bessel sequences, p-fusion frames and q-fusion Riesz bases.

Keywords　Banach spaces; p-fusion frames; q-fusion Riesz bases
MR(2010) Subject Classification　46B20
Chinese Library Classification　O177.2

收稿日期: 2020-02-11; 接受日期: 2020-07-11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11971108)

1 引言

Duffin 和 Schaeffer [12] 在研究非调和 Fourier 级数时首次引入了 Hilbert 空间上框架的概念. Daubechies, Grossmann 和 Meyer [11] 发现使用框架可使 $L_2(\mathbb{R})$ 中的函数展开成类似于标准正交基展开的级数, 因此重新引入了框架理论. 这一基础性工作使得框架理论及其应用开始引起国内外学者的兴趣和关注, 并且得到广泛研究和迅速发展. 设 H 是 Hilbert 空间, I 是指标集. H 中的向量族 $\{x_i\}_{i\in I}$ 称为 H 上的框架, 如果存在常数 $0<A\leq B<\infty$, 使得对任意 $x\in H$, 有

$$A\|x\|\leq\left(\sum_{i\in I}|\langle x,x_i\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq B\|x\|.$$

如今框架理论不仅在数学领域有广泛的应用, 而且在应用数学、计算科学和工程学等领域也有重要应用 [3, 5, 8, 9, 15, 16]. 随着框架理论的发展, 一些学者把 Hilbert 空间上的框架理论推广到 Banach 空间上, 成为框架理论的一个新的重要分支 [1, 4, 10, 14, 17], 其中 Aldroubi, Sun 和 Tang 的文 [1] 在 Banach 空间中引入 p- 框架的概念, 这是 Banach 空间上最接近于 Hilbert 空间上框架的一个概念. 设 X 是 Banach 空间, $1<p<\infty$. X 的对偶空间 X^* 中的向量族 $\{f_i\}_{i\in I}$ 称为 X 上的 p- 框架, 如果存在常数 $0<A\leq B<\infty$, 使得对任意 $x\in X$, 有

$$A\|x\|\leq\left(\sum_{i\in I}|\langle x,f_i\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq B\|x\|.$$

当处理大数据时, 需要将一些数据做局部处理后再做整体处理, 由此 Casazza, Kutyniok 和 Fornasier 等人 [6, 7, 13] 在研究用局部框架重构全局框架时引入了 fusion 框架 (子空间框架) 的概念. Fusion 框架是框架的推广. 设 H 是 Hilbert 空间, $\{X_i\}_{i\in I}$ 是 H 的闭子空间族, $u_i>0$, π_{X_i} 是 H 到 X_i 上的正交投影, $i\in I$. 称 $\{(X_i,u_i)\}_{i\in I}$ 为 H 上的 fusion 框架, 如果存在常数 $0<A\leq B<\infty$, 使得对任意 $x\in H$, 有

$$A\|x\|\leq\left(\sum_{i\in I}u_i^2\|\pi_{X_i}x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq B\|x\|.$$

当上述不等式中的指数 2 换成 p $(1<p<\infty)$ 时, Bachoc 和 Ehler [2] 在 Hilbert 空间上引入了 p-fusion 框架的定义.

本文在 Banach 空间上给出 p- 框架与 fusion 框架的共同推广, 引入 p-fusion Bessel 序列、p-fusion 框架和 q-fusion Riesz 基的定义, 并应用分析算子和合成算子讨论它们的等价描述.

先说明一些记号. 设 X 是 Banach 空间, 其对偶空间记为 X^*. 以 $B(X)$ 表示 X 上有界线性算子全体. 对 $T\in B(X)$, 用 $\ker T:=\{x\in X:Tx=0\}$ 与 $\operatorname{ran}T:=\{Tx:x\in X\}$ 分别表示 T 的零空间与值域. 称 $P\in B(X)$ 是 X 上的投影算子, 若 $P^2=P$. 用 $P(X)$ 表示 X 上投影算子全体. 设 A 是 X 的子集, 以 $\operatorname{span}A$, $\overline{A}$ 和 $A^\perp:=\{f\in X^*:\langle x,f\rangle=0$ 对任意 $x\in A$ 成立$\}$ 分别表示 A 的线性张, 闭包和上零化子. 设 B 是 X^* 的子集, 用 $\overline{B^{w^*}}$ 和 $B_\perp:=\{x\in X:\langle x,f\rangle=0$ 对任意 $f\in B$ 成立$\}$ 分别表示 B 的 w^* 闭包和下零化子. 设 X_i 是 Banach 空间, $i\in I$. 记 Banach 空间

$$\left(\bigoplus_{i\in I}X_i\right)_p:=\left\{\{x_i\}_{i\in I}:x_i\in X_i,\|\{x_i\}_{i\in I}\|=\left(\sum_{i\in I}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}.$$

2 p-fusion 框架和 p- 框架的联系

首先给出 p-fusion Bessel 序列和 p-fusion 框架的定义.

