第64卷第2期 数学学报中文版 Vol.64, No.2
2021年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Mar., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)02-0261-08 **文献标识码:** A

双截断 Baskakov 局部化算子的收敛性

谢林森

丽水学院数学系 丽水 323000
E-mail: linsenxie@lsu.edu.cn

谢庭藩

中国计量大学应用数学系 杭州 310018
E-mail: xietf@cjlu.edu.cn

杜　鸿

丽水学院数学系 丽水 323000
E-mail: hongdu@lsu.edu.cn

摘　要 本文考虑 Baskakov 算子的一种新的局部化算子, 获得了该算子的一些收敛性质. 另外, 利用概率论中心极限定理, 建立了 Baskakov 算子核的新估计.

关键词 局部化; Baskakov 算子; 收敛性
MR(2010) 主题分类 46A32
中图分类 O177.2

Convergence of Bi-shift Localized Baskakov Operators

Lin Sen XIE

Department of Mathematics, Lishui University, Lishui 323000*, P. R. China*
E-mail: *linsenxie@lsu.edu.cn*

Ting Fan XIE

Department of Applied Mathematics, China Jiliang University,
Hangzhou 310018*, P. R. China*
E-mail: *xietf@cjlu.edu.cn*

Hong DU

Department of Mathematics, Lishui University, Lishui 323000*, P. R. China*
E-mail: *hongdu@lsu.edu.cn*

Abstract We consider a new form of the localized Baskakov operators, and obtain some convergence properties of the new operators. We also obtain a new estimate for the kernel of the Baskakov operators by making use of one of the central limit theorems in probability theory.

收稿日期: 2019-08-23; 接受日期: 2020-06-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11771194)

Keywords localization; Baskakov operator; convergence
MR(2010) Subject Classification 46A32
Chinese Library Classification O177.2

1 引言

设 $C[0,\infty)$ 为定义在区间 $[0,\infty)$ 上所有连续函数组成的集合, C_α 为满足条件 $|f(t)|\le A\mathrm{e}^{\alpha t}$ 的 $C[0,\infty)$ 中的子集, 其中 $A>0$, $\alpha>0$. 著名的 Baskakov 算子定义为

$$V_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array}\right)\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}},\quad x\ge 0.$$

为了减少计算量, 王建力和周颂平在文 [8] 中考虑了如下的 Baskakov 局部化算子

$$V_{n,\delta_n}(f,x)=\sum_{k=0}^{[n(x+\delta_n)]} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array}\right)\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}},\quad x\ge 0,$$

证明了: 如果 $f\in C_\alpha$, 当 $\lim_{n\to\infty}\delta_n\sqrt{n}=\infty$ 时, $V_{n,\delta_n}(f,x)$ 在区间 $[0,\infty)$ 中的任何一个闭子区间上一致收敛于 $f(x)$, 其中 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个正数序列. 还证明: 如果 $f\in C_\alpha$, 当 $\lim_{n\to\infty}\delta_n\sqrt{n}\ne\infty$ 时, 极限 $\lim_{n\to\infty}V_{n,\delta_n}(f,x)=f(x)$ 在区间 $[0,\infty)$ 上每一点都成立的充分必要条件是 $f\equiv 0$. 对于 Szász–Mirakjan 局部化算子, 在文 [2, 4, 5, 7, 9, 10] 中有类似的结果. 一些正线性算子逼近性态的研究可见文 [3].

在上述结果中, 可以看到条件 $f\in C_\alpha$ 似乎比较重要. 然而, 在构造算子 $V_{n,\delta_n}(f,x)$ 时, 只用到函数 $f(x)$ 在区间 $[0,x+\delta_n]$ 上的值. 于是, 一个自然的问题是, 条件 $f\in C_\alpha$ 是否可以删去或者减弱? 同时, 为了进一步减少计算量, 本文考虑 Baskakov 算子的一种新的局部化算子, 称之为双截断 Baskakov 局部化算子, 获得了该算子的一些收敛性质, 且结果不再需要条件 $f\in C_\alpha$.

