第65卷第5期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.65, No.5
2022年9月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES　　Sep., 2022

DOI: 10.12386/A20210021　　**文献标识码: A**

集值映射的 (C,ε)- 超次微分和集值优化问题的最优性条件

周志昂　杨　爽

重庆理工大学理学院 重庆 400054
E-mail: zhi_ang@163.com; yangshuang391517@163.com

摘　要　本文研究了集值映射的 (C,ε)- 超次微分. 首先, 引进了集合的 (C,ε)- 超有效点, 呈现了 (C,ε)- 超有效点的一些性质和等价刻画, 在 (C,ε)- 超有效性意义下, 获得了集值优化问题的标量化定理. 其次, 定义了集值映射的 (C,ε)- 超次微分, 研究了 (C,ε)- 超次微分的存在条件, 建立了用 (C,ε)- 超次微分刻画的 Moreau–Rockafellar 定理. 最后, 作为应用, 建立了涉及 (C,ε)- 超次微分的集值优化问题的最优性条件. 本文获得的结果统一和推广了一些文献中用超次微分或 ε- 超次微分刻画的结果.

关键词　集值映射; 近似 (C,ε)- 次似凸; (C,ε)- 超次微分; 最优性条件
MR(2010) 主题分类　90C29
中图分类　O221.6

(C,ε)-Super Subdifferentials of Set-Valued Maps and Optimality Conditions for Set-Valued Optimization Problems

Zhi Ang ZHOU　　Shuang YANG

College of Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, P. R. China
E-mail: *zhi_ang@163.com*; *yangshuang391517@163.com*

Abstract　In this paper, we study (C,ε)-super subdifferentials of set-valued maps. First, we introduce a notion of (C,ε)-super efficient point of a set. Some properties and equivalent characterizations of the (C,ε)-super efficient points are presented. Scalarization theorems of the set-valued optimization problem are obtained in the sense of (C,ε)-super efficiency. Second, we define (C,ε)-subdifferentials of set-valued maps and research the existence conditions of (C,ε)-subdifferentials. Moreau–Rockafellar type theorems characterized by (C,ε)-subdifferentials are also established. Finally, as the applications, we establish some optimality conditions of the set-valued optimization problem involving the (C,ε)-super subdifferentials. The results obtained in this paper unify and generalize some results characterized by the super subdifferentials or ε-super subdifferentials of the set-valued maps in the literature.

收稿日期: 2021-02-01; 接受日期: 2021-06-24
基金项目: 国家自然科学基金 (12171061, 11861002); 重庆市教委科学技术研究计划 (KJZD-K202001104)
通讯作者: 周志昂

Keywords set-valued maps; nearly (C,ε)-subconvexlike; (C,ε)-super subdifferentials; optimality conditions

MR(2010) Subject Classification 90C29

Chinese Library Classification O221.6

1 引言

在经济分析、最优控制和军事策略中, 存在一些目标映射或约束映射是集值映射的优化问题, 我们称这类涉及集值映射的优化问题为集值优化问题. 在优化理论中, 集值优化问题的解是一个重要的课题. 然而, 一些学者认为集值优化问题有效解或弱有效解构成的集合太大, 导致它们的性质不好. 为了克服这个缺陷, 引进了集值优化问题不同类型的真有效解. 同时, 在真有效性 (见文 [11, 20]) 意义下, 也建立了一些最优性条件.

近来, 为了建立集值优化问题的最优性条件, 一些学者 [10, 14, 16, 22] 用有效点、弱有效点和真有效点引进了不同类型的集值映射的次微分. 另一方面, 由于寻找集值优化问题的精确解通常是非常困难的, 因此, 一些学者尽力寻找集值优化问题的近似解, 并用近似解逼近精确解. 如戎卫东和武育楠 [13] 引进了集值优化问题的 ε- 弱有效元, 建立了标量化定理、Lagrangian 乘子定理、鞍点定理和对偶定理. 在实序线性空间中, 周志昂等人 [24, 26] 定义了集值优化问题的 ε-Henig 真有效元和 ε- 超有效元, 获得了一系列最优性条件.

利用近似解, 一些学者定义了新的集值映射次微分. Taa [17] 和 Tuan [19] 分别引进了集值映射的 ε- 弱次微分和 ε-Benson 真次微分. 周志昂等人 [25] 定义了集值映射的 ε- 严次微分, 建立了集值映射的 Moreau–Rockafellar 定理. 近来, Gutiérvez 等人 [6, 7] 研究了向量优化问题的真近似解和近似次微分, 包括基本性质、极限行为和 Moreau–Rockafellar 定理. 在 Attouch–Brézis 规格下, Taa [18] 形成了两个集值映射的和的 (ε,e)- 弱次微分和 (ε,e)-Benson 真次微分的一般形式.

受文 [6–8, 17–19, 25] 的启发, 我们引进了集值映射的 (C,ε)- 超次微分. 本文第 2 节给出了一些预备知识, 包括新的集值映射的近似 (C,ε)- 次似凸. 第 3 节在文 [8] 的基础上, 引进了 (C,ε)-超有效点、(C,ε)-Henig 真有效点和 (C,ε)- 强有效点, 获得了这些近似真有效点的性质. 第 4 节在局部凸空间中, 给出了 (C,ε)- 超有效点的标量化. 第 5 节研究了集值映射 (C,ε)- 超次微分的存在性, 建立了 Moreau–Rockafellar 定理. 第 6 节, 作为应用, 我们获得了用 (C,ε)- 超次微分描述的集值优化问题的最优性条件.

2 预备知识

令 X 是拓扑向量空间, Y 和 Z 是两个实的序 Hausdorff 局部凸拓扑向量空间. X,Y 和 Z 的拓扑对偶分别记为 X^*,Y^* 和 Z^*. 对于集合 $D\subseteq Y$, 用 $\operatorname{int} D$ 和 $\operatorname{cl} D$ 分别表示 D 的内部和闭包. 设集合 $D\subseteq Y$, 记

$$\operatorname{cone} D := \{\alpha d \,|\, \alpha\geq 0,\ d\in D\}.$$

D 称为 Y 中的一个凸锥当且仅当对任意的 $d_1,d_2\in D$ 和 $\alpha\geq 0$, $\alpha d_1+(1-\alpha)d_2\in D$. Y 中锥 D 称为是点的当且仅当 $D\cap(-D)=\{0\}$. Y 中锥 D 称为非平凡的当且仅当 $D\neq\{0\}$ 和 $D\neq Y$. 现在, 假设 D 和 K 分别是 Y 和 Z 中内部非空的非平凡点闭凸锥. $N(0)$ 代表 Y 中所有对称凸

零邻域构成的集合. D 的正极锥和严格正极锥分别定义为

$$D^+ := \{y^* \in Y^* \,|\, \langle d, y^*\rangle \geq 0,\ \forall\, d \in D\} \ \text{ 和 }\ D^{S+} := \{y^* \in Y^* \,|\, \langle d, y^*\rangle > 0,\ \forall\, d \in D \setminus \{0\}\}.$$

$\mathbb{R}^p$ 的非负象限表示为 $\mathbb{R}^p_+$. 记 $\mathbb{R}_+ := \mathbb{R}^1_+$. 对每个非空集合 $C \subseteq D \setminus \{0\}$, 定义集值映射 $C : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows D$ 如下:

$$C(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon C, & \varepsilon > 0, \\ \operatorname{cone} C, & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

定义 2.1[5] D 的凸子集 B 称为 D 的基当且仅当 $D = \operatorname{cone} B$, $0 \notin \operatorname{cl} B$.

从现在开始, 假设 B 是 D 的有界基. 令 $\varphi \in Y^*$, $r > 0$, 记 $V_B := \{y \in Y \,|\, |\langle y, \varphi\rangle| < \frac{r}{2}\}$ 和 $B^{\mathrm{st}} := \{y^* \in Y^* \,|$ 存在 $t > 0$, 使得 $\langle b, y^*\rangle \geq t,\ \forall\, b \in B\}$. 显然, $V_B \in N(0)$. 对 Y 中任意 $U \in N(0)$, 记 $C_U(B) := \operatorname{cone}(U + B)$.

令 A 是 X 中非空子集, $F : A \rightrightarrows Y$ 是 A 上的集值映射. 记 $F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x)$, $\operatorname{dom} F := \{x \in X \,|\, F(x) \neq \emptyset\}$, $\operatorname{gr} F := \{(x, y) \in X \times Y \,|\, y \in F(x)\}$ 和 $\operatorname{epi} F := \{(x, y) \in X \times Y \,|\, y \in F(x) + D\}$.

定义 2.2[4] 令 A 是 X 中非空凸子集. 集值映射 $F : X \rightrightarrows Y$ 在 A 上称为 D- 凸的当且仅当

$$\alpha F(x_1) + (1-\alpha) F(x_2) \subseteq F(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) + D, \quad \forall\, x_1, x_2 \in A, \quad \alpha \in]0, 1[.$$

定义 2.3 [21] 令 A 是 X 中非空子集. 集值映射 $F : X \rightrightarrows Y$ 在 A 上称为近似 D- 次似凸的当且仅当 $\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(F(A) + D))$ 是 Y 中凸子集.

