第64卷第2期 数学学报中文版 Vol.64, No.2
2021年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Mar., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)02-0255-06 **文献标识码:** A

非等熵气体动力学方程组大初值问题的放缩框架

刘树君

南京财经大学应用数学学院 南京 210023
E-mail: shujunliu@nuaa.edu.cn

摘 要 非等熵气体动力学系统 Cauchy 问题弱解全局存在性有两个公开问题: 一个是包含真空的小初值问题, 另一个是任意大初值问题. 本文通过引入一个放缩框架证明了上述两个问题的等价性, 即对于粘性消失解, 其包含真空小初值问题的一致 BV 估计蕴含着任意大初值问题弱解的全局存在性. 该放缩框架对大多数具有物理背景的双曲守恒律系统亦成立.

关键词 双曲守恒律; 非等熵气体动力学; 粘性消失解; 放缩框架
MR(2010) 主题分类 35L65, 35L67
中图分类 O175.2

A Scaling Framework for the Non-isentropic Gas Dynamics System with Large Initial Data

Shu Jun LIU

School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023*, P. R. China*
E-mail: *shujunliu@nuaa.edu.cn*

Abstract There are two open problems on the global existence results of non-isentropic gas dynamics. One is whether the weak solutions exist globally with small initial data containing vacuum, the other is whether the global existence results hold with arbitrary large initial data. By introducing a scaling framework, we give the equivalence of the two problems above. For vanishing viscosity solutions, the positive answer to the first question naturally implies the positive answer to the second one. And this scaling framework can be applied to most systems of conservation laws with physical background.

Keywords hyperbolic conservation laws; non-isentropic gas dynamics; vanishing viscosity method; scaling framework
MR(2010) Subject Classification 35L65, 35L67
Chinese Library Classification O175.2

收稿日期: 2019-08-23; 接受日期: 2020-06-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11872201); 江苏省高校自然科学基金资助项目 (19KJB110013)

1 引言

本文研究如下非等熵气体动力学系统

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + (\gamma-1)\rho e)_x = 0, \\ \left(\rho\left(e + \dfrac{1}{2}u^2\right)\right)_t + \left(\rho\left(e + \dfrac{1}{2}u^2\right)u + (\gamma-1)\rho e u\right)_x = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

带 $L^\infty \cap$ BV 有界初值

$$(\rho(x,0), u(x,0), e(x,0)) = (\rho_0(x), u_0(x), e_0(x)), \quad \rho_0(x) \geq 0, \quad e_0(x) \geq 0 \tag{1.2}$$

的 Cauchy 问题, 其中 ρ 是密度, u 是速度, e 是内能, $\gamma > 1$ 是绝热指数. (1.1) 中的三个方程分别描述了气体动力学中的质量守恒律, 动量守恒律和能量守恒律.

当物理学中的熵 $s = (1-\gamma)\log\rho + \log e$ 是常数时, 系统 (1.1) 简化为如下等熵气体动力学系统

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + A\rho^\gamma)_x = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 A 是常数.

系统 (1.3) 在 L^∞ 空间中全局弱解的存在性已被众多作者利用补偿列紧方法研究 [2, 4–7, 9, 10]. 当绝热指数 $\gamma = 1$ 时 BV 空间中的结果可以参看 Nishida 和 Smoller 的工作 [14, 15].

系统 (1.3) 在 L^∞ 空间中弱解的全局存在性结果都依赖于相应逼近系统的先验 L^∞ 估计. 然而对于非等熵系统 (1.1), 目前还没有类似的 L^∞ 估计结论. 其主要困难是系统 (1.1) 无法对角化, 故经典的不变区域定理 [3] 在此失效. 另一方面, 即使对于等熵系统 (1.3), 其初值含真空的全局 BV 解的存在性仍是一个公开问题, 这是因为在大多数主流的逼近格式中, 初等波在真空附近相互作用时会产生一个一阶增量, 这意味着著名的 Glimm 相互作用泛函及其各种版本的变体在真空附近失效.

本文给出系统 (1.1) 带真空的小初值问题和一般大初值问题的等价性.