设 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\delta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两个正数序列, 以及 $C_{n,x}=\{k: k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\ \text{和}\ n(x-\delta'_n)\le k\le n(x+\delta_n)\}$. 对于 $f\in C[0,\infty)$, 双截断 Baskakov 局部化算子定义为

$$V_{n,\delta_n,\delta'_n}(f,x)=\sum_{k\in C_{n,x}} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array}\right)\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}},\quad x\ge 0.$$

本文的前两个主要结果如下:

定理 1.1 设 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\delta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两个有界的正数序列, 且成立 $\lim_{n\to\infty}\delta_n\sqrt{n}=C$ 和 $\lim_{n\to\infty}\delta'_n\sqrt{n}=C'$ (C 和 C' 可以是有限数或者 ∞), 则对于 $f\in C[0,\infty)$, 极限

$$\lim_{n\to\infty}V_{n,\delta_n,\delta'_n}(f,x)=\frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{C'}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{C}{\sqrt{x(1+x)}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}dt \tag{1.1}$$

在区间 $[x_1,x_2]$ 上一致成立, 这里 $0<x_1<x_2<\infty$. 而且, 当 $C>0$ 和 $C'>0$ 时, (1.1) 式在区间 $[x_1,x_2]$ 上也一致成立, 这里 $0\le x_1<x_2<\infty$. 当 $x=0$ 时, 认为 $\frac{C}{\sqrt{x(1+x)}}$ 和 $\frac{C'}{\sqrt{x(1+x)}}$ 均为 ∞.

定理 1.2 设 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\delta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两个有界的正数序列, 以及 $x_0\in(0,\infty)$, 则以下两个条件是等价的:

(1) 对于任意的 $f\in C[0,\infty)$, 均成立 $\lim_{n\to\infty}V_{n,\delta_n,\delta'_n}(f,x_0)=f(x_0)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\delta_n\sqrt{n}=\infty$ 和 $\lim_{n\to\infty}\delta'_n\sqrt{n}=\infty$.

再设

$$A_{n,x}=\{k:k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\ \text{ 和 }\ nx-\sqrt{n}C'\le k\le nx+\sqrt{n}C\},$$

$$V_{n,C,C'}(f,x)=\sum_{k\in A_{n,x}}f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\begin{array}{c}n+k-1\\k\end{array}\right)\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}},\quad x\ge 0.$$

对于 $f\in C[0,\infty)$ 和 $x\in[0,\infty)$, 定义 f 的点态局部化连续模为

$$\omega_{x,C,C'}(f,t)=\max_{y\in[\max(x-C',0),x+C],\,|y-x|<t}|f(y)-f(x)|.$$

本文的第三个主要结果如下:

定理 1.3 设 $C>0$ 和 $C'>0$, 则对于 $f\in C[0,\infty)$ 和 $x\in(0,\infty)$, 成立

$$V_{n,C,C'}(f,x)-\frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{C'}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{C}{\sqrt{x(1+x)}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t=O_{C,C'}(1)\left\{\omega_{x,C,C'}\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{\|f\|_{x,C,C'}}{\sqrt{n}}\right\},\tag{1.2}$$

这里 $\|f\|_{x,C,C'}=\max_{y\in[\max(x-C',0),x+C]}|f(y)|$.

为了证明以上结果, 第 2 节先证明几个引理, 第 3 节给出以上三个结果的证明以及几个推论.

2 引理

本节给出几个引理.

引理 2.1 对于 $n=2,3,\ldots$ 和 $k=1,2,\ldots$, 有

$$\left(\begin{array}{c}n-1\\0\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}n\\1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}n+1\\2\end{array}\right)+\cdots+\left(\begin{array}{c}n+k-1\\k\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}n+k\\k\end{array}\right).\tag{2.1}$$

引理 2.1 可由归纳法推出.