当 $f : X \to Y$ 是一个向量值映射时, Gutiérrez 等人 [8] 引进了 f 的近似 (C,ε)- 次似凸. 受文 [8, 定义 2.3] 的启发, 我们引进集值映射的的近似 (C,ε)- 次似凸.

定义 2.4 令 A 是 X 中的非空子集, $C \subseteq D \setminus \{0\}$, $\varepsilon \geq 0$. 集值映射 $F : X \rightrightarrows Y$ 在 A 上称为近似 (C,ε)- 次似凸的当且仅当 $\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(F(A) + C(\varepsilon)))$ 是 Y 中凸子集.

注 2.5 既然 $\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(F(A) + D \setminus \{0\})) = \operatorname{cl}(\operatorname{cone}(F(A) + D))$, 因此, 当 $C = D \setminus \{0\}$, $\varepsilon = 1$ 时, 定义 2.4 退化为定义 2.3. 然而, 下面的例子表明集值映射的近似 (C,ε)- 次似凸不蕴含近似 D- 次似凸. 因此, 集值映射的近似 (C,ε)- 次似凸是近似 D- 次似凸的真推广.

例 2.6 令 $X := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}^2$, $D := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$, $C := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0.5,\ x_2 \geq 0\}$, $\varepsilon = 2$ 和 $A := [-1, 1]$. 集值映射 $F : A \rightrightarrows Y$ 定义如下:

$$F(x_1) = \begin{cases} \{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ -1 \leq x_2 \leq 1\}, & x_1 \in [0, 1], \\ \{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}, & x_1 \in [-1, 0[. \end{cases}$$

容易验证 F 在 A 上是近似 $(C, 2)$- 次似凸的. 然而, F 在 A 上不是近似 D- 次似凸的.

3 几类新的真 (弱) 有效点

本节将研究几类新的真 (弱) 有效点, 给出它们之间的关系.

定义 3.1 令 M 是 Y 的非空子集, $C \subseteq D \setminus \{0\}$, $\varepsilon \geq 0$. $y_0 \in M$ 称为 M 的 (C,ε)- 弱有效点 (记为 $y_0 \in \mathrm{We}(M, C, \varepsilon)$) 当且仅当 $(M + C(\varepsilon) - y_0) \cap (-\operatorname{int} D) = \emptyset$.

定义 3.2 令 M 是 Y 的非空子集, $C \subseteq D \setminus \{0\}$, $\varepsilon \geq 0$. $y_0 \in M$ 称为 M 的 (C,ε)- 有效点 (记为 $y_0 \in \mathrm{E}(M, C, \varepsilon)$) 当且仅当 $(M + C(\varepsilon) - y_0) \cap (-D \setminus \{0\}) = \emptyset$.

注 3.3 显然, 定义 3.2 蕴含定义 3.1. 然而, 下面的例子表明定义 3.1 不蕴含定义 3.2.

例 3.4 令 $Y:=\mathbb{R}^2$, $M:=\{(x_1,x_2)\,|\,-2\le x_1\le -1,\ x_2\ge 0\}$, $D:=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\}$, $C:=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1\ge \frac{1}{2},\ x_2\ge 0\}$, $\varepsilon=\frac{1}{4}$, $y_0=(0,0)$. 容易验证, $y_0\in \mathrm{We}(M,C,\varepsilon)$. 然而, $y_0\notin \mathrm{E}(M,C,\varepsilon)$. 因此, 定义 3.1 不蕴含定义 3.2.

现在, 回顾集合的 (C,ε)-Benson 真有效点的定义.

定义 3.5 [8] 设 M 是 Y 的非空子集, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\ge 0$. $y_0\in M$ 称为 M 的 (C,ε)-Benson 真有效点 (记为 $y_0\in \mathrm{Be}(M,C,\varepsilon)$) 当且仅当 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0))\cap(-D)=\{0\}$.

注 3.6 显然, 定义 3.5 蕴含定义 3.2. 然而, 下面的例子表明定义 3.2 不蕴含定义 3.5.

例 3.7 令 $Y:=\mathbb{R}^2$, $M:=\{(x_1,x_2)\,|\,-3\le x_1\le -2,\ x_2\ge -1\}$, $D:=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\}$, $C:=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1>\frac{1}{4},\ x_2>\frac{1}{2}\}$, $\varepsilon=2$, $y_0=(-2,0)$. 容易验证 $y_0\in \mathrm{E}(M,C,\varepsilon)$. 然而, $y_0\notin \mathrm{Be}(M,C,\varepsilon)$. 因此, 定义 3.2 不蕴含定义 3.5.

受定义 3.5 的启发, 引进集合的 (C,ε)-Henig 有效点和 (C,ε)- 超有效点.

定义 3.8 令 M 是 Y 的非空子集, $C\subseteq D\setminus\{0\},\varepsilon\ge 0$. $y_0\in M$ 称为 M 的 (C,ε)-Henig 真有效点 (记为 $y_0\in \mathrm{He}(M,C,\varepsilon)$) 当且仅当存在 $U\in N(0)$, 使得 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0))\cap(-C_U(B))=\{0\}$.

注 3.9 在定义 3.8 中, $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0))\cap(-C_U(B))=\{0\}$ 能够用 $\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0))\cap(-C_U(B))=\{0\}$ 替代.

注 3.10 既然 $D\subseteq C_U(B)$, 由定义 3.8 知 $\mathrm{He}(M,C,\varepsilon)\subseteq \mathrm{Be}(M,C,\varepsilon)$. 由文 [12, 例 3.1], 即使 B 是 D 的有界基, 包含关系 $\mathrm{Be}(M,C,\varepsilon)\subseteq \mathrm{He}(M,C,\varepsilon)$ 也不成立.

定义 3.11 令 M 是 Y 的非空子集, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\ge 0$. $y_0\in M$ 称为 M 的 (C,ε)- 超有效点 (记为 $y_0\in \mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$) 当且仅当对任意的 $V\in N(0)$, 存在 $U\in N(0)$, 使得 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0))\cap(U-D)\subseteq V$.

注 3.12 (i) 如果 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}\,C)=D$, 则定义 3.11 退化为文 [23, 定义 2.2]; (ii) 如果 $\varepsilon=1$, C 是一个单点集, 则定义 3.11 退化为文 [24, 定义 2.5]; (iii) $y_0\in \mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$ 当且仅当对任意的 $V\in N(0)$, 存在 $U\in N(0)$, 使得 $\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0)\cap(U-D)\subseteq V$.

定理 3.13 令 M 是 Y 的非空子集, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\ge 0$. 如果 B 是 D 的有界基, 则

$$\mathrm{He}(M,C,\varepsilon)=\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon). \tag{3.1}$$

证明 首先, 我们在 $N(0)$ 上定义偏序如下:

$$W_1,W_2\in N(0),\quad W_1\succeq W_2\Leftrightarrow W_1\subseteq W_2. \tag{3.2}$$

现在证明 $\mathrm{He}(M,C,\varepsilon)\subseteq \mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$. 设 $y_0\in \mathrm{He}(M,C,\varepsilon)$. 因此, 存在满足 $W\subseteq V_B$ 的 $W\in N(0)$, 使得

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(M+C(\epsilon)-y_0))\cap(-C_W(B))=\{0\}. \tag{3.3}$$

既然 $0\notin \mathrm{cl}B$, 由 (3.3) 有

$$\mathrm{cone}(M+C(\epsilon)-y_0)\cap(W-B)=\emptyset. \tag{3.4}$$

假设 $y_0\notin \mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$, 则存在 $V\in N(0)$, 使得

$$\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0)\cap(U-D)\nsubseteq V,\quad \forall U\succeq V, \tag{3.5}$$

其中, $U \in N(0)$, $N(0)$ 上的偏序 $\succeq$ 由 (3.2) 式定义. 由 (3.5) 存在 $\lambda_U > 0$, $z_U \in M + C(\varepsilon) - y_0$, $a_U \in U$, $\sigma_U \geq 0$ 和 $b_U \in B$, 使得

$$\lambda_U z_U = a_U - \sigma_U b_U \notin V, \quad \forall U \succeq V. \tag{3.6}$$

既然 $a_U \in U$, 由 (3.6) 知 $\sigma_U > 0$, $\forall U \succeq V$. 显然, 存在 $V' \in N(0)$, 使得

$$V' - V' \subseteq V. \tag{3.7}$$

因为 B 是有界的, 则存在 $\lambda > 0$, 使得

$$\lambda B \subseteq V'. \tag{3.8}$$

由 $\lim a_U = 0$ 知, 存在 $U_1 \in N(0)$, 使得

$$a_U \in V', \quad \forall U \succeq U_1. \tag{3.9}$$

我们断言 $\beta := \inf\{\sigma_U \,|\, U \in N(0), U \subseteq U_1 \cap V\} > 0$. 否则, $\beta = 0$. 因此, 存在满足 $U_2 \subseteq U_1 \cap V$ 的 $U_2 \in N(0)$, 使得

$$0 \leq \sigma_{U_2} < \lambda. \tag{3.10}$$

由 (3.7)–(3.10) 得

$$a_{U_2} - \sigma_{U_2} b_{U_2} \in V' - \frac{\sigma_{U_2}}{\lambda}(\lambda b_{U_2}) \subseteq V' - \frac{\sigma_{U_2}}{\lambda} V' \subseteq V' - V' \subseteq V,$$

这与 (3.6) 矛盾. 因此 $\beta > 0$.