在系统 (1.1) 的右端添加人工粘性项, 考虑如下抛物型逼近系统

$$\begin{cases} \rho_t^\varepsilon + (\rho^\varepsilon u^\varepsilon)_x = \varepsilon\rho_{xx}^\varepsilon, \\ (\rho^\varepsilon u^\varepsilon)_t + (\rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2 + (\gamma-1)\rho^\varepsilon e^\varepsilon)_x = \varepsilon(\rho^\varepsilon u^\varepsilon)_{xx}, \\ \left(\rho^\varepsilon\left(e^\varepsilon + \dfrac{1}{2}(u^\varepsilon)^2\right)\right)_t + \left(\rho^\varepsilon\left(e^\varepsilon + \dfrac{1}{2}(u^\varepsilon)^2\right)u^\varepsilon + (\gamma-1)\rho^\varepsilon e^\varepsilon u^\varepsilon\right)_x \\ \qquad = \varepsilon\left(\rho^\varepsilon\left(e^\varepsilon + \dfrac{1}{2}(u^\varepsilon)^2\right)\right)_{xx} \end{cases} \tag{1.4}$$

带光滑初值

$$(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon, e^\varepsilon)(x,0) = (\rho_0^\varepsilon(x), u_0^\varepsilon(x), e_0^\varepsilon(x)) = (\rho_0(x), u_0(x), e_0(x)) * j^\varepsilon \cdot \phi^\varepsilon(x) + (\varepsilon, 0, \varepsilon), \tag{1.5}$$

其中 $j^\varepsilon(x)$ 是支集在 $[-\varepsilon, \varepsilon]$ 上的光滑函数, $\phi^\varepsilon(x)$ 是支集在 $[-2/\varepsilon, 2/\varepsilon]$ 上的截断函数, 满足当 $x \in [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$ 时, $\phi^\varepsilon(x) = 1$.

易知 $(\rho_0^\varepsilon(x), u_0^\varepsilon(x), e_0^\varepsilon(x)$ 是 $L^\infty \cap$ BV 有界的, 且当 $\varepsilon \to 0$ 时,

$$(\rho_0^\varepsilon(x), u_0^\varepsilon(x), e_0^\varepsilon(x)) \to (\rho_0(x), u_0(x), e_0(x))$$

点点成立. 本文的主要结果如下:

定理 1.1 假设 Cauchy 问题 (1.4), (1.5) 对带真空小初值问题的粘性解有一致 BV 估计, 即假设存在常数 δ 充分小使得只要其初值满足

$$\mathrm{Tot.Var.}(\rho^{\varepsilon}(\cdot,0),u^{\varepsilon}(\cdot,0),e^{\varepsilon}(\cdot,0))\le\delta,\tag{1.6}$$

就能得到 Cauchy 问题 (1.4), (1.5) 的解也是 BV 有界的, 即

$$\mathrm{Tot.Var.}(\rho^{\varepsilon}(\cdot,t),u^{\varepsilon}(\cdot,t),e^{\varepsilon}(\cdot,t))\le C\cdot\mathrm{Tot.Var.}(\rho^{\varepsilon}(\cdot,0),u^{\varepsilon}(\cdot,0),e^{\varepsilon}(\cdot,0)),\tag{1.7}$$

其中 $C=C(\delta)$ 是依赖于 δ 但不依赖于 ε, t 的常数.

那么对一般的大初值问题, Cauchy 问题 (1.4), (1.5) 的粘性解也有一致 BV 估计, 即对任给的常数 $M>0$, 只要其初值满足有界变差条件

$$\mathrm{Tot.Var.}(\rho^{\varepsilon}(\cdot,0),u^{\varepsilon}(\cdot,0),e^{\varepsilon}(\cdot,0))\le M,\tag{1.8}$$

则 Cauchy 问题 (1.4), (1.5) 的粘性解全局存在, 且满足如下一致 BV 估计

$$\mathrm{Tot.Var.}(\rho^{\varepsilon}(\cdot,t),u^{\varepsilon}(\cdot,t),e^{\varepsilon}(\cdot,t))\le C\cdot\mathrm{Tot.Var.}(\rho^{\varepsilon}(\cdot,0),u^{\varepsilon}(\cdot,0),e^{\varepsilon}(\cdot,0)).\tag{1.9}$$