引理 2.2 对于 $m=0,1,2,\ldots$ 和 $x\ge 0$, 令 $T_m=\sum_{k=0}^{\infty}k^m\frac{x^k}{(1+x)^{1+k}}$, 这里当 $k=0$ 时, 认为 k^0 为 1, 则有 $T_0=1$, $T_1=x$, $T_2=x(2x+1)$, $T_3=6x^3+6x^2+x$ 以及 $T_4=24x^4+36x^3+14x^2+x$.

证明 显然 $T_0=1$. 下面计算 T_1 和 T_2. 因为

$$T_1=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{x^k}{(1+x)^{1+k}}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{1}{1+x}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{k+1}=\frac{x}{1+x}T_1+\frac{x}{1+x},$$

故有 $T_1=x$. 又因为

$$T_2=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2\frac{1}{1+x}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{k+1}=\frac{x}{1+x}(T_2+2T_1+T_0)=\frac{x}{1+x}(T_2+2x+1),$$

故有 $T_2=x(2x+1)$. 同理可得

$$T_3=\frac{x}{1+x}(T_3+3T_2+3T_1+T_0),\quad T_4=\frac{x}{1+x}(T_4+4T_3+6T_2+4T_1+T_0).$$

由以上两式, 便可推出 T_3 和 T_4 的表达式. 引理 2.2 证毕.

引理 2.3 设 $x\ge 0$, ξ 是在 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 上取值的随机变量, 且其概率为

$$P(\xi=k)=\frac{x^k}{(1+x)^{1+k}},\quad k=0,1,2,\ldots,\tag{2.2}$$

那么, ξ 的数学期望为

$$E(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{x^k}{(1+x)^{1+k}}=x,\tag{2.3}$$

ξ 的方差为

$$E(\xi - E(\xi))^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(k-x)^2\frac{x^k}{(1+x)^{1+k}} = x(x+1), \tag{2.4}$$

以及三阶绝对中心矩

$$E|\xi - x|^3 = \sum_{k=0}^{\infty}|k-x|^3\frac{x^k}{(1+x)^{1+k}}$$

满足当 $0 \le x \le 1$ 时,

$$x \le E|\xi - x|^3 \le 8x; \tag{2.5}$$

当 $1 < x < \infty$ 时,

$$2x^3 < E|\xi - x|^3 < 9x^3. \tag{2.6}$$

证明 从数学期望和方差的定义, 以及引理 2.2, 直接可得 (2.3) 和 (2.4). 下面证明 (2.5) 和 (2.6). 当 $0 \le x \le 1$ 时, 可以写成

$$E|\xi - x|^3 = \sum_{k=0}^{\infty}(k-x)^3\frac{x^k}{(1+x)^{1+k}} + \frac{2x^3}{1+x}.$$

由引理 2.2 有 $E|\xi - x|^3 = x(2x^2+3x+1+\frac{2x^2}{1+x})$. 因此 (2.5) 成立.

当 $1 < x < \infty$ 时, 由 Hölder 不等式, 有

$$E|\xi - x|^3 \le \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}(k-x)^4\frac{x^k}{(1+x)^{1+k}}} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}(k-x)^2\frac{x^k}{(1+x)^{1+k}}}.$$

于是, 由引理 2.2 有

$$E|\xi - x|^3 \le x\sqrt{9x^4+27x^3+28x^2+11x+1}.$$

从而

$$E|\xi - x|^3 < 9x^3. \tag{2.7}$$

另一方面, 当 $1 < x < \infty$ 时, 有

$$E|\xi - x|^3 \ge \sum_{k=0}^{\infty}(k-x)^3\frac{x^k}{(1+x)^{1+k}} = 2x^3+3x^2+x.$$

因此, 结合 (2.7) 便得 (2.6). 引理 2.3 证毕.