定义 2.1 设 X 是 Banach 空间, $1<p<\infty$, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$. $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 称为 X 上的 p-fusion 框架, 如果存在常数 $0<C\leq D<\infty$, 使得对任意 $x\in X$, 有

$$C\|x\|\leq\left(\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq D\|x\|.$$

称 C 和 D 为 p-fusion 框架界. 如果仅有右边不等式成立, 则称 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 为 p-fusion Bessel 序列且有 p-fusion Bessel 界 D.

注 2.2 由于本文中 Banach 空间上 p-fusion 框架是作为 p- 框架与 fusion 框架的共同推广而提出, 而 Banach 空间 X 上的 p- 框架最早的定义是取其对偶空间 X^* 中的向量族 $\{f_i\}_{i\in I}$. 因此, 本文中 Banach 空间 X 上的 p-fusion 框架也取其对偶空间 X^* 中的投影算子族 $\{P_i\}_{i\in I}$, 而不是取 X 上的投影算子族. 此时这些投影算子 P_i 不能对 X 中的元素 x 作用, 所以考虑其共轭算子 P_i^* 对 x 作用.

下面说明 p-fusion 框架和 p- 框架有紧密联系.

定理 2.3 设 X 是 Banach 空间, $1<p<\infty$. 对每个 $i\in I$, 设 $v_i>0$, $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}\subseteq X^*$, 其中 J_i 是指标集. 令 $Y_i=\overline{\operatorname{span}}\{f_{ij}:j\in J_i\}\subseteq X^*$. 假设 Y_i 在 X^* 中可补, 设 $P_i\in B(X^*)$ 是 X^* 上的投影算子满足 $\operatorname{ran}P_i=Y_i$. 若存在 $0<A_i\leq B_i<\infty$ 满足

$$0<A=\inf_{i\in I}A_i\leq B=\sup_{i\in I}B_i<+\infty,$$

使得对任意 $x\in X$, 有

$$A_i\|P_i^*x\|\leq\left(\sum_{j\in J_i}|\langle P_i^*x,f_{ij}\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq B_i\|P_i^*x\|,$$

则如下等价:

(1) $\{v_if_{ij}\}_{j\in J_i,i\in I}$ 是 X 上的 p- 框架;

(2) $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架.

证明 对任意 $x\in X$, 有

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle P_i^*(v_ix),f_{ij}\rangle|^p=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle x,P_i(v_if_{ij})\rangle|^p=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle x,v_if_{ij}\rangle|^p,$$

则

$$\begin{aligned}A\left(\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}&\leq\left(\sum_{i\in I}A_i^pv_i^p\|P_i^*x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle P_i^*(v_ix),f_{ij}\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle x,v_if_{ij}\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i\in I}B_i^pv_i^p\|P_i^*x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq B\left(\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

(1)⇒(2) 若 $\{v_if_{ij}\}_{j\in J_i,i\in I}$ 是 X 上的 p- 框架, 有 p- 框架界 C,D, 则对任意 $x\in X$, 有

$$\begin{aligned}\frac{C}{B}\|x\| &\le \frac{1}{B}\Big(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle x,v_if_{ij}\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \frac{1}{A}\Big(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle x,v_if_{ij}\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \frac{D}{A}\|x\|,\end{aligned}$$

故 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架, 有 p-fusion 框架界 $\frac{C}{B},\frac{D}{A}$.

(2)⇒(1) 若 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架, 有 p-fusion 框架界 C,D, 则对任意 $x\in X$, 有

$$\begin{aligned}AC\|x\| &\le A\Big(\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle x,v_if_{ij}\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le B\Big(\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le BD\|x\|,\end{aligned}$$

故 $\{v_if_{ij}\}_{j\in J_i,i\in I}$ 是 X 上的 p- 框架, 有 p- 框架界 AC,BD. 证毕.

接下来说明 p-fusion 框架是 w^* 完备的.

定义 2.4 设 X 是 Banach 空间, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$. $\{P_i\}_{i\in I}$ 称为是 w^* 完备的, 若

$$X^*=\overline{\operatorname{span}\{P_i(X^*):i\in I\}}^{w^*}.$$

命题 2.5 设 X 是 Banach 空间, $1<p<\infty$, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$. 若 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架, 则 $\{P_i\}_{i\in I}$ 是 w^* 完备的.