进一步, 存在 $\{(\rho^{\varepsilon},u^{\varepsilon},e^{\varepsilon})\}$ 的子列 (仍记作 $\{(\rho^{\varepsilon},u^{\varepsilon},e^{\varepsilon})\}$), 使得 $\rho^{\varepsilon}\to\rho$ 点点成立. 在区域 $\{(x,t):\rho(x,t)>0\}$ 上, $u^{\varepsilon}\to u$ 且 $e^{\varepsilon}\to e$ 点点成立. 特别地, $\rho^{\varepsilon}u^{\varepsilon}\to\rho u$ 且 $\rho^{\varepsilon}(e^{\varepsilon}+\frac12(u^{\varepsilon})^2)\to\rho(e+\frac12u^2)$. 其中极限函数 $(\rho,\rho u,\rho(e+\frac12u^2))$ 是 Cauchy 问题 (1.1), (1.2) 的粘性消失解.

定义 1.2 称函数 $(\rho,u,e)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^3)$ 是 Cauchy 问题 (1.1), (1.2) 的弱解, 如果对任意的试验函数 $\phi(x,t)\in C^1_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 成立

$$\begin{cases}\displaystyle\iint(\rho\phi_t+(\rho u)\phi_x)dxdt+\int\rho_0\phi dx=0,\\ \displaystyle\iint((\rho u)\phi_t+(\rho u^2+(\gamma-1)\rho e)\phi_x)dxdt+\int\rho_0u_0\phi dx=0,\\ \displaystyle\iint\left(\rho\left(e+\frac12u^2\right)\phi_t+\left(\rho\left(e+\frac12u^2\right)u+(\gamma-1)\rho eu\right)\phi_x\right)dxdt+\int\rho_0\left(e_0+\frac12u_0^2\right)\phi dx=0.\end{cases}\tag{1.10}$$

由定义 1.2 知, Cauchy 问题 (1.1), (1.2) 的粘性消失解一定是其弱解.

2 主要定理的证明

通过两个引理证明定理 1.1.

引理 2.1 在定理 1.1 的假设下, 一致 BV 估计 (1.9) 成立, 进而对固定的 $\varepsilon>0$, Cauchy 问题 (1.4), (1.5) 的粘性解全局存在.

证明 为表述简单起见, 暂时略去上标 ε.

注意到 $(\rho(x,t),u(x,t),e(x,t))$ 是 Cauchy 问题 (1.4), (1.5) 的解当且仅当对任意参数 $\lambda>0$,

$$(\rho^{\lambda}(x,t),u^{\lambda}(x,t),e^{\lambda}(x,t))=(\lambda\rho(\lambda x,\lambda^2t),\lambda u(\lambda x,\lambda^2t),\lambda^2e(\lambda x,\lambda^2t))\tag{2.1}$$

是系统 (1.4) 带如下放缩初值的解

$$\rho^{\lambda}(x,0),u^{\lambda}(x,0),e^{\lambda}(x,0))=(\lambda\rho_0(\lambda x),\lambda u_0(\lambda x),\lambda^2e_0(\lambda x)).\tag{2.2}$$

经简单计算可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tot.Var.}\{\rho^{\lambda}(\cdot,t),u^{\lambda}(\cdot,t)\}=\lambda\mathrm{Tot.Var.}\{\rho(\cdot,\lambda^2t),u(\cdot,\lambda^2t)\},\\&\mathrm{Tot.Var.}\{e^{\lambda}(\cdot,t)\}=\lambda^2\mathrm{Tot.Var.}\{e(\cdot,\lambda^2t)\}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

令 $\lambda=\delta/M$, 则放缩后的解 $(\rho^\lambda(x,0),u^\lambda(x,0),e^\lambda(x,0))$ 满足条件 (1.6), 由定理 1.1 的假设可知一致 BV 估计 (1.7) 对放缩后的解 $(\rho^\lambda(x,t),u^\lambda(x,t),e^\lambda(x,t))$ 成立, 这结合 (2.3) 可以得到一致 BV 估计 (1.9) 对原粘性解 $(\rho(x,t),u(x,t),e(x,t))$ 成立.