另一方面, 存在 $U_3 \in N(0)$ 和 $\gamma > 0$, 使得 $\frac{1}{\beta} < \gamma$, $\gamma U_3 \subseteq W$. 由 $\lim a_U = 0$ 知存在 $U_4 \in N(0)$, 使得 $a_U \in U_3$, $\forall U \succeq U_4$. 显然, $a_U \in U_3$, $\forall U \succeq U_1 \cap U_4 \cap V$. 这样, 我们获得

$$\frac{1}{\sigma_U} a_U \in \frac{1}{\sigma_U} U_3 \subseteq \frac{1}{\beta} U_3 \subseteq \gamma U_3, \quad \forall U \succeq U_1 \cap U_4 \cap V. \tag{3.11}$$

据 (3.6) 和 (3.11), 便有

$$\frac{\lambda_U}{\sigma_U} z_U = \frac{1}{\sigma_U} a_U - b_U \in \gamma U_3 - B \subseteq W - B, \quad \forall U \succeq U_1 \cap U_4 \cap V.$$

因此,

$$\frac{\lambda_U}{\sigma_U} z_U \in \operatorname{cone}(M + C(\varepsilon) - y_0) \cap (W - B), \quad \forall U \succeq U_1 \cap U_4 \cap V,$$

这与 (3.4) 矛盾. 因此, $\operatorname{He}(M, C, \varepsilon) \subseteq \operatorname{Se}(M, C, \varepsilon)$.

最后证明 $\operatorname{Se}(M, C, \varepsilon) \subseteq \operatorname{He}(M, C, \varepsilon)$. 既然 B 是 D 的基, 则 $0 \notin \operatorname{cl} B$. 因此, 存在 $V \in N(0)$, 使得

$$(-B) \cap (V + V) = \emptyset. \tag{3.12}$$

设 $y_0 \in \operatorname{Se}(M, C, \varepsilon)$. 对上述 V, 存在满足 $U \subseteq V \cap V_B$ 的 $U \in N(0)$, 使得

$$\operatorname{cone}(M + C(\varepsilon) - y_0) \cap (U - D) \subseteq V. \tag{3.13}$$

由 (3.12) 有

$$(V - B) \cap V = \emptyset. \tag{3.14}$$

据 (3.13) 和 (3.14), 获得

$$\operatorname{cone}(M + C(\varepsilon) - y_0) \cap (U - B) \subseteq V \cap (V - B) = \emptyset. \tag{3.15}$$

(3.15) 表明

$$\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0)\cap(-C_U(B))=\{0\},\tag{3.16}$$

这意味着 $y_0\in \mathrm{He}(M,C,\varepsilon)$. 因此, $\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)\subseteq \mathrm{He}(M,C,\varepsilon)$. 证毕.

注 3.14 从定理 3.13 的证明看出, 当 B 不必有界时, $\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)\subseteq \mathrm{He}(M,C,\varepsilon)$. 然而, 当 B 有界时, $\mathrm{He}(M,C,\varepsilon)\subseteq \mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$.

在合适的假设下, 我们将表明 $\mathrm{He}(M,C,\varepsilon)=\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)=\mathrm{Be}(M,C,\varepsilon)$.

定理 3.15 令 B 是 D 的一个基, M 是 Y 的非空子集, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\geq 0$. 假设下列条件成立:

(i) $M+C(\varepsilon)$ 是 Y 中凸集;

(ii) B 是弱紧的,

则 $\mathrm{He}(M,C,\varepsilon)=\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)=\mathrm{Be}(M,C,\varepsilon)$.

证明 既然 B 是弱紧的, 则 B 是有界的. 由注 3.10 和定理 3.13, 仅仅需要证明 $\mathrm{Be}(M,C,\varepsilon)\subseteq \mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$. 设 $y_0\in \mathrm{Be}(M,C,\varepsilon)$. 假设 $y_0\notin \mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$, 则存在 $V\in N(0)$, 使得

$$\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0)\cap(U-D)\nsubseteq V,\quad \forall U\in N(0).\tag{3.17}$$

由 (3.17), 存在 $\alpha_U\geq 0$, $m_U\in M$, $q_U\in C(\varepsilon)$, $a_U\in U$, $\beta_U\geq 0$, $b_U\in B$, 使得

$$\alpha_U(m_U+q_U-y_0)=a_U-\beta_U b_U\notin V,\quad \forall U\in N(0).\tag{3.18}$$

显然, $a_U\to 0$. 既然网 $\{\beta_U\}$ 是下有界的, 不妨假设 $\beta_U\to\beta$. 由 (3.18) 知 $\beta>0$. 由条件 (ii), $\{b_U\}$ 有一个弱收敛的子网. 不妨假设 $b_U\xrightarrow{w} b$. 由 (3.18) 知

$$\frac{\alpha_U}{\beta_U}(m_U+q_U-y_0)=\frac{1}{\beta_U}a_U-b_U\xrightarrow{w}-b\neq 0.\tag{3.19}$$

另一方面, 由条件 (i) 知 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0))$ 是闭凸集. 因此, $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0))$ 是弱闭的. 由 (3.19) 知 $-b\in \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y_0))\cap(-C)$, 这与 $y_0\in \mathrm{Be}(M,C,\varepsilon)$ 矛盾. 因此, $\mathrm{He}(M,C,\varepsilon)=\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)=\mathrm{Be}(M,C,\varepsilon)$. 证毕.

注 3.16 从定理 3.15 的证明看出, 条件 (i) 和 (ii) 能用 B 是紧的替代.

定义 3.17 [5] 偏序拓扑向量空间 (Y,D) 是正规的当且仅当存在零邻域基 $\mathscr{V}$, 使得对任意的 $V\in\mathscr{V}$, $V=(V-D)\cap(D-V)$.

引理 3.18 [2] 如果 Y 是一个局部凸空间, D 有有界基, 则 D 是正规的.

命题 3.19 设 B 是 D 的有界基, M 是 Y 的非空子集, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\geq 0$, 则 $\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)=\mathrm{Se}(M,C+D,\varepsilon)$.

证明 既然 $C\subseteq C+D$, 有

$$\mathrm{Se}(M,C+D,\varepsilon)\subseteq \mathrm{Se}(M,C,\varepsilon).\tag{3.20}$$

下面证明

$$\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)\subseteq \mathrm{Se}(M,C+D,\varepsilon).\tag{3.21}$$

如果 $\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)=\emptyset$, 那么 (3.21) 成立. 现在假设 $\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)\neq\emptyset$. 令 $V\in N(0)$ 是任意给定的邻域. 则存在 $U_1\in N(0)$, 使得

$$U_1\subseteq V.\tag{3.22}$$

设 $y\in \mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$. 由注 3.12 (iii), 对上述 U_1, 存在满足条件 $U\subseteq U_1$ 的 $U\in N(0)$, 使得

$$\mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y)\cap(U-D)\subseteq U_1. \tag{3.23}$$

令

$$y_1\in \mathrm{cone}(M+(C+D)(\varepsilon)-y)\cap(U-D). \tag{3.24}$$

情形 1 $\varepsilon>0$. 由 (3.24) 有

$$y_1\in \mathrm{cone}(M+\varepsilon C+D-y)\cap(U-D). \tag{3.25}$$

由 (3.25) 知, 存在 $\alpha\geq 0$, $m\in M$, $c\in C$, $d_1\in D$, $d_2\in D$, 使得

$$y_1=\alpha(m+\varepsilon c+d_1-y) \tag{3.26}$$

和

$$y_1+d_2\in U. \tag{3.27}$$

由 (3.26) 和 (3.27) 有

$$\alpha(m+\varepsilon c+d_1-y)+d_2=y_1+d_2\in U. \tag{3.28}$$

(3.28) 表明

$$\alpha(m+\varepsilon c-y)\in U-d_2-\alpha d_1\subseteq U-D. \tag{3.29}$$

显然

$$\alpha(m+\varepsilon c-y)\in \mathrm{cone}(M+C(\varepsilon)-y). \tag{3.30}$$

据 (3.23), (3.29) 和 (3.30), 获得

$$\alpha(m+\varepsilon c-y)\in U_1. \tag{3.31}$$

由 (3.26) 和 (3.31) 有

$$y_1=\alpha(m+\varepsilon c-y)+\alpha d_1\in U_1+D. \tag{3.32}$$

由 (3.24) 获得

$$y_1\in U-D. \tag{3.33}$$

据 (3.32) 和 (3.33) 有

$$y_1\in(U-D)\cap(U_1+D)\subseteq(U_1-D)\cap(U_1+D)=(U_1-D)\cap(D-U_1). \tag{3.34}$$

既然 B 是 D 的有界基, 由引理 3.18 知 D 是正规的. 根据定义 3.17 有

$$(U_1-D)\cap(D-U_1)=U_1. \tag{3.35}$$

(3.34) 和 (3.35) 表明 $y_1\in U_1$. 这样, $\mathrm{cone}(M+(C+D)(\varepsilon)-y)\cap(U-D)\subseteq U_1\subseteq V$. 因此, $y\in \mathrm{Se}(M,C+D,\varepsilon)$. 于是, $\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)\subseteq \mathrm{Se}(M,C+D,\varepsilon)$.