证明 假设 $\{P_i\}_{i\in I}$ 不是 w^* 完备的, 即

$$\overline{\operatorname{span}\{P_i(X^*):i\in I\}}^{w^*}\ne X^*.$$

由于 X^* 按照 w^* 拓扑是可分离的且其对偶空间就是 X, 则存在 $0\ne x\in X$, 使得对任意 $f\in\overline{\operatorname{span}\{P_i(X^*):i\in I\}}^{w^*}$, 有 $\langle x,f\rangle=0$. 特别地, 对所有的 $i\in I$ 及所有的 $g\in X^*$, 有 $0=\langle x,P_ig\rangle=\langle P_ig,x\rangle=\langle g,P_i^*x\rangle$, 故 $P_i^*x=0$. 因而

$$\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p=0,$$

这与 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架矛盾. 因此 $\{P_i\}_{i\in I}$ 是 w^* 完备的. 证毕.

3 p-fusion Bessel 序列和 p-fusion 框架的等价描述

本节应用分析算子和合成算子给出 p-fusion Bessel 序列和 p-fusion 框架的等价描述. 先给出分析算子的定义及其性质.

命题 3.1 设 X 是 Banach 空间, $1<p<\infty$, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$. 令

$$U:X\to\Big(\bigoplus_{i\in I}\operatorname{ran}P_i^*\Big)_p:Ux=\{v_iP_i^*x\}_{i\in I}.$$

U 称为分析算子, 有

(1) $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion Bessel 序列且有 p-fusion Bessel 界 $D\Leftrightarrow U$ 是确定的有界线性算子且 $\|U\|\le D$;

(2) $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架 $\Leftrightarrow U$ 是确定的有界线性算子且 U 是下有界的.

证明 首先 U 显然是线性的. 对任意 $x\in X$, 有 $\|Ux\|=\|\{v_iP_i^*x\}_{i\in I}\|=(\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p)^{\frac{1}{p}}$.

(1) $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion Bessel 序列且有 p-fusion Bessel 界 D

$\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in X$, 有 $(\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p)^{\frac{1}{p}}\le D\|x\|$

$\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in X$, 有 $Ux\in(\bigoplus_{i\in I}\operatorname{ran}P_i^*)_p$ 且 $\|Ux\|\le D\|x\|$

$\Leftrightarrow$ U 是确定的有界线性算子且 $\|U\|\le D$.

(2) $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架

$\Leftrightarrow$ 存在常数 $0<C\le D<\infty$, 使得对任意 $x\in X$, 有 $C\|x\|\le(\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p)^{\frac{1}{p}}\le D\|x\|$

$\Leftrightarrow$ 存在常数 $0<C\le D<\infty$, 使得对任意 $x\in X$, 有 $Ux\in(\bigoplus_{i\in I}\operatorname{ran}P_i^*)_p$ 且 $C\|x\|\le\|Ux\|\le D\|x\|$

$\Leftrightarrow$ U 是确定的有界线性算子且 U 是下有界的. 证毕.

推论 3.2 设 X 是 Banach 空间, $1<p<\infty$, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$. 若 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架, 则 X 是自反的当且仅当对每个 $i\in I$, $\operatorname{ran}P_i^*$ 是自反的.

证明 若 X 是自反的, 则 X^{**}是自反的. 由于 $\operatorname{ran}P_i^*$是 X^{**}的闭子空间, 则 $\operatorname{ran}P_i^*$是自反的.

若 $\operatorname{ran}P_i^*$ 是自反的, 则 $(\operatorname{ran}P_i^*)^{**}=\operatorname{ran}P_i^*$. 故

$$\left(\left(\bigoplus_{i\in I}\operatorname{ran}P_i^*\right)_p\right)^{**}=\left(\left(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^*\right)_q\right)^{*}=\left(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^{**}\right)_p=\left(\bigoplus_{i\in I}\operatorname{ran}P_i^*\right)_p,$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 因而 $(\bigoplus_{i\in I}\operatorname{ran}P_i^*)_p$ 是自反的. 由命题 3.1 (2) 可知 $\operatorname{ran}U$ 是 $(\bigoplus_{i\in I}\operatorname{ran}P_i^*)_p$ 的闭子空间且 $\operatorname{ran}U$ 与 X 同构, 故 $\operatorname{ran}U$ 是自反的, 因此 X 是自反的. 证毕.

下面给出合成算子的定义及其性质.

命题 3.3 设 X 是 Banach 空间, $1<p<\infty$, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$. 设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 令

$$T:\left(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^*\right)_q\to X^*:T\{f_i\}_{i\in I}=\sum_{i\in I}v_i(f_i\circ P_i^*|_X),\quad f_i\in(\operatorname{ran}P_i^*)^*.$$

T 称为合成算子, 则 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion Bessel 序列且有 p-fusion Bessel 界 D 当且仅当 T 是确定的有界线性算子且 $\|T\|\le D$.

证明 首先 T 显然是线性的且对任意 $f_i\in(\operatorname{ran}P_i^*)^*$, 有 $f_i\circ P_i^*|_X\in X^*$.