由文 [12, 定理 1.0.2] 可知, 对任给 $t>0$, $|x|\to\infty$ 时, $(\rho(x,t),u(x,t),e(x,t))\to(0,0,0)$, 故一致 BV 估计 (1.9) 蕴含着粘性解 $(\rho(x,t),u(x,t),e(x,t))$ 的先验一致 L^∞ 估计, 进而可得到粘性解的全局存在性. 证毕.

在证明粘性解序列的点点收敛性时, 需要用到著名的 Div-Curl 定理.

引理 2.2 [12] 设 $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 为有界开集, 可测函数序列 $(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon,u_3^\varepsilon,u_4^\varepsilon)$ 在 $L^2_{\rm loc}(\Omega;\mathbb{R}^4)$ 中弱收敛于 (u_1,u_2,u_3,u_4), 并且

$$\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x},\ \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial u_4^\varepsilon}{\partial x}\ \text{在}\ H^{-1}(\Omega)\ \text{中紧},$$

那么在分布意义下, $(u_1^\varepsilon u_4^\varepsilon-u_2^\varepsilon u_3^\varepsilon)\rightharpoonup(u_1u_4-u_2u_3)$.

引理 2.3 存在 $\{(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon,e^\varepsilon)\}$ 的子列使得 $\rho^\varepsilon\to\rho$ 点点成立, 且在区域 $\{(x,t):\rho(x,t)>0\}$ 上, $u^\varepsilon\to u$, $e^\varepsilon\to e$ 点点成立.

证明 我们用文 [13] 中将 Div-Curl 定理应用于非熵 — 熵流对的思想证明该引理.

在系统 (1.4) 第一个方程的两边同时乘以 $2\rho^\varepsilon$, 得

$$((\rho^\varepsilon)^2)_t+((\rho^\varepsilon)^2u^\varepsilon)_x+(\rho^\varepsilon)^2u_x^\varepsilon=\varepsilon((\rho^\varepsilon)^2)_{xx}-\varepsilon(\rho_x^\varepsilon)^2, \tag{2.4}$$

这意味着 $\varepsilon(\rho_x^\varepsilon)^2$ 是 $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 有界的. 这是因为 u_x^ε 是 $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 有界的, 且 ρ^ε, u^ε 是 $L^\infty_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 有界的. 故 $\varepsilon\rho_{xx}^\varepsilon\to0$ 在 $H^{-1}_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中成立, 即

$$\rho_t^\varepsilon+(\rho^\varepsilon u^\varepsilon)_x\ \ \text{在}\ H^{-1}_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)\ \text{中紧}, \tag{2.5}$$

注意到 ρ_x^ε 是 $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 有界的. 由 Murat 嵌入定理, ρ_x^ε 也在 $H^{-1}_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 将 Div-Curl 定理应用于如下函数对

$$(\rho^\varepsilon,\rho^\varepsilon u^\varepsilon),\ (C,\rho^\varepsilon),$$

其中 C 是常数. 我们得到 $(\rho^\varepsilon)^2\rightharpoonup\rho^2$, 这意味着 $\rho^\varepsilon\to\rho$ 点点成立, 其中 ρ 是 ρ^ε 的弱 * 极限.