情形 2 $\varepsilon=0$. 由 (3.22) 和 (3.23) 有

$$\mathrm{cone}(M+\mathrm{cone}\,C-y)\cap(U-D)\subseteq V. \tag{3.36}$$

显然, $y\in M+\mathrm{cone}\,C$. 由 (3.36) 和文 [20, 引理 2.3] 知, 存在 $U_2\in N(0)$, 使得

$$\mathrm{cone}(M+\mathrm{cone}\,C+D-y)\cap(U_2-D)\subseteq V. \tag{3.37}$$

另一方面, 有

$$\operatorname{cone}(C+D) \subseteq \operatorname{cone} C + D. \tag{3.38}$$

用 (3.37) 和 (3.38) 有

$$\operatorname{cone}(M+\operatorname{cone}(C+D)-y)\cap(U_2-D)\subseteq V. \tag{3.39}$$

由 (3.39) 有 $y\in \mathrm{Se}(M, C+D, 0)$. 因此, $\mathrm{Se}(M,C,0)\subseteq \mathrm{Se}(M,C+D,0)$.

情形 1 和 2 表明 (3.21) 成立. 由 (3.20) 和 (3.21) 知 $\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)=\mathrm{Se}(M,C+D,\varepsilon)$. 证毕.

注 3.20 从命题 3.19 能够看出, 如果 $y\in\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$, 则对任意 $V\in N(0)$, 存在 $U\in N(0)$, 使得 $\operatorname{cone}(M+C(\varepsilon)+D-y)\cap(U-D)\subseteq V$.

注 3.21 从注 3.20 和定理 3.13 能够看出, 若 $y\in\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$, 则存在 $U\in N(0)$, 使得 $\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(M+C(\varepsilon)+D-y))\cap(U-B)=\emptyset$.

4 标量化

令 $M\subseteq Y$. 现在考虑集合 M 的标量化. 定义映射 $\tau_C: Y^*\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 如下:

$$\tau_C(y^*)=\inf_{c\in C}\{\langle c,y^*\rangle\}.$$

定义 4.1 令 M 是 Y 的非空子集, $y^*\in Y^*$, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\geq 0$. $\overline{m}\in M$ 称为 M 关于 y^* 的 $\tau_{C(\varepsilon)}(y^*)$- 最优点 (记作 $\overline{m}\in\tau_{C(\varepsilon)}(y^*)\text{-argmin}\langle M,y^*\rangle$) 当且仅当

$$\langle\overline{m},y^*\rangle\leq\langle m,y^*\rangle+\tau_{C(\varepsilon)}(y^*),\quad\forall\, m\in M.$$

定理 4.2 令 B 是 D 的有界基, $C\subseteq D\setminus\{0\}$ 是一个非空凸集, $\varepsilon\geq 0$, M 是 Y 的非空凸子集. $\overline{m}\in\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$ 当且仅当存在 $y^*\in B^{\mathrm{st}}$, 使得 $\overline{m}\in\tau_{C(\varepsilon)}(y^*)\text{-argmin}\langle M,y^*\rangle$.

证明 必要性. 设 $\overline{m}\in\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$. 根据注 3.21, 存在 $U\in N(0)$, 使得 $\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(M+C(\varepsilon)-\overline{m}))\cap(U-B)=\emptyset$. 由分离定理知, 存在 $y^*\in Y^*\setminus\{0\}$, 使得

$$\langle m_1,y^*\rangle\geq\langle m_2,y^*\rangle,\quad\forall\, m_1\in\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(M+C(\varepsilon)-\overline{m})),\quad\forall\, m_2\in U-B. \tag{4.1}$$

既然 $0\in\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(M+C(\varepsilon)-\overline{m}))$, 由 (4.1) 有

$$\langle b-u,y^*\rangle\geq 0,\quad\forall\, b\in B,\quad\forall\, u\in U. \tag{4.2}$$

再由 (4.2) 和文 [3, 命题 2.1 (c)], $y^*\in B^{\mathrm{st}}$.

(4.1) 表明 y^* 在 $\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(M+C(\varepsilon)-\overline{m}))$ 是有下界的. 既然 $\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(M+C(\varepsilon)-\overline{m}))$ 是一个锥, 由 (4.1) 有 $\langle m_1,y^*\rangle\geq 0$, $\forall\, m_1\in M+C(\varepsilon)-\overline{m}$. 因此, $\langle\overline{m},y^*\rangle\leq\langle m,y^*\rangle+\langle c,y^*\rangle$, $\forall\, m\in M$, $\forall\, c\in C(\varepsilon)$, 即

$$\langle\overline{m},y^*\rangle\leq\langle m,y^*\rangle+\tau_{C(\varepsilon)}(y^*),\quad\forall\, m\in M,$$

因此, $\overline{m}\in\tau_{C(\varepsilon)}(y^*)\text{-argmin}\langle M,y^*\rangle$.

充分性. 假设 $\overline{m}\notin\mathrm{Se}(M,C,\varepsilon)$. 由注 3.12 (iii) 知, 存在 $V\in N(0)$, 使得

$$\operatorname{cone}(M-\overline{m}+C(\varepsilon))\cap(U-D)\nsubseteq V,\quad\forall\, U\in N(0).$$

这样, 对任意的 $U\in N(0)$, 存在 $\alpha_U\geq 0$, $m_U\in M$, $q_U\in C(\varepsilon)$, $z_U\in U$, $\beta_U\geq 0$, $b_U\in B$, 使得

$$\alpha_U(m_U-\overline{m}+q_U)=z_U-\beta_U b_U\notin V. \tag{4.3}$$

显然

$$\lim_U z_U = 0. \tag{4.4}$$

既然 $\overline{m} \in \tau_{C(\varepsilon)}(y^*)$-argmin$\langle M, y^*\rangle$, 有

$$\langle m_U - \overline{m}, y^*\rangle + \tau_{C(\varepsilon)}(y^*) \geq 0. \tag{4.5}$$

由 (4.5) 获得

$$\langle \alpha_U(m_U - \overline{m} + q_U), y^*\rangle \geq 0. \tag{4.6}$$

合并 (4.3) 和 (4.6) 有

$$\langle z_U - \beta_U b_U, y^*\rangle \geq 0. \tag{4.7}$$

既然 $y^* \in B^{\mathrm{st}}$, 由 (4.7) 知存在 $t > 0$, 使得

$$0 \leq \beta_U t \leq \beta_U \langle b_U, y^*\rangle = \langle \beta_U b_U, y^*\rangle \leq \langle z_U, y^*\rangle. \tag{4.8}$$

由 (4.4) 有

$$\lim_U \langle z_U, y^*\rangle = 0. \tag{4.9}$$

据 (4.8) 和 (4.9) 获得

$$\lim_U \beta_U = 0. \tag{4.10}$$

因为 B 是有界的, 由 (4.10) 得

$$\lim_U \beta_U b_U = 0. \tag{4.11}$$

用 (4.4) 和 (4.11) 有 $\lim_U(z_U - \beta_U b_U) = 0$, 这与 (4.3) 矛盾. 因此, $\overline{m} \in \mathrm{Se}(M, C, \varepsilon)$. 证毕.

注 4.3 (i) 从定理 4.2 的充分性证明, 我们发现 M 和 C 不必是两个凸集; (ii) 在定理 4.2 中, 条件 M 和 C 是 Y 中两个凸集能够被条件 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(M + C(\varepsilon) - \overline{m}))$ 是 Y 中的凸集替代.

令 $F: X \rightrightarrows Y$ 是 X 上的集值映射, A 是 X的非空子集. 现在考虑下面无约束集值优化问题:

$$\text{(USVOP)} \quad \begin{cases} \min F(x), \\ x \in A. \end{cases}$$

定义 4.4 令 $C \subseteq D \setminus \{0\}$, $\varepsilon \geq 0$, $\overline{x} \in A$, $\overline{y} \in F(\overline{x})$. $(\overline{x}, \overline{y})$ 称为 (USVOP) 的 (C,ε)- 超有效元当且仅当 $\overline{y} \in \mathrm{Se}(F(A), C, \varepsilon)$.

(USVOP) 的标量化问题定义如下:

$$\text{(USVOP)}_{y^*} \quad \min\langle F(x), y^*\rangle, \quad x \in A,$$

其中, $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$.

定义 4.5 令 $C \subseteq D \setminus \{0\}$, $\varepsilon \geq 0$, $\overline{x} \in A$ 和 $\overline{y} \in F(\overline{x})$. $(\overline{x}, \overline{y})$ 称为 (USVOP)_{y^*} 的 $\tau_{C(\varepsilon)}(y^*)$-最优解当且仅当 $\langle \overline{y}, y^*\rangle \leq \langle y, y^*\rangle + \tau_{C(\varepsilon)}(y^*)$, $\forall\, x \in A$, $y \in F(x)$.