若 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion Bessel 序列且有 p-fusion Bessel 界 D, 则对任意 $\{f_i\}_{i\in I}\in(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^*)_q$, 对 I 的任意子集 J,K, 设 $J\subseteq K$, 有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in K}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)-\sum_{i\in J}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)\right\|&=\left\|\sum_{i\in K\setminus J}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)\right\|=\sup_{x\in X,\,\|x\|\le1}\left|\left\langle x,\sum_{i\in K\setminus J}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)\right\rangle\right|\\&=\sup_{x\in X,\,\|x\|\le1}\left|\sum_{i\in K\setminus J}v_i\langle P_i^*x,f_i\rangle\right|\le\sup_{x\in X,\,\|x\|\le1}\sum_{i\in K\setminus J}v_i\|f_i\|\,\|P_i^*x\|\\&\le\sup_{x\in X,\,\|x\|\le1}\left(\sum_{i\in K\setminus J}\|f_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i\in K\setminus J}v_i^p\|P_i^*x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le\left(\sum_{i\in K\setminus J}\|f_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\sup_{x\in X,\,\|x\|\le1}\left(\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le\left(\sum_{i\in K\setminus J}\|f_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\sup_{x\in X,\,\|x\|\le1}D\|x\|=D\left(\sum_{i\in K\setminus J}\|f_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

因此 $\sum_{i\in I}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)$ 在 X^* 中是收敛的且 T 是确定的. 对任意 $\{f_i\}_{i\in I}\in(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^*)_q$, 类似可证得

$$\|T\{f_i\}_{i\in I}\|=\left\|\sum_{i\in I}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)\right\|\le D\left(\sum_{i\in I}\|f_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}=D\|\{f_i\}_{i\in I}\|,$$

则 T 是确定的有界线性算子且 $\|T\|\le D$.

反之, 若 T 是确定的有界线性算子且 $\|T\|\le D$. 设

$$x\in X.$$

对任意 $\{f_i\}_{i\in I}\in(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^*)_q$, 令

$$\Phi_x(\{f_i\}_{i\in I})=\langle x,T\{f_i\}_{i\in I}\rangle=\left\langle x,\sum_{i\in I}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)\right\rangle=\sum_{i\in I}\langle v_iP_i^*x,f_i\rangle,$$

则

$$|\Phi_x(\{f_i\}_{i\in I})|=|\langle x,T\{f_i\}_{i\in I}\rangle|\le\|T\{f_i\}_{i\in I}\|\,\|x\|\le\|T\|\,\|\{f_i\}_{i\in I}\|\,\|x\|,$$

故 $\Phi_x\in((\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^*)_q)^*=(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^{**})_p$ 且

$$\|\Phi_x\|\le\|T\|\,\|x\|\le D\|x\|.$$

设 J 是从 $((\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^*)_q)^*$ 到 $(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^{**})_p$ 的典则等距同构, 则 $\{v_iP_i^*x\}_{i\in I}=J(\Phi_x)$ 且

$$\left(\sum_{i\in I}v_i^p\|P_i^*x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|\{v_iP_i^*x\}_{i\in I}\|=\|\Phi_x\|\le D\|x\|.$$

因此 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion Bessel 序列且有 p-fusion Bessel 界 D. 证毕.

若 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion Bessel 序列, 则对任意 $\{f_i\}_{i\in I}\in(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^*)_q$, 由命题 3.3 的证明过程可知级数 $\sum_{i\in I}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)$ 在 X^* 中是无条件收敛的.

引理 3.4 设 X 是 Banach 空间, $1<p<\infty$, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$. 设 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion Bessel 序列, U 和 T 是相应的分析算子和合成算子, 则

(1) $U^*=T$;

(2) T^* 是 U 的延拓. 若 X 是自反的, 则 $T^*=U$.

证明 (1) 设 $\{f_i\}_{i\in I}\in(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran}P_i^*)^*)_q$. 对任意 $x\in X$, 有

$$\begin{aligned}\langle x,U^*\{f_i\}_{i\in I}\rangle&=\langle Ux,\{f_i\}_{i\in I}\rangle=\langle\{v_iP_i^*x\}_{i\in I},\{f_i\}_{i\in I}\rangle\\&=\sum_{i\in I}\langle v_iP_i^*x,f_i\rangle=\langle x,T\{f_i\}_{i\in I}\rangle,\end{aligned}$$

则 $U^*\{f_i\}_{i\in I}=T\{f_i\}_{i\in I}$. 故 $U^*=T$.

(2) 由 (1), $T^*=U^{**}$ 是 U 的延拓. 若 X 是自反的, 则 $T^*=U^{**}=U$. 证毕.