类似地讨论可知

$$(\rho^\varepsilon u^\varepsilon)_t+(\rho^\varepsilon(u^\varepsilon)^2+(\gamma-1)\rho^\varepsilon e^\varepsilon)_x$$

和

$$\left(\rho^\varepsilon\left(e^\varepsilon+\frac12(u^\varepsilon)^2\right)\right)_t+\left(\rho^\varepsilon\left(e^\varepsilon+\frac12(u^\varepsilon)^2\right)u^\varepsilon+(\gamma-1)\rho^\varepsilon e^\varepsilon u^\varepsilon\right)_x$$

均在 $H^{-1}_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 中紧. 将 Div-Curl 定理应用于如下两个函数对

$$\big(\rho^\varepsilon u^\varepsilon,\ \rho^\varepsilon(u^\varepsilon)^2+(\gamma-1)\rho^\varepsilon e^\varepsilon\big),\ \big(C,\rho^\varepsilon u^\varepsilon\big),$$
$$\left(\rho^\varepsilon\left(e^\varepsilon+\frac12(u^\varepsilon)^2\right),\rho^\varepsilon\left(e^\varepsilon+\frac12(u^\varepsilon)^2\right)u^\varepsilon+(\gamma-1)\rho^\varepsilon e^\varepsilon u^\varepsilon\right),\ \left(C,\rho^\varepsilon\left(e^\varepsilon+\frac12(u^\varepsilon)^2\right)\right),$$

我们有

$$\overline{\rho^\varepsilon(u^\varepsilon-u)^2}=0,\quad \overline{\rho^\varepsilon(e^\varepsilon-e)^2}=0, \tag{2.6}$$

其中 u, e 分别是 u^ε, e^ε 的弱 * 极限, 且 $\overline{f}$ 是 f^ε 的弱 * 极限. 由于 $\rho^\varepsilon\to\rho$ 点点成立, 故 (2.6) 可等价地写为

$$\rho\cdot\overline{(u^\varepsilon-u)^2}=0,\quad \rho\cdot\overline{(e^\varepsilon-e)^2}=0. \tag{2.7}$$

由 (2.7) 知, 在区域 $\{(x,t):\rho(x,t)>0\}$ 上, $u^\varepsilon\to u$ 且 $e^\varepsilon\to e$ 点点成立. 而在区域 $\{(x,t):\rho(x,t)=0\}$ 上, 由于 $\rho^\varepsilon\to 0$, 此时无论 $(u^\varepsilon,e^\varepsilon)$ 是否点点收敛, 都有

$$\rho^\varepsilon u^\varepsilon\to\rho u\quad \text{且}\quad \rho^\varepsilon\left(e^\varepsilon+\frac{1}{2}(u^\varepsilon)^2\right)\to\rho\left(e+\frac{1}{2}u^2\right).$$

证毕.

注 2.4 放缩框架 (2.1) 对绝大多数具有物理背景的守恒律系统都成立. 方便起见暂时省略上标 ε.

(1) $n\times n$ 二次流系统

$$u_{it}+\left(\sum_{j,k=1}^{n}a_{ijk}u_ju_k\right)_x=\varepsilon u_{ixx},\quad i=1,\dots,n, \tag{2.8}$$

其中 a_{ijk} 是常数, 其相应的放缩框架为

$$u_i^\lambda(x,t)=\lambda u_i(\lambda x,\lambda^2t),\quad i=1,\dots,n.$$

(2) LeRoux 型系统

$$\begin{cases}u_t+(u^2+v)_x=\varepsilon u_{xx},\\ v_t+(uv)_x=\varepsilon v_{xx},\end{cases} \tag{2.9}$$

其相应的放缩框架为

$$u^\lambda(x,t)=\lambda u(\lambda x,\lambda^2t),\quad v^\lambda(x,t)=\lambda^2v(\lambda x,\lambda^2t).$$

(3) 欧拉坐标下的等熵气体动力学系统

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=\varepsilon\rho_{xx},\\ (\rho u)_t+(\rho u^2+\rho^\gamma)_x=\varepsilon(\rho u)_{xx},\end{cases} \tag{2.10}$$

其中 $\gamma>1$ 是常数, 其相应的放缩框架为

$$\rho^\lambda(x,t)=\lambda^{\frac{2}{\gamma-1}}\rho(\lambda x,\lambda^2t),\quad u^\lambda(x,t)=\lambda u(\lambda x,\lambda^2t).$$