定理 4.6 令 B 是 D 的有界基, $C \subseteq D \setminus \{0\}$, $\varepsilon \geq 0$. 假设下列条件成立:

(i) $(\overline{x}, \overline{y})$ 是 (USVOP) 的 (C,ε)- 超有效元;

(ii) $F - \overline{y}$ 在 A 上是近似 (C,ε)- 次似凸的,

则存在 $y^* \in B^{\mathrm{st}}$, 使得 $(\overline{x}, \overline{y})$ 是 (USVOP)_{y^*} 的 $\tau_{C(\varepsilon)}(y^*)$- 最优解.

证明 由条件 (i), $\overline{y}\in \mathrm{Se}(F(A),C,\varepsilon)$. 由条件 (ii), $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(A)-\overline{y}+C(\varepsilon)))$ 是 Y 中凸集. 由定理 4.2 的必要性和注 4.3 (ii), 存在 $y^*\in B^{\mathrm{st}}$, 使得 $(\overline{x},\overline{y})$ 是 $(\mathrm{USVOP})_{y^*}$ 的 $\tau_{C(\varepsilon)}(y^*)$- 最优解. 证毕.

注 4.7 当 $C=D\setminus\{0\}$ 和 $\varepsilon=1$ 时, 定理 4.6 退化为文 [20, 定理 3.1]; 当 $q\in D\setminus\{0\}$, $C=D+q$ 和 $\varepsilon=1$ 时, 定理 4.6 退化为文 [24, 定理 3.1].

由定理 4.2 的充分性, 当 M 被 $F(A)$ 替代后, 我们获得下列定理.

定理 4.8 令 B 是 D 的有界基, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\geq 0$. 如果存在 $y^*\in B^{\mathrm{st}}$, 使得 $(\overline{x},\overline{y})$ 是 $(\mathrm{USVOP})_{y^*}$ 的 $\tau_{C(\varepsilon)}(y^*)$- 最优解, 则 $(\overline{x},\overline{y})$ 是 (USVOP) 的 (C,ε)- 超有效元.

注 4.9 文 [8, 定理 3.4] 的向量值映射 f 被定理 4.8 的集值映射 F 替代. 由注 3.10 和定理 3.13 知, 定理 4.8 的结论比文 [8, 定理 3.4] 的结论强. 故定理 4.8 推广了文 [8, 定理 3.4].

5 集值映射的 (C,ε)- 超次微分

令 $\mathscr{L}(X,Y)$ 代表从 X 到 Y 的所有连续线性算子构成的集合. 类似地, 定义 $\mathscr{L}(X,Z)$ 和 $\mathscr{L}(Z,Y)$. 记 $\mathscr{L}_+(K,D):=\{T\in\mathscr{L}(Z,Y)\,|\,T(K)\subseteq D\}$.

现在引进集值映射的 (C,ε)- 超次微分, 它推广了集值映射的超次微分.

定义 5.1 令 A 是 X 的非空子集, $F:X\rightrightarrows Y$ 是 A 上的集值映射, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\geq 0$. $T\in\mathscr{L}(X,Y)$ 称为 F 在 $(\overline{x},\overline{y})\in\mathrm{gr}\,F$ 的 (C,ε)- 超次梯度当且仅当 $\overline{y}-T(\overline{x})\in\mathrm{Se}(\bigcup_{x\in A}(F(x)-T(x)),C,\varepsilon)$. F 在 $(\overline{x},\overline{y})\in\mathrm{gr}\,F$ 的 (C,ε)- 超次梯度构成的集合 (记为 $\partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}F(\overline{x},\overline{y})$) 称为 F 在 $(\overline{x},\overline{y})\in\mathrm{gr}\,F$ 的 (C,ε)- 超次微分.

注 5.2 如果 $Y=\mathbb{R}$, $D=\mathbb{R}_+$, 则 $T\in\partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}F(\overline{x},\overline{y})$ 当且仅当 $T\in X^*$,

$$T(x)-T(\overline{x})\leq y-(\overline{y}-q),\quad \forall\,(x,y)\in\mathrm{gr}\,F,\quad \forall\,q\in C(\varepsilon).$$

现在给出集值映射 (C,ε)- 超次梯度的等价刻画.

命题 5.3 令 B 是 D 的有界基, $C\subseteq D\setminus\{0\}$ 是 Y 中的凸集, $\varepsilon\geq 0$, $(\overline{x},\overline{y})\in\mathrm{gr}\,F$, $F:X\rightrightarrows Y$ 是 X 上的 D- 凸集值映射. 则 $T\in\partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}F(\overline{x},\overline{y})$ 当且仅当存在 $y^*\in B^{\mathrm{st}}$, 使得

$$\langle y-\overline{y}-T(x-\overline{x})+q,y^*\rangle\geq 0,\quad \forall\,(x,y)\in\mathrm{gr}\,F,\quad \forall\,q\in C(\varepsilon). \tag{5.1}$$

证明 必要性. 设 $T\in\partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}F(\overline{x},\overline{y})$, 有 $\overline{y}-T(\overline{x})\in\mathrm{Se}((F-T)(X),C,\varepsilon)$. 我们由命题 3.19 和定理 3.13 知, 存在 $U\in N(0)$, 使得 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}((F-T)(X)+D+C(\varepsilon)-\overline{y}+T(\overline{x})))\cap(U-B)=\emptyset$. 既然集值映射 F 在 X 上是 D- 凸的, T 在 X 上是线性的, 则 $(F-T)(X)+D$ 是 Y 中凸集. 由 C 的凸性, $(F-T)(X)+D+C(\varepsilon)-\overline{y}+T(\overline{x})$ 是 Y 中凸集. 类似于定理 4.2 的必要性, 我们能找到 $y^*\in B^{\mathrm{st}}$, 使得 (5.1) 成立.

充分性. 由 (5.1) 有

$$\langle (y-T(x))-(\overline{y}-T(\overline{x})),y^*\rangle+\tau_{C(\varepsilon)}(y^*)\geq 0,\quad \forall\,(x,y)\in\mathrm{gr}\,F. \tag{5.2}$$

(5.2) 表明 $\overline{y}-T(\overline{x})\in\tau_{C(\varepsilon)}(y^*)\text{-}\mathrm{argmin}\langle\bigcup_{x\in X}(F(x)-T(x)),y^*\rangle$. 由定理 4.2 知 $\overline{y}-T(\overline{x})\in\mathrm{Se}(\bigcup_{x\in X}(F(x)-T(x)),C,\varepsilon)$. 因此, $T\in\partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}F(\overline{x},\overline{y})$. 证毕.

注 5.4 当我们证明命题 5.3 的必要性时, 条件 F 在 X 上是 D- 凸的和 C 是 Y 中的凸集能够被条件 $F-T-\overline{y}+T(\overline{x})$ 在 X 上是近似 (C,ε)- 次似凸替代.

定义 5.5 [1]　令 A 是 X 中的非空子集, $F: X \rightrightarrows Y$ 是 A 上的集值映射. F 在 $\overline{x} \in A$ 称为下半连续当且仅当对任意的 $\overline{y} \in F(\overline{x})$ 和 $\overline{y}$ 的任意邻域 U, 存在 $\overline{x}$ 的邻域 V, 使得 $F(x) \cap U \neq \emptyset$, $\forall x \in V$.

命题 5.6　令 A 是 X 中的非空子集, $F: X \rightrightarrows Y$ 是 A 上的集值映射, $\overline{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} F)$. 如果存在 $a \in Y$ 和 X 中零邻域 V_1, 使得 $F(\overline{x}+V_1) \subseteq a - D$, 那么 $\operatorname{int}(\operatorname{epi} F) \neq \emptyset$.

证明　既然 $\overline{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} F)$, 则存在 X 中满足 $V_2 \subseteq V_1$ 的零邻域 V_2, 使得

$$\overline{x} + V_2 \subseteq \operatorname{dom} F \tag{5.3}$$

和

$$F(\overline{x}+v) \subseteq a - D, \quad \forall v \in V_2. \tag{5.4}$$

我们仅仅需要证明

$$(\overline{x}+V_2) \times (a + \operatorname{int} D) \subseteq \operatorname{epi} F. \tag{5.5}$$

对任意的 $(\overline{x}+v', b) \in (\overline{x}+V_2) \times (a + \operatorname{int} D)$, 由 (5.4) 得

$$F(\overline{x}+v') \subseteq a - D. \tag{5.6}$$

由 (5.3) 知 $F(\overline{x}+v') \neq \emptyset$. 取 $\overline{y} \in F(\overline{x}+v')$. 根据 (5.6), 存在 $d \in D$, 使得 $\overline{y} = a - d$. 因此获得

$$a = \overline{y} + d \in F(\overline{x}+v') + d. \tag{5.7}$$

既然 $b \in a + \operatorname{int} D$, 则存在 $d' \in \operatorname{int} D$, 使得

$$b = a + d'. \tag{5.8}$$

由 (5.7) 和 (5.8), $b \in F(\overline{x}+v') + D + \operatorname{int} D \subseteq F(\overline{x}+v') + D$. 因此, (5.5) 成立. 这样, $(\overline{x}+v', b) \in \operatorname{int}(\operatorname{epi} F)$. 因此, $\operatorname{int}(\operatorname{epi} F) \neq \emptyset$. 证毕.