引理 2.4 设 $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ 是一列独立的具有与引理 2.3 中 ξ 相同分布函数的随机变量, 那么对于 $n = 2, 3, \dots$ 和 $k = 0, 1, 2, \dots$, 有

$$P(\xi_1 + \cdots + \xi_n = k) = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}. \tag{2.8}$$

证明 对于 $k = 0, 1, 2, \dots$, 由 (2.2) 有

$$\begin{aligned} P(\xi_1 + \xi_2 = k) &= \sum_{m=0}^{k}P(\xi_1 = m)P(\xi_2 = k-m) \\ &= \frac{k+1}{(1+x)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k = \begin{pmatrix} 2+k-1 \\ k \end{pmatrix}\frac{x^k}{(1+x)^{2+k}}. \end{aligned}$$

现假设 (2.8) 对于 $n \geq 2$ 成立, 下面证明 (2.8) 对于 $n+1$ 也成立. 对于 $k=0,1,2,\dots$, 由 (2.2) 和 (2.1), 有

$$\begin{aligned} P(\xi_1+\cdots+\xi_n+\xi_{n+1}=k) &= \sum_{m=0}^{k} P(\xi_1+\cdots+\xi_n=m)P(\xi_{n+1}=k-m) \\ &= \frac{1}{(1+x)^{n+1}}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k \sum_{m=0}^{k} \begin{pmatrix} n+m-1 \\ m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n+1+k-1 \\ k \end{pmatrix} \frac{x^k}{(1+x)^{n+1+k}}. \end{aligned}$$

由归纳法, (2.8) 对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ 成立. 引理 2.4 证毕.

引理 2.5[6] 设 $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n,\dots$ 是一列独立的具有一致分布的随机变量, 且 $E(\eta_1)=0$, $E(\eta_1^2=\sigma^2)$ 和 $E|\eta_1|^3<\infty$, 那么对于所有的 $y \in (-\infty,\infty)$, 有

$$\left|P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\eta_k \leq y\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{AE|\eta_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}(1+|y|)^3}, \tag{2.9}$$

这里 A 是一个绝对常数.

引理 2.6 设 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\delta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两个正数序列, 且 $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ 和 $\lim_{n\to\infty}\delta'_n=0$, 那么对于 $x\in[0,\infty)$, 有

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k\in C_{n,x}} \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\delta'_n\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{\delta_n\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}dt\right| \\ &\quad \leq \frac{A\max(x,x^3)}{\sqrt{n}(\sqrt{x(1+x)}+\sqrt{n}\min(\delta_n,\delta'_n))^3}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

这里 A 是一个不依赖于 n 和 x 的正的常数.

证明 对于 $x>0$, 考虑与引理 2.3 给出的 ξ 具有相同分布函数的随机变量 ξ_1, 即

$$P(\xi_1=k)=\frac{x^k}{(1+x)^{1+k}},\quad k=0,1,2,\dots.$$

由 (2.3) 和 (2.4), 有

$$E(\xi_1-x)=0,\quad E(\xi_1-x)^2=x(1+x).$$

定义 $\eta_1=\xi_1-x$, 则有 $E(\eta_1)=0$, $\sigma^2=E(\eta_1^2)=x(1+x)$. 而且, 由 (2.5) 和 (2.6), 则当 $0\leq x\leq 1$ 时, $E|\eta_1|^3\leq 8x$; 当 $1<x<\infty$ 时, $E|\eta_1|^3<9x^3$.

令 $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n,\dots$ 是一列独立的具有一致分布的随机变量, 且 $S_n=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n$. 由 (2.8), 则对于任意的绝对常数 M, 有

$$P(S_n\leq M)=\sum_{k=0}^{[M+nx]} \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}. \tag{2.11}$$

于是, 令 $M=n\delta_n$, 则有

$$P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}\leq\frac{\delta_n\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}\right)=P(S_n\leq n\delta_n)=\sum_{k=0}^{[nx+n\delta_n]} \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}.$$

从而由 (2.9), 对于 $x\in[0,\infty)$, 有

$$\left|\sum_{k=0}^{[nx+n\delta_n]} \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\delta_n\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}dt\right| \leq \frac{9A\max(x,x^3)}{\sqrt{n}(\sqrt{x(1+x)}+\delta_n\sqrt{n})^3}. \tag{2.12}$$