(4) 拉格朗日坐标下的等熵气体动力学系统

$$\begin{cases}v_t-u_x=\varepsilon v_{xx},\\ u_t+(v^{-\gamma})_x=\varepsilon u_{xx},\end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $\gamma>1$ 是常数, 其相应的放缩框架为

$$v^\lambda(x,t)=\lambda^{-\frac{2}{\gamma+1}}v(\lambda x,\lambda^2t),\quad u^\lambda(x,t)=\lambda^{-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}u(\lambda x,\lambda^2t).$$

注 2.5 Jessen [8] 曾给出一个严格双曲系统的反例, 其小初值全局存在. 但是对于大初值, 无论是在 L^∞ 空间还是 BV 空间, 其弱解都会在有限时间内发生爆破. 该反例对应的粘性系统为

$$\begin{cases}u_t+(uv+w)_x=\varepsilon w_{xx},\\ v_t+\left(\dfrac{1}{16}v^2\right)_x=\varepsilon v_{xx},\\ w_t+(u-uv^2-vw)_x=\varepsilon w_{xx}.\end{cases} \tag{2.12}$$

简单计算可知, 放缩框架 (2.1) 在此失效, 故我们猜测放缩框架 (2.1) 阻止了定理 1.1 和注 2.4 中系统的弱解在有限时间内的爆破.

注 2.6 Bressan 及其合作者 [1] 已经证明, 对于远离真空的小初值问题, 其粘性消失解的全局一致 BV 估计 (1.7) 成立. 然而对于含真空的小初值问题, 其逼近解的全局 BV 一致估计是否成立仍是一个公开问题. Liu [11] 指出, 在真空附近初等波的相互作用会产生一个一阶增量, 导致 Glimm 二次泛函失效, 这意味着目前主流的逼近格式都难以有效地处理真空附近初等波的相互作用估计.

致谢 感谢导师陆云光先生对本文的悉心指导及南京财经大学培育计划的支持.

参 考 文 献

[1] Bianchini S., Bressan A., Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems, *Annals of Mathematics*, 2005, **161**(1): 223–342.
[2] Chen G. Q., Convergence of the Lax–Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics, *Acta Math. Sci.*, 1986, **6**: 75–120.
[3] Chueh K. N., Conley C. C., Smoller J. A., Positive invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations, *Indiana Univ. Math. J.*, 1977, **26**: 372–411.
[4] Ding X. X., Chen G. Q., Luo P. Z., Convergence of the Lax–Friedrichs schemes for the isentropic gas dynamics I–II, *Acta Math. Sci.*, 1985, **5**: 415–432; 433–472.
[5] Ding X. X., Chen G. Q., Luo P. Z., Convergence of the fractional step Lax–Friedrichs scheme and Godunov scheme for the isentropic system of gas dynamics, *Comm. Math. Phys.*, 1989, **121**: 63–84.
[6] Diperna R. J., Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics, *Comm. Math. Phys.*, 1983, **91**: 1–30.
[7] Huang F., Wang Z., Convergence of viscosity solutions for isothermal gas dynamics, *SIAM J. Math. Anal.*, 2002, **34**: 595–610.
[8] Jessen H. K., Blowup for systems of conservation laws, *SIAM J. Math. Anal.*, 2000, **31**(4): 894–908.
[9] Lions P. L., Perthame B., Souganidis P. E., Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1996, **49**: 599–638.
[10] Lions P. L., Perthame B., Tadmor E., Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems, *Comm. Math. Phys.*, 1994, **163**: 415–431.
[11] Liu T. P., The Riemann problem for general systems of conservation laws, *J. Diff. Eqs.*, 1975, **18**(1): 218–234.
[12] Lu Y. G., Hyperbolic conservation laws and the compensated compactness method, Chapman Hall/CRC Press, 2003.
[13] Lu Y. G., Existence of global bounded weak solutions to nonsymmetric systems of Keyfitz-Kranzer type, *J. Funct. Anal.*, 2011, **26**(10): 2797–2815.
[14] Nishida T., Global solution for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system, *Proc. Japan. Acad.*, 1968, **44**(7): 642–646.
[15] Nishida T., Smoller J. A., Solutions in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1973, **26**(2): 183–200.