命题 3.5 设 X 是 Banach 空间, $1<p<\infty$, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$, 则 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架当且仅当合成算子 T 是确定的有界线性算子且 T 是满射.

证明 若 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架, 由命题 3.1 (2) 可得 U 是确定的有界线性算子且 U 是下有界的. 由命题 3.3, T 是确定的有界线性算子. 又由引理 3.4 可得 $U^*=T$. 由于

U 是单射且 $\operatorname{ran} U$ 是 $(\bigoplus_{i\in I}\operatorname{ran} P_i^*)_p$ 的闭子集, 则 $\operatorname{ran} U^*$ 是 X^* 的闭子集, 且 $\operatorname{ran} T=\operatorname{ran} U^*=(\ker U)^{\perp}=X^*$, 即 T 是满射.

若 T 是确定的有界线性算子且 T 是满射, 由命题 3.3, $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion Bessel 序列. 由命题 3.1 (1) 可得 U 是确定的有界线性算子. 又由引理 3.4 可得 $U^*=T$. 由于 $\operatorname{ran} T=X^*$, 自然是闭的, 则 $\operatorname{ran} U$ 是 $(\bigoplus_{i\in I}\operatorname{ran} P_i^*)_p$ 的闭子集且 $\ker U=(\operatorname{ran} U^*)_{\perp}=(\operatorname{ran} T)_{\perp}=\{0\}$, 即 U 是单射, 因此 U 是下有界的. 由命题 3.1 (2) 可得 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架. 证毕.

若 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架, 命题 3.5 说明

$$X^*=\left\{\sum_{i\in I}v_i(f_i\circ P_i^*|_X):\{f_i\}_{i\in I}\in\left(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran} P_i^*)^*\right)_q\right\}.$$

结合命题 3.1, 3.3 和 3.5 可得本节的主要结论.

定理 3.6 设 X 是 Banach 空间, $1<p<\infty$, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$, 则

(1) $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion Bessel 序列且有 p-fusion Bessel 界 D

$\Leftrightarrow$ 分析算子 U 是确定的有界线性算子且 $\|U\|\le D$

$\Leftrightarrow$ 合成算子 T 是确定的有界线性算子且 $\|T\|\le D$.

(2) $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架

$\Leftrightarrow$ 分析算子 U 是确定的有界线性算子且 U 是下有界的

$\Leftrightarrow$ 合成算子 T 是确定的有界线性算子且 T 是满射.

4 q-fusion Riesz 基的等价描述

作为 q-Riesz 基的推广, 下面给出 q-fusion Riesz 基的定义.

定义 4.1 设 X 是 Banach 空间, $1<q<\infty$, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$. $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 称为 X^* 上的 q-fusion Riesz 基, 若

$$X^*=\overline{\left\{\sum_{i\in J}v_i(f_i\circ P_i^*|_X):f_i\in(\operatorname{ran} P_i^*)^*,i\in J,J\text{ 是 }I\text{ 的有限子集}\right\}}\tag{4.1}$$

且存在常数 $0<C\le D<\infty$, 使得对 I 的任意有限子集 J 以及对任意 $f_i\in(\operatorname{ran} P_i^*)^*$, $i\in J$, 有

$$C\left(\sum_{i\in J}\|f_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\left\|\sum_{i\in J}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)\right\|\le D\left(\sum_{i\in J}\|f_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\tag{4.2}$$

根据上述定义, 可以证明 q-fusion Riesz 基与相应合成算子的关系.

命题 4.2 设 X 是 Banach 空间, $1<q<\infty$, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$, 则 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X^* 上的 q-fusion Riesz 基当且仅当合成算子 T 是确定的有界线性算子且 T 是可逆的.

证明 若 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X^* 上的 q-fusion Riesz 基, 由定义 4.1 中不等式 (4.2) 及命题 3.3 的证明过程可知 $\sum_{i\in I}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)$ 在 X^* 中收敛且对任意 $\{f_i\}_{i\in I}\in(\bigoplus_{i\in I}(\operatorname{ran} P_i^*)^*)_q$, 有

$$C\left(\sum_{i\in I}\|f_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\left\|\sum_{i\in I}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)\right\|\le D\left(\sum_{i\in I}\|f_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

故 T 是确定的有界线性算子且 T 是下有界的. 又由定义 4.1 中的等式 (4.1) 可知 $X^*\subseteq\overline{\operatorname{ran} T}=\operatorname{ran} T$, 故 T 是满射. 因此 T 是可逆的.

反之由定义 4.1 及 T 的定义可直接得到. 证毕.

由命题 4.2 与定理 3.6 直接可得如下推论.

推论 4.3 设 X 是 Banach 空间, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$. 设 $1<p,q<\infty$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 若 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X^* 上的 q-fusion Riesz 基, 则 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架.