而且, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 又令 $M = -(\delta'_n + \varepsilon)$, 则有

$$P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{-\sqrt{n}(\delta'_n+\varepsilon)}{\sqrt{x(1+x)}}\right) = P(S_n \le -n(\delta'_n+\varepsilon)) = \sum_{k=0}^{[nx-n(\delta'_n+\varepsilon)]} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}},$$

这里认为 $\sum_{k=m}^{m-1} = 0$. 这样, 再由 (2.9), 对于 $x \in [0,\infty)$, 有

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k=0}^{[nx-n(\delta'_n+\varepsilon)]} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{(\delta'_n+\varepsilon)\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} dt\right| \\ &\quad \le \frac{9A\max(x,x^3)}{\sqrt{n}(\sqrt{x(1+x)}+(\delta'_n+\varepsilon)\sqrt{n})^3}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

结合 (2.12) 和 (2.13), 则对于 $x \in [0,\infty)$, 有

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k\in\Delta_\varepsilon} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(\delta'_n+\varepsilon)\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{\delta_n\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} dt\right| \\ &\quad \le \frac{18A\max(x,x^3)}{\sqrt{n}(\sqrt{x(1+x)}+\sqrt{n}\min(\delta_n,\delta'_n+\varepsilon))^3}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

这里 $\Delta_\varepsilon = \{k : k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\ \ 和\ \ n(x-\delta'_n-\varepsilon) < k \le n(x+\delta_n)\}$. 在 (2.14) 中, 令 $\varepsilon \to 0$, 则可得 (2.10). 引理 2.5 证毕.

3 主要结果的证明

这一节将给出定理 1.1–1.3 的证明, 以及一些推论.

定理 1.1 的证明 令 $G = \sup\{\delta_n, \delta'_n : n = 1,2,\ldots\}$, 并记

$$\omega_{x_1,x_2}(f,t) = \max_{x,y\in[\max(x_1-G,0),x_2+G],\,|x-y|<t} |f(y)-f(x)|, \quad t > 0.$$

由文 [1, 第 37 页] 中的 (c), 对于 $\lambda > 0$, 有

$$\omega_{x_1,x_2}(f,\lambda t) \le K(1+\lambda)\omega_{x_1,x_2}(f,t), \tag{3.1}$$

这里 K 是一个绝对常数. 对于 $x \in [x_1,x_2]$, $0 < x_1 < x_2 < \infty$, 可以写成

$$\begin{aligned} &V_{n,\delta_n,\delta'_n}(f,x) - \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{C'}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{C}{\sqrt{x(1+x)}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ &= \sum_{k\in C_{n,x}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \\ &\quad + f(x)\left(\sum_{k\in C_{n,x}} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\delta'_n\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{\delta_n\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} dt\right) \\ &\quad + \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\frac{\delta'_n\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{\delta_n\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}} - \int_{-\frac{C'}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{C}{\sqrt{x(1+x)}}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ &\equiv J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

在 (3.1) 中, 令 $\lambda = \left|\frac{k}{n} - x\right|\sqrt{n}$, $k \in C_{n,x}$, 则

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \le \omega_{x_1,x_2}\left(f, \left|\frac{k}{n}-x\right|\right) \le K\left(1+\left|\frac{k}{n}-x\right|\sqrt{n}\right)\omega_{x_1,x_2}\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

于是, 由 Cauchy–Schwartz 不等式和 $V_n\left((t-x)^2,x\right)=\frac{x(1+x)}{n}$, 对于 $x\in[x_1,x_2]$, 有

$$
\begin{aligned}
|J_1| &\le K\Bigg(1+\sqrt{n}\sum_{k\in C_{n,x}}\left|\frac{k}{n}-x\right|\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\Bigg)\omega_{x_1,x_2}\Big(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\\
&\le K\big(1+\sqrt{x(1+x)}\big)\omega_{x_1,x_2}\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

由引理 2.6, 对于 $x\in[x_1,x_2]$, 有

$$
|J_2|\le \max_{x_1\le x\le x_2}|f(x)|\cdot\frac{A\max(x_2,x_2^3)}{\sqrt{n(x_1(1+x_1))^3}}. \tag{3.3}
$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\delta_n\sqrt{n}=C$ 和 $\lim_{n\to\infty}\delta_n'\sqrt{n}=C'$, 故有 $\lim_{n\to\infty}J_3=0$. 结合 (3.2) 和 (3.3), 可得 (1.1) 在区间 $[x_1,x_2]$ 上一致成立, 这里 $0<x_1<x_2<\infty$.