注 5.7　在命题 5.6 中, 为了保证 $\operatorname{int}(\operatorname{epi} F) \neq \emptyset$, 条件存在 $a \in X$ 和 X 中零邻域 V_1, 使得 $F(\overline{x}+V_1) \subseteq a - D$ (记作条件 $\mathscr{A}$) 能够被条件 F 在 $\overline{x} \in \operatorname{dom} F$ 下半连续 (记作条件 $\mathscr{B}$) (见文 [25, 引理 3.1]). 然而, 下面的例子表明条件 $\mathscr{A}$ 和条件 $\mathscr{B}$ 不能相互蕴含.

例 5.8　令 $D := \{r \geq 0 \,|\, r \in \mathbb{R}\}$, 集值映射 $F: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ 定义如下:

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & x \neq 0, \\ [-1, 1], & x = 0. \end{cases}$$

容易验证条件 $\mathscr{A}$ 在 $\overline{x} = 0$ 成立. 然而, F 在 $\overline{x} = 0$ 不是下半连续. 因此, 条件 $\mathscr{A}$ 不蕴含条件 $\mathscr{B}$.

例 5.9　令 $D := \{r \geq 0 \,|\, r \in \mathbb{R}\}$, 集值映射 $F: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ 定义如下:

$$F(x) = \begin{cases} \mathbb{R}, & x \neq 0, \\ \{0\}, & x = 0. \end{cases}$$

容易验证 F 在 $\overline{x} = 0$ 下半连续. 因此, 条件 $\mathscr{B}$ 成立. 然而, 对任意 $a \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}$ 中零邻域 V, 存在 $\overline{v} \in V_1 \setminus \{0\} \subseteq V_1$, 使得 $F(\overline{x}+v) = \mathbb{R} \nsubseteq a - D$. 因此, 条件 $\mathscr{A}$ 不成立. 这样, 条件 $\mathscr{B}$ 不蕴含条件 $\mathscr{A}$.

引理 5.10　令 $F_1: X \rightrightarrows Y$ 和 $F_2: X \rightrightarrows Y$ 是 X 上两个 D- 凸集值映射, $E := \{x \in X \,|\, F_1(x) \neq \emptyset, F_2(x) \neq \emptyset\}$. 如果 F_1 在 $\overline{x} \in \operatorname{int} E$ 满足条件 $\mathscr{A}$, 则 $\operatorname{int}(\operatorname{epi} F_1) \cap \operatorname{epi} F_2 \neq \emptyset$.

证明　从文 [16, 引理 3.1] 的证明, 条件 F_1 在 $x \in \operatorname{int} E$ 是连通的保证了 $\operatorname{int}(\operatorname{epi} F_1)$ 的非空性. 由命题 5.6 和文 [16, 引理 3.1] 知 $\operatorname{int}(\operatorname{epi} F_1) \cap \operatorname{epi} F_2 \neq \emptyset$. 证毕.

似乎条件 $\mathscr{A}$ 比条件 $\mathscr{B}$ 容易验证. 因此, 接下来把条件 $\mathscr{A}$ 作为假设.

现在建立集值映射 (C,ε)- 超次微分的存在性定理.

定理 5.11 令 A 是 X 的凸子集, B 是 D 的有界基, $C\subseteq D\setminus\{0\}$ 是 Y 中凸集, $\varepsilon\geq 0$. 假设下列条件成立:

(i) 集值映射 $F:X\rightrightarrows Y$ 在 A 上是 D- 凸的;

(ii) $\overline{x}\in\operatorname{dom}F$, $\overline{y}\in\operatorname{Se}(F(\overline{x}),C,\varepsilon)$;

(iii) F 在 $\overline{x}$ 满足条件 $\mathscr{A}$,

则 $\partial^{\rm Se}_{C,\varepsilon}F(\overline{x},\overline{y})\neq\emptyset$.

证明 既然 $\overline{y}\in\operatorname{Se}(F(\overline{x}),C,\varepsilon)$, 容易验证存在 $U\in N(0)$, 使得

$$\operatorname{cone}(F(\overline{x})-\overline{y}+C(\varepsilon))\cap(U-B)=\emptyset. \tag{5.9}$$

记 $\Omega_1:=\{(x,y)\in A\times Y\,|\,y\in F(x)+D\}$, $\Omega_2:=\{(x,y)\in A\times Y\,|\,y\in F(x)+\operatorname{cone}(B-U)\}$ 和 $\Omega:=\{(x,y)\in A\times Y\,|\,y\in F(x)+C(\varepsilon)+\operatorname{cone}(B-U)\}$.

根据 F 的 C- 凸性和 $D\subseteq\operatorname{cone}(B-U)$, 容易证明 Ω 是 $A\times Y$ 中的凸集. 既然 F 在 $\overline{x}$ 满足条件 $\mathscr{A}$, 由命题 5.6 知 $\operatorname{int}\Omega_1\neq\emptyset$. 因此, 对某个 $q'\in C(\varepsilon)$, 有

$$\emptyset\neq\operatorname{int}\Omega_1+(0,q')\subseteq\operatorname{int}(\Omega_1+\{(0,q)\,|\,q\in C(\varepsilon)\})\subseteq\operatorname{int}(\Omega_2+\{(0,q)\,|\,q\in C(\varepsilon)\})=\operatorname{int}\Omega.$$

我们断言 $(\overline{x},\overline{y})\notin\operatorname{int}\Omega$. 否则, $(\overline{x},\overline{y})\in\operatorname{int}\Omega$. 因此, 存在 $V\in N(0)$, 使得 $(\overline{x},\overline{y})+\{0\}\times V\subseteq\Omega$. 令 $b\in B$, $v\in V$, 且 $b\neq v$. 对充分小的正数 α, 记

$$-d:=\alpha(b-v). \tag{5.10}$$

既然 V 是吸收和对称的, 由 (5.10) 知 $d\in V$. 这样, $(\overline{x},\overline{y}+d)\in\Omega$. 从 Ω 的定义知 $\overline{y}+d\in F(\overline{x})+C(\varepsilon)+\operatorname{cone}(B-U)$. 因此, 存在 $y_1\in F(\overline{x})$, $q_1\in C(\varepsilon)$ 和 $d_1\in\operatorname{cone}(B-U)$, 使得

$$\overline{y}+d=y_1+q_1+d_1. \tag{5.11}$$

由 (5.10) 和 (5.11) 有 $y_1+q_1-\overline{y}=d-d_1\in\operatorname{cone}(U-B)\setminus\{0\}$. 相应地, 存在 $\alpha_1>0$, 使得 $\alpha_1(y_1+q_1-\overline{y})\in U-B$. 这样, $\alpha_1(y_1+q_1-\overline{y})\in\operatorname{cone}(F(\overline{x})-\overline{y}+C(\varepsilon))\cap(U-B)$, 这与 (5.9) 矛盾. 因此, $(\overline{x},\overline{y})\notin\operatorname{int}\Omega$.

由分离定理, 存在 $(x^*,y^*)\in(X^*\times Y^*)\setminus\{(0,0)\}$, 使得

$$\langle x,x^*\rangle+\langle y,y^*\rangle\geq\langle\overline{x},x^*\rangle+\langle\overline{y},y^*\rangle,\quad\forall\,x\in A,\quad\forall\,y\in F(x)+C(\varepsilon)+\operatorname{cone}(B-U). \tag{5.12}$$

在 (5.12) 中令 $x=\overline{x}$, $y=\overline{y}+q+d_2$, 有

$$\langle q+d_2,y^*\rangle\geq 0,\quad\forall\,q\in C(\varepsilon),\quad\forall\,d_2\in\operatorname{cone}(B-U). \tag{5.13}$$

既然 $\operatorname{cone}(B-U)$ 是一个锥, 由 (5.13) 得 $\langle d_2,y^*\rangle\geq 0$, $\forall\,d_2\in\operatorname{cone}(B-U)$. 进一步,

$$\langle d_2,y^*\rangle\geq 0,\quad\forall\,d_2\in B-U. \tag{5.14}$$

根据 (5.14) 和文 [3, 命题 2.1 (c)], $y^*\in B^{\rm st}$.

既然 $y^*\in B^{\rm st}$, 则存在 $b\in C$, 使得 $\langle b,y^*\rangle=1$. 定义映射 $T:X\to Y$ 如下:

$$T(x)=-\langle x,x^*\rangle b,\quad\forall\,x\in X. \tag{5.15}$$

由 (5.12) 和 (5.15) 有

$$\langle y-\overline{y}-T(x-\overline{x})+q,y^*\rangle=\langle y-\overline{y}+q,y^*\rangle+\langle x-\overline{x},x^*\rangle\geq 0,\quad\forall\,(x,y)\in\operatorname{gr}F,\ \forall\,q\in C(\varepsilon). \tag{5.16}$$

由命题 5.3 的充分性和 (5.16) 知 $T\in\partial^{C}_{\varepsilon e\mathrm{SE}}F(\overline{x},\overline{y})$. 因此, $\partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}F(\overline{x},\overline{y})\neq\emptyset$. 证毕.