如下结论也容易证明:

推论 4.4 设 X 是 Banach 空间, $v_i>0$, $P_i\in P(X^*)$, $i\in I$. 设 $1<p,q<\infty$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 若 $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架, 则如下等价:

(1) $\{(P_i,v_i)\}_{i\in I}$ 是 X^* 上的 q-fusion Riesz 基;

(2) 若 $\{f_i\}_{i\in I}\in(\bigoplus_{i\in I}(\mathrm{ran}\,P_i^*)^*)_q$ 且 $0=\sum_{i\in I}v_i(f_i\circ P_i^*|_X)\in X^*$, 则 $f_i=0$, $i\in I$;

(3) $(\bigoplus_{i\in I}\mathrm{ran}\,P_i^*)_p=\{\{v_iP_i^*x\}_{i\in I}:x\in X\}$.

证明 设 U 和 T 是相应的分析算子和合成算子, 由定理 3.6, U 和 T 均是确定的有界线性算子且 U 是下有界的, T 是满射. 根据命题 4.2 可得:

(1)$\Leftrightarrow$ T 是可逆的 $\Leftrightarrow$ T 是单射 $\Leftrightarrow$(2).

又由引理 3.4, $U^*=T$, 则

(1)$\Leftrightarrow$ T 是可逆的 $\Leftrightarrow$ U 是可逆的 $\Leftrightarrow$ U 是满射 $\Leftrightarrow$(3). 证毕.

下面需要 X^* 的 w^* 极小闭子空间族以及相应 X 的双正交闭子空间族的定义.

定义 4.5 设 X 是 Banach 空间, $\{Y_i\}_{i\in I}$ 是 X^* 的闭子空间族. 称 $\{Y_i\}_{i\in I}$ 是 w^* 极小的, 若对任意 $i\in I$,

$$Y_i\cap\overline{\mathrm{span}\{Y_j:j\in I,\,j\neq i\}}^{w^*}=\{0\}.$$

命题 4.6 设 X 是 Banach 空间, $\{Y_i\}_{i\in I}$ 是 X^* 的闭子空间族, 则如下等价:

(1) $\{Y_i\}_{i\in I}$ 是 w^* 极小的;

(2) $\{Y_i\}_{i\in I}$ 有相应的 X 的双正交闭子空间族, 即存在 X 的闭子空间族 $\{X_i\}_{i\in I}$, 使得

(2.1) 对任意 $i,j\in I$, $i\neq j$, 任意 $f\in Y_i$, 以及任意 $x\in X_j$, 有 $\langle x,f\rangle=0$,

(2.2) 对任意 $i\in I$, 任意 $0\neq f\in Y_i$, 存在 $x_i\in X_i$, 使得 $\langle x_i,f\rangle\neq0$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 对每个 $i\in I$, 令

$$X_i=(\overline{\mathrm{span}\{Y_j:j\in I,\,j\neq i\}}^{w^*})_\perp.$$

对任意 $i,j\in I$, $i\neq j$, 任意 $f\in Y_i$, 以及任意 $x\in X_j$, 由于 $Y_i\subseteq\overline{\mathrm{span}\{Y_k:k\in I,\,k\neq j\}}^{w^*}$, 则 $\langle x,f\rangle=0$.

假设存在 $i_0\in I$ 与 $0\neq f_{i_0}\in Y_{i_0}$, 使得对任意 $x\in X_{i_0}$, 有 $\langle x,f_{i_0}\rangle=0$, 则

$$f_{i_0}\in(X_{i_0})^\perp=((\overline{\mathrm{span}\{Y_j:j\in I,\,j\neq i_0\}}^{w^*})_\perp)^\perp=\overline{\mathrm{span}\{Y_j:j\in I,\,j\neq i_0\}}^{w^*}.$$

故 $f_{i_0}\in Y_{i_0}\cap\overline{\mathrm{span}\{Y_j:j\in I,\,j\neq i_0\}}^{w^*}$, 这与 $\{Y_i\}_{i\in I}$ 是 w^* 极小的矛盾. 因而对任意 $i\in I$, 任意 $0\neq f\in Y_i$, 存在 $x_i\in X_i$, 使得 $\langle x_i,f\rangle\neq0$.