类似地, 当 $C>0$ 和 $C'>0$ 时, 可以证明 (1.1) 式在 $[x_1,x_2]$ 上也一致成立, 这里 $0\le x_1<x_2<\infty$. 定理 1.1 证毕.

下面给出定理 1.1 的两个推论:

推论 3.1 设 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\delta_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 是两个有界的正数序列, 且

$$
\lim_{n\to\infty}\delta_n\sqrt{n}=\infty \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty}\delta_n'\sqrt{n}=\infty,
$$

则对于 $f\in C[0,\infty)$, 极限

$$
\lim_{n\to\infty}V_{n,\delta_n,\delta_n'}(f,x)=f(x)
$$

在区间 $[x_1,x_2]$ 上一致成立, 这里 $0\le x_1<x_2<\infty$.

推论 3.2 设 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\delta_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 是两个有界的正数序列, 且 $\lim_{n\to\infty}\delta_n\sqrt{n}=C$ (C 为有限数) 和 $\lim_{n\to\infty}\delta_n'\sqrt{n}=\infty$, 则对于 $f\in C[0,\infty)$, 极限

$$
\lim_{n\to\infty}V_{n,\delta_n,\delta_n'}(f,x)=\frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{C}{\sqrt{x(1+x)}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}dt
$$

在区间 $[x_1,x_2]$ 上一致成立, 这里 $0\le x_1<x_2<\infty$. 当 $x=0$ 时, 认为 $\frac{C}{\sqrt{x(1+x)}}$ 为 ∞.

定理 1.2 的证明 从推论 3.1 立即可得 (2) $\Rightarrow$ (1). 接下来证明 (1) $\Rightarrow$ (2).

如果 $\lim_{n\to\infty}\delta_n\sqrt{n}\ne\infty$, 则 $\{\delta_n\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 中存在着子列 $\{\delta_{n_k}\sqrt{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得 $\lim_{k\to\infty}\delta_{n_k}\sqrt{n_k}=C_0$, 这里 C_0 是一个有限数. 现在考虑 $\{\delta_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{\delta_{n_k}'\}_{k=1}^{\infty}$. 如果 $\{\delta_{n_k}'\sqrt{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 C_0', 这里 C_0' 为有限数或 ∞, 则由定理 1.1, 有

$$
\lim_{k\to\infty}V_{n_k,\delta_{n_k},\delta_{n_k}'}(f,x_0)=\frac{f(x_0)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{C_0'}{\sqrt{x_0(1+x_0)}}}^{\frac{C_0}{\sqrt{x_0(1+x_0)}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}dt. \tag{3.4}
$$

显然, 如果 $f(x_0)\ne 0$, 则 (3.4) 式中的右边就不等于 $f(x_0)$. 如果 $\{\delta_{n_k}'\sqrt{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 不收敛, 则在 $\{\delta_{n_k}'\sqrt{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 中一定存在着一个收敛于有限数或 ∞ 的子列 $\{\delta_{n_j^*}'\sqrt{n_j^*}\}_{j=1}^{\infty}$. 同理, 对于 $f(x_0)\ne 0$, 则有

$$
\lim_{n\to\infty}V_{n,\delta_n,\delta_n'}(f,x_0)\ne f(x_0).
$$

定理 1.2 证毕.

下面给出定理 1.2 的一个推论:

推论 3.3 设两个正数序列 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\delta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不同时收敛于 ∞ 以及 $x_0\in(0,\infty)$, 则对于 $f\in C[0,\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} V_{n,\delta_n,\delta'_n}(f,x_0)=f(x_0)$$

蕴含着 $f(x_0)=0$.