下面的例子用于描述定理 5.11.

例 5.12 令 $X:=\mathbb{R}$, $Y:=\mathbb{R}^2$, $D:=\{(y_1,y_2)\,|\,y_1\leq 0,\ y_2\geq 0\}$, $C:=\{(y_1,y_2)\,|\,y_1\geq\frac{1}{2},\ y_2\geq\frac{1}{2}\}\subseteq D\setminus\{0\}$, $B:=\{(y_1,y_2)\,|\,y_1+y_2=1,\ y_1\geq 0,\ y_2\geq 0\}$, $A:=\{x\,|\,x\geq 0\}$. A 上的集值映射 $F:X\rightrightarrows Y$ 定义如下: $F(x)=\{(x,t)\,|\,0\leq t\leq 2x\}$, $\forall\,x\in A$. 令 $\overline{x}=1$, $\overline{y}=(1,0)$, $\varepsilon=\frac{1}{4}$. 容易验证定理 5.11 中的条件 (i) 和条件 (ii) 满足. 存在 $a=(4,4)$ 和 $V_1=]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$, 使得 $F(\overline{x}+V_1)\subseteq a-D$. 因此, 定理 5.11 中的条件 (iii) 满足. 令 $T:X\to Y$ 定义如下: $T(x):=(-x,-\frac{1}{16}x)$, $\forall\,x\in A$. 容易验证 $T\in\partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}F(\overline{x},\overline{y})$. 因此, $\partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}F(\overline{x},\overline{y})\neq\emptyset$.

引理 5.13 [15] 令 $f:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 在 X 上是真凸的. 如果存在 $x_0\in\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,f)$ 和 x_0 的邻域 U, 使得 f 在 U 上有上界, 则 f 在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,f)$ 上连续.

令 $f:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是 A 上的实值函数, $\varepsilon\geq 0$. f 在 $\overline{x}$ 的 ε- 次微分定义如下: $\partial_\varepsilon f(\overline{x}):=\{x^*\in X^*\,|\,\langle x-\overline{x},x^*\rangle-\varepsilon\leq f(x)-f(\overline{x}),\ \forall\,x\in A\}$.

引理 5.14 [9] 令 $f_i:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 在 X 是凸的, 其中 $i=1,2$. 如果存在 $x_0\in\mathrm{dom}\,f_2$ $(\mathrm{dom}\,f_2:=\{x\in X\,|\,f_2(x)\in\mathbb{R}\})$, 使得 f_1 在 x_0 连续, 则对任意的 $\varepsilon\geq 0$ 和 $x\in X$, 有

$$\partial_\varepsilon(f_1+f_2)(x)=\bigcup_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\geq 0,\,\varepsilon_1+\varepsilon_2\leq\varepsilon}[\partial_{\varepsilon_1}f_1(x)+\partial_{\varepsilon_2}f_2(x)].$$

令 A 是 X 的非空子集. 指标函数 $\sigma_A:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 定义如下:

$$\sigma_A(x):=\begin{cases}0, & x\in A,\\ +\infty, & x\notin A.\end{cases}$$

记 $\mathscr{F}_D:=\{C(\varepsilon)\,|\,\varepsilon\geq 0,\ C\subseteq D\backslash\{0\}\}$. 现在建立基于 (C,ε)- 超次微分的 Moreau–Rockafellar 定理.

定理 5.15 令 B 是 D 的有界基, $C\subseteq D\setminus\{0\}$ 是 Y 中凸集, $\varepsilon\geq 0$, $F_1:X\rightrightarrows Y$ 和 $F_2:X\rightrightarrows Y$ 是 X 上两个 D- 凸集值映射. 令 $A:=\mathrm{dom}\,F_1\cap\mathrm{dom}\,F_2$, F_1 在 $\overline{x}\in\mathrm{int}\,A$ 满足条件 $\mathscr{A}$, 则对 $\overline{y}_1\in F_1(\overline{x})$, $\overline{y}_2\in F_2(\overline{x})$, 有

$$\begin{aligned}&\partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}(F_1+F_2)(\overline{x},\overline{y}_1+\overline{y}_2)\\ &\subseteq\bigcup_{y^*\in B^{\mathrm{st}}}\Bigg(\bigcup_{\substack{(q,C_1(\varepsilon_1),C_2(\varepsilon_2))\in C(\varepsilon)\times\mathscr{F}_D\times\mathscr{F}_D\\ \tau_{C_1(\varepsilon_1)}(y^*)+\tau_{C_2(\varepsilon_2)}(y^*)\leq\langle q,y^*\rangle}}[\partial^{\mathrm{Se}}_{C_1,\varepsilon_1}F_1(\bar{x},\bar{y}_1)+\partial^{\mathrm{Se}}_{C_2,\varepsilon_2}F_2(\bar{x},\bar{y}_2)]\Bigg).\end{aligned}\tag{5.17}$$

证明 设 $T\in\partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}(F_1+F_2)(\overline{x},\overline{y}_1+\overline{y}_2)$. 记

$$H_1(x):=F_1(x)-\overline{y}_1-T(x-\overline{x}),\quad\forall\,x\in X\tag{5.18}$$

和

$$H_2(x):=F_2(x)-\overline{y}_2,\quad\forall\,x\in X.\tag{5.19}$$

既然 $\overline{y}_1\in F_1(\overline{x})$ 和 $\overline{y}_2\in F_2(\overline{x})$, 由 (5.18) 和 (5.19) 有

$$0\in H_1(\overline{x})+H_2(\overline{x}).\tag{5.20}$$

因为 $T\in\partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}(F_1+F_2)(\overline{x};\overline{y}_1+\overline{y}_2)$, 有

$$\overline{y}_1+\overline{y}_2-T(\overline{x})\in\mathrm{Se}\Bigg(\bigcup_{x\in X}(F_1(x)+F_2(x)-T(x)),C,\varepsilon\Bigg).\tag{5.21}$$

根据 (5.20) 和 (5.21), 容易验证

$$0 \in \mathrm{Se}\bigg(\bigcup_{x\in X}(H_1(x)+H_2(x)), C, \varepsilon\bigg). \tag{5.22}$$

由 (5.22) 和注 3.20, 获得

$$0 \in \mathrm{Se}\bigg(\bigcup_{x\in X}(H_1(x)+H_2(x))+D, C, \varepsilon\bigg). \tag{5.23}$$

由于 F_1 和 F_2 在 X 是 D- 凸的, 则 $H_1(x)+H_2(x)$ 在 X 是 D- 凸的. 因此, $\bigcup_{x\in X}(H_1(x)+H_2(x))+D$ 是一个凸集. 这样, 由 (5.23) 和定理 4.2, 存在 $y^*\in B^{\mathrm{st}}$, 使得

$$\langle y, y^*\rangle + \langle q, y^*\rangle \ge 0, \quad \forall\,(x,y)\in \mathrm{epi}(H_1+H_2),\ \forall\, q\in C(\varepsilon). \tag{5.24}$$

既然 $D+D\subseteq D$, 有

$$(x, y_1+y_2-(\overline{y}_1+\overline{y}_2)-T(x-\overline{x}))\in \mathrm{epi}(H_1+H_2), \quad \forall\,(x,y_1)\in \mathrm{epi}\,F_1,\ \forall\,(x,y_2)\in \mathrm{epi}\,F_2. \tag{5.25}$$

由 (5.24) 和 (5.25) 获得

$$\begin{aligned}&\sigma_{\mathrm{epi}\,F_1}(x,y_1)+\sigma_{\mathrm{epi}\,F_2}(x,y_2)+\langle y_1+y_2-(\overline{y}_1+\overline{y}_2)-T(x-\overline{x}), y^*\rangle+\langle q, y^*\rangle\ge 0,\\ &\quad \forall\,(x,y_1)\in \mathrm{epi}\,F_1,\quad \forall\,(x,y_2)\in\mathrm{epi}\,F_2,\quad \forall\, q\in C(\varepsilon).\end{aligned} \tag{5.26}$$

记

$$f_1(x,y_1,y_2) := \sigma_{\mathrm{epi}\,F_1}(x,y_1)+\langle y_1-\overline{y}_1, y^*\rangle, \quad \forall\,(x,y_1)\in\mathrm{epi}\,F_1$$

和

$$f_2(x,y_1,y_2) := \sigma_{\mathrm{epi}\,F_2}(x,y_2)+\langle y_2-\overline{y}_2-T(x-\overline{x}), y^*\rangle, \quad \forall\,(x,y_2)\in\mathrm{epi}\,F_2.$$

从 F_1 和 F_2 的 D- 凸性知 $\mathrm{epi}\,F_1$ 和 $\mathrm{epi}\,F_2$ 是 $X\times Y$ 中两个凸集. 因此, $f_1(x,y_1,y_2)$ 和 $f_2(x,y_1,y_2)$ 在 $X\times Y\times Y$ 上是凸的. 这样, 由 (5.26) 有

$$(0,0,0)\in \partial_{\langle q,y^*\rangle}(f_1+f_2)(\overline{x},\overline{y}_1,\overline{y}_2),\ \forall\, q\in C(\varepsilon). \tag{5.27}$$