(2)$\Rightarrow$(1). 若 $\{Y_i\}_{i\in I}$ 不是 w^* 极小的, 则存在 $i_0\in I$, 使得

$$Y_{i_0}\cap\overline{\mathrm{span}\{Y_j:j\in I,j\neq i_0\}}^{w^*}\neq\{0\}.$$

选取 $0\neq f_{i_0}\in Y_{i_0}\cap\overline{\mathrm{span}\{Y_j:j\in I,\,j\neq i_0\}}^{w^*}$. 对任意 $x\in X_{i_0}$, 任意 $j\neq i_0$, 以及任意 $g\in Y_j$, 由 (2.1) 有 $\langle x,g\rangle=0$, 则对任意 $g\in\mathrm{span}\{Y_j:j\in I,j\neq i_0\}$, 有 $\langle x,g\rangle=0$. 故对任意 $g\in\overline{\mathrm{span}\{Y_j:j\in I,\,j\neq i_0\}}^{w^*}$, 有 $\langle x,g\rangle=0$. 特别地, $\langle x,f_{i_0}\rangle=0$, 这与 (2.2) 矛盾. 因此 $\{Y_i\}_{i\in I}$ 是 w^* 极小的. 证毕.

现在给出本节的主要结论.

定理 4.7 设 X 是自反 Banach 空间, $v_i > 0$, $P_i \in P(X^*)$, $i \in I$. 设 $1 < p, q < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 若 $\{(P_i, v_i)\}_{i\in I}$ 是 X 上的 p-fusion 框架, 则如下等价:

(1) $\{(P_i, v_i)\}_{i\in I}$ 是 X^* 上的 q-fusion Riesz 基;

(2) 若 $\{f_i\}_{i\in I} \in (\bigoplus_{i\in I}(\mathrm{ran}\, P_i^*)^*)_q$ 且 $0 = \sum_{i\in I} v_i(f_i \circ P_i^*|_X) \in X^*$, 则 $f_i = 0$, $i \in I$;

(3) $(\bigoplus_{i\in I}\mathrm{ran}\, P_i^*)_p = \{\{v_i P_i^* x\}_{i\in I} : x \in X\}$;

(4) $\{\mathrm{ran}\, P_i\}_{i\in I}$ 是极小的, 即对任意 $i \in I$, $\mathrm{ran}\, P_i \cap \overline{\mathrm{span}\{\mathrm{ran}\, P_j : j \in I, j \neq i\}} = \{0\}$;

(5) $\{\mathrm{ran}\, P_i\}_{i\in I}$ 是 w^* 极小的;

(6) $\{\mathrm{ran}\, P_i\}_{i\in I}$ 有相应的 X 的双正交闭子空间族.

证明 推论 4.4 说明 (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3).

命题 4.6 说明 (5)$\Leftrightarrow$(6).

(4)$\Leftrightarrow$(5) 由如下两个事实可得.

事实一: 对 Banach 空间的凸子集 (子空间), 其 w 闭包与范数闭包相同.

事实二: 当 X 自反时, 对 X^* 的子集, 其 w^* 闭包与 w 闭包相同.

下面证明 (4)$\Rightarrow$(2). 由于 X 自反, 即 $X^{**} = X$, 则对任意 $i \in I$, 任意 $f_i \in (\mathrm{ran}\, P_i^*)^*$, 有

$$f_i \circ P_i^*|_X = f_i \circ P_i^* \in X^*.$$

故 $f_i = 0 \Leftrightarrow f_i \circ P_i^* = 0$. 由于对任意 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned}\langle x, P_i(f_i \circ P_i^*)\rangle &= \overline{\langle P_i(f_i \circ P_i^*), x\rangle} = \overline{\langle f_i \circ P_i^*, P_i^* x\rangle} = \langle P_i^* x, f_i \circ P_i^*\rangle \\ &= \langle P_i^* P_i^* x, f_i\rangle = \langle P_i^* x, f_i\rangle = \langle x, f_i \circ P_i^*\rangle,\end{aligned}$$

则 $f_i \circ P_i^* = P_i(f_i \circ P_i^*) \in \mathrm{ran}\, P_i$.

若 (2) 不成立, 则存在 $\{f_i\}_{i\in I} \in (\bigoplus_{i\in I}(\mathrm{ran}\, P_i^*)^*)_q$ 满足 $0 \neq f_{i_0} \in (\mathrm{ran}\, P_{i_0}^*)^*$ (某 $i_0 \in I$), 使得 $0 = \sum_{i\in I} v_i(f_i \circ P_i^*) \in X^*$. 故

$$0 \neq -v_{i_0}(f_{i_0} \circ P_{i_0}^*) = \sum_{i\in I,\, i\neq i_0} v_i(f_i \circ P_i^*) \in \mathrm{ran}\, P_{i_0} \cap \overline{\mathrm{span}\{\mathrm{ran}\, P_i : i \in I, i \neq i_0\}},$$

这与 $\{\mathrm{ran}\, P_i\}_{i\in I}$ 是极小的矛盾. 因此 (2) 成立.