定理 1.3 的证明 与引理 2.6 证明中记号相同以及类似的证法, 对于任意的 $\epsilon>0$, 在 (2.11) 中, 分别取 $M=\sqrt{n}C$ 和 $\sqrt{n}(C'+\epsilon)$, 便可得

$$\left|\sum_{k\in\Delta'_\epsilon}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{C'+\epsilon}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{C}{\sqrt{x(1+x)}}}\mathrm{e}^{-\frac12t^2}dt\right|\le\frac{18A\max(x,x^3)}{\sqrt{n}(\sqrt{x(1+x)}+\min(C,C'+\epsilon))^3},\quad(3.5)$$

这里 $\Delta'_\epsilon=\{k:k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $nx-\sqrt{n}(C'+\epsilon)<k\le nx+\sqrt{n}C\}$. 在 (3.5) 中, 令 $\epsilon\to0$, 则有

$$\left|\sum_{k\in A_{n,x}}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{C'}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{C}{\sqrt{x(1+x)}}}\mathrm{e}^{-\frac12t^2}dt\right|\le\frac{18A\max(x,x^3)}{\sqrt{n}(\sqrt{x(1+x)}+\min(C,C'))^3}.\quad(3.6)$$

对于 $f\in C[0,\infty)$ 和 $x\in(0,\infty)$, 可以写成

$$\begin{aligned}V_{n,C,C'}(f,x)-\frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{C'}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{C}{\sqrt{x(1+x)}}}\mathrm{e}^{-\frac12t^2}dt&=\sum_{k\in A_{n,x}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\\&\quad+f(x)\left(\sum_{k\in A_{n,x}}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{C'}{\sqrt{x(1+x)}}}^{\frac{C}{\sqrt{x(1+x)}}}\mathrm{e}^{-\frac12t^2}dt\right)\\&\equiv I_1+I_2.\end{aligned}$$

由 $\omega_{x,C,C'}(f,t)$ 的定义, 以及类似于 (3.1) 的性质, 有

$$|I_1|=O_{C,C'}(1)\omega_{x,C,C'}\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

又由 (3.6) 有 $|I_2|=O_{C,C'}(1)\frac{\|f\|_{x,C,C'}}{\sqrt{n}}$. 因此 (1.2) 成立. 定理 1.3 证毕.

致谢 本文的雏型是第一作者上海大学博士论文一部分, 在此向上海大学表示感谢. 同时感谢与周平教授的有益讨论.

参 考 文 献

[1] Ditzian Z., Totik V., Moduli of Smoothness, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1987.

[2] Grof J., Über approximation durch polynome mit Belegfunktionen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar,* 1980, **35**: 109–116.

[3] Gupta V., Tachev G., Approximation with Positive Linear Operators and Linear Combinations, Developments in Math., Vol. 50, Springer, Cham, 2017.

[4] Lehnhoff H. G., On a modified Szász–Mirakjan operator, *J. Approx. Theory,* 1984, **42**: 278–282.

[5] Omey E., Note on operators of Szász–Mirakjan type, *J. Approx. Theory,* 1986, **47**: 246–254.

[6] Petrov V. V., Limit Theorem of Sums of Independent Random Variables (in Russian), Moskow Nauka, Moskow, 1987.

[7] Sun X. H., On the convergence of the modified Szász–Mirakjan operator, *Approx. Theory and Its Appl.,* 1994, **10**: 20–25.

[8] Wang J. L., Zhou S. P., On the convergence of modified Baskakov operators, *Bull. Insti. Math. Acad. Sinica,* 2000, **28**: 117–123.

[9] Xie L. S., Xie T. F., Convergence of bi-shift localized Szász–Mirakjan operators, *Results in Math.,* 2019, **74**(4): Art. 198, 9pp.

[10] Zhou G. Z., Zhou S. P., A remark on a modified Szász-Mirakjan operator, *Colloq. Math.,* 1999, **79**: 157–160.