最后只需证明 (3)$\Rightarrow$(6). 设 U 是相应分析算子. 若 (3) 成立, 由推论 4.4 的证明过程可得 U 是确定的有界线性算子且 U 是可逆的. 对每个 $i \in I$, $\mathrm{ran}\, P_i^*$ 可视为 $(\bigoplus_{i\in I}\mathrm{ran}\, P_i^*)_p$ 的可补的闭子空间. 令

$$X_i = U^{-1}(\mathrm{ran}\, P_i^*) \subseteq X,$$

则 X_i 是 X 的闭子空间.

对任意 $x \in X_i$, 由于 $Ux = \{v_j P_j^* x\}_{j\in I} \in \mathrm{ran}\, P_i^*$, 则对任意 $j \in I$, $j \neq i$, 有 $P_j^* x = 0$. 故对任意 $f \in \mathrm{ran}\, P_j$, 有

$$\langle x, f\rangle = \langle x, P_j f\rangle = \overline{\langle P_j f, x\rangle} = \overline{\langle f, P_j^* x\rangle} = 0.$$

假设存在 $i_0 \in I$ 和 $0 \neq f_{i_0} \in \mathrm{ran}\, P_{i_0}$, 使得对任意 $x \in X_{i_0}$, 有 $\langle x, f_{i_0}\rangle = 0$. 对任意 $j \in I$, 任意 $x \in X_j$, $j \neq i_0$. 由上可得 $\langle x, f_{i_0}\rangle = 0$. 注意到 $\mathrm{ran}\, P_i^*$ 是 $(\bigoplus_{i\in I}\mathrm{ran}\, P_i^*)_p$ 的可补闭子空间, 则

$$\left(\bigoplus_{i\in I}\mathrm{ran}\, P_i^*\right)_p = \overline{\mathrm{span}\{\mathrm{ran}\, P_i^* : i \in I\}}.$$

又由 U 是可逆的可得

$$\begin{aligned} X &= U^{-1}\left(\left(\bigoplus_{i\in I}\operatorname{ran}P_i^*\right)_p\right) = U^{-1}(\overline{\operatorname{span}\{\operatorname{ran}P_i^* : i\in I\}}) \\ &= \overline{\operatorname{span}\{U^{-1}(\operatorname{ran}P_i^*) : i\in I\}} = \overline{\operatorname{span}\{X_i : i\in I\}}, \end{aligned}$$

则对任意 $x\in X$, 有 $\langle x, f_{i_0}\rangle = 0$, 矛盾. 故对任意 $i\in I$, 任意 $0\neq f\in \operatorname{ran}P_i$, 存在 $x_i\in X_i$, 使得 $\langle x_i, f\rangle\neq 0$.

因此 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是 $\{\operatorname{ran}P_i\}_{i\in I}$ 相应的 X 的双正交闭子空间族, (6) 成立. 证毕.

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参 考 文 献

[1] Aldroubi A., Sun Q., Tang W., p-frames and shift invariant subspaces of L_p, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2001, **7**(1): 1–22.

[2] Bachoc C., Ehler M., Tight p-fusion frames, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2013, **35**: 1–15.

[3] Casazza P. G., The art of frame theory, *Taiwanese J. Math.*, 2000, **4**(2): 129–201.

[4] Casazza P. G., Christensen O., Stoeva D. T., Frame expansions in separable Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, **307**: 710–723.

[5] Casazza P. G., Han D., Larson D. R., Frames for Banach spaces, *Contemp. Math.*, 1999, **247**: 149–182.

[6] Cassaza P. G., Kutyniok G., Frames of subspaces, *Contemp. Math.*, 2004, **345**: 87–113.

[7] Casazza P. G., Kutyniok G., Li S., Fusion frames and distributed processing, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2008, **25**: 114–132.

[8] Casazza P. G., Tremain J. C., The Kadison–Singer problem in mathematics and engineering, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2006, **103**(7): 2032–2039.

[9] Christensen O., An Introduction to Frames and Riesz Bases, Birkhauser, Boston, 2003.

[10] Christensen O., Stoeva D. T., p-frames in separable Banach spaces, *Adv. Comput. Math.*, 2003, **18**: 117–126.

[11] Daubechies I., Grossmann A., Meyer Y., Painless nonorthogonal expansions, *J. Math. Phys.*, 1986, **27**: 1271–1283.

[12] Duffin R. G., Schaeffer A. C., A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1952, **72**: 341–366.

[13] Fornasier M., Quasi-orthogonal decompositions of structured frames, *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **289**: 180–199.

[14] Grochenig K., Describing functions: atomic decompositions versus frames, *Monatsh. Math.*, 1991, **112**(1): 1–42.

[15] Han D., Larson D. R., Frames, bases and group representations, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2000, **147**.

[16] Han D., Larson D. R., Liu B., et al., Operator-valued measures, dilations, and the theory of frames, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2014, **229**.

[17] Liu B., Liu R., Zheng B. T., Parseval p-frames and the Feichtinger conjecture, *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, **424**: 248–259.