既然 F_1 在 $\overline{x}\in \mathrm{int}A$ 满足条件 $\mathscr{A}$, 由引理 5.10 知 $\mathrm{int}(\mathrm{epi}\,F_1)\cap \mathrm{epi}\,F_2\neq\emptyset$. 显然, $\sigma_{\mathrm{epi}\,F_1}(x,y_1)$ 是 $A\times Y\times Y$ 上的真凸函数. 由引理 5.13, 存在 $(x_0,y_0)\in \mathrm{int}(\mathrm{epi}\,F_1)\cap\mathrm{epi}\,F_2$, 使得 $\sigma_{\mathrm{epi}\,F_1}(x,y_1)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 显然, f_1 在 $(x_0,y_0,y_0)\in \mathrm{dom} f_2$ 连续. 由 (5.27) 和引理 5.14, 存在满足条件 $\alpha_1+\alpha_2\le\langle q,y^*\rangle$ 的 $\alpha_1\ge 0$ 和 $\alpha_2\ge 0$, 使得

$$(0,0,0)\in\partial_{\alpha_1}f_1(\overline{x},\overline{y}_1,\overline{y}_2)+\partial_{\alpha_2}f_2(\overline{x},\overline{y}_1,\overline{y}_2).$$

这样, 存在 $(x_1^*,y_1^*,y_2^*)\in\partial_{\alpha_1}f_1(\overline{x},\overline{y}_1,\overline{y}_2)$, 使得 $(-x_1^*,-y_1^*,-y_2^*)\in\partial_{\alpha_2}f_2(\overline{x},\overline{y}_1,\overline{y}_2)$. 因此有

$$\begin{aligned}&\langle x-\overline{x}, x_1^*\rangle+\langle y_1-\overline{y}_1, y_1^*\rangle+\langle y_2-\overline{y}_2, y_2^*\rangle-\alpha_1\\ &\quad\le\langle y_1-\overline{y}_1, y^*\rangle,\quad \forall\, x\in\mathrm{dom}\,F_1,\quad\forall\, y_1\in F_1(x)+D,\quad \forall\, y_2\in Y\end{aligned} \tag{5.28}$$

和

$$\begin{aligned}&\langle x-\overline{x}, -x_1^*\rangle+\langle y_1-\overline{y}_1, -y_1^*\rangle+\langle y_2-\overline{y}_2, -y_2^*\rangle-\alpha_2\\ &\quad\le\langle y_2-\overline{y}_2-T(x-\overline{x}), y^*\rangle,\quad \forall\, x\in\mathrm{dom}\,F_2,\quad\forall\, y_2\in F_2(x)+D,\quad \forall\, y_1\in Y.\end{aligned} \tag{5.29}$$

在 (5.28) 中令 $x=\overline{x}$ 和 $y_1=\overline{y}_1$, 获得 $y_2^*=0$. 另一方面, 在 (5.29) 中令 $x=\overline{x}$ 和 $y_2=\overline{y}_2$, 有 $y_1^*=0$. 合并 (5.28) 和 (5.29) 得

$$\langle x-\overline{x},x_1^*\rangle-\langle y_1-\overline{y}_1,y^*\rangle-\alpha_1\le 0,\quad \forall\,(x,y_1)\in \operatorname{gr}F_1 \tag{5.30}$$

和

$$-\langle x-\overline{x},x_1^*\rangle-\langle y_2-\overline{y}_2,y^*\rangle+\langle T(x-\overline{x}),y^*\rangle-\alpha_2\le 0,\quad \forall\,(x,y_2)\in \operatorname{gr}F_2. \tag{5.31}$$

既然 B 是 C 的基, $y^*\in B^{\rm st}$, 则存在 $c\in C\setminus\{0\}$, 使得 $\langle c,y^*\rangle=1$. 定义算子 $L:X\to Y$ 如下:

$$L(x)=\langle x,x_1^*\rangle c,\quad \forall\,x\in X. \tag{5.32}$$

由 (5.30), (5.31) 和 (5.32), 有

$$\langle L(x-\overline{x}),y^*\rangle-\langle y_1-\overline{y}_1,y^*\rangle-\alpha_1\le 0,\quad \forall\,(x,y_1)\in \operatorname{gr}F_1 \tag{5.33}$$

和

$$-\langle L(x-\overline{x}),y^*\rangle-\langle y_2-\overline{y}_2,y^*\rangle+\langle T(x-\overline{x}),y^*\rangle-\alpha_2\le 0,\quad \forall\,(x,y_2)\in \operatorname{gr}F_2. \tag{5.34}$$

既然 $\alpha_i\ge 0$ $(i=1,2)$, 存在 $\varepsilon_i\ge 0$ $(i=1,2)$ 和集合 $C_i\subseteq D\setminus\{0\}$ $(i=1,2)$, 使得

$$\tau_{C_i(\varepsilon_i)}(y^*)=\alpha_i\ge 0\ \ (i=1,2). \tag{5.35}$$

由 (5.33), (5.34) 和 (5.35), 有

$$\langle y_1-\overline{y}_1+q_1-L(x-\overline{x}),y^*\rangle\ge 0,\quad \forall\,(x,y_1)\in \operatorname{gr}F_1,\quad \forall\,q_1\in C_1(\varepsilon_1) \tag{5.36}$$

和

$$\langle y_2-\overline{y}_2+q_2-(T-L)(x-\overline{x}),y^*\rangle\ge 0,\quad \forall\,(x,y_2)\in \operatorname{gr}F_2,\quad \forall\,q_2\in C_2(\varepsilon_2). \tag{5.37}$$

由 (5.36), (5.37) 和命题 5.3 获得 $L\in\partial^{\rm Se}_{C_1,\varepsilon_1}F_1(\overline{x};\overline{y}_1)$ 和 $T-L\in\partial^{\rm Se}_{C_2,\varepsilon_2}F_2(\overline{x};\overline{y}_2)$. 因此 (5.17) 成立. 证毕.

6 应用到集值优化

令 A 是 X 中非空子集, $F:X\rightrightarrows Y$ 和 $G:X\rightrightarrows Z$ 是 A 上两个集值映射. 我们考虑下列约束集值优化问题:

$$(\mathrm{SVOP})\quad \begin{cases}\min F(x),\\ G(x)\cap(-K)\ne\emptyset,\\ x\in A,\end{cases}$$

(SVOP) 的可行集记为 $S:=\{x\in A\,|\,G(x)\cap(-K)\ne\emptyset\}$.

定义 6.1 令 B 是 D 的基, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\ge 0$, $\overline{x}\in S$, $\overline{y}\in F(\overline{x})$, $(\overline{x},\overline{y})$ 称为 (SVOP) 的 (C,ε)- 超有效元当且仅当 $\overline{y}\in{\rm Se}(F(S),C,\varepsilon)$.

集值映射 $I:X\rightrightarrows Y\times Z$ 定义如下: $I(x):=F(x)\times G(x)$, $\forall\,x\in X$. 由定义 2.4, 集值映 $I:X\rightrightarrows Y\times Z$ 在 A 上是近似 $C(\varepsilon)\times D$- 次似凸的当且仅当 ${\rm cl}({\rm cone}(I(A)+C(\varepsilon)\times D))$ 是 $Y\times Z$ 的凸集.

沿着文 [25, 引理 4.1] 的思路, 容易获得下面的标量化定理.

定理 6.2 令 B 是 D 的有界基, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\ge 0$, $\overline{x}\in S$. 假设下列条件满足:

(i) $(\overline{x},\overline{y})$ 是 (SVOP) 的 $C(\varepsilon)$- 超有效元;

(ii) 存在 $x_0 \in A$, 使得 $G(x_0) \cap (-\operatorname{int} K) \neq \emptyset$;

(iii) $I_{\overline{y}}(x)$ 在 A 上是近似 $C(\varepsilon) \times K$- 次似凸的, 其中 $I_{\overline{y}} := (F - \overline{y}) \times G$,
则存在 $(y^*, z^*) \in B^{\mathrm{st}} \times K^*$, 使得

$$\langle y, y^* \rangle + \langle q, y^* \rangle + \langle z, z^* \rangle \geq \langle \overline{y}, y^* \rangle, \quad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in F(x),\ \forall\, z \in G(x),\ \forall\, q \in C(\varepsilon). \tag{6.1}$$

注 6.3 (i) 文 [8, 定理 3.8] 中的向量值映射被定理 6.2 的集值映射替代;

(ii) 文 [8, 定理 3.8] 中的 $C(\varepsilon)$-Benson 真有效性被定理 6.2 的 $C(\varepsilon)$- 超有效性替代;

(iii) 文 [8, 定理 3.8] 中条件 $I_{\overline{y}}(x)$ 在 A 上是近似 $(C \times K)(\varepsilon)$- 次似凸 A 被定理 6.2 的条件 (iii) 替代.

令 $F : X \rightrightarrows Y$ 和 $G : X \rightrightarrows Z$ 是 X 上两个集值映射. 对 $y^* \in Y^*$, 集值映射 $y^* F : X \rightrightarrows \mathbb{R}$ 定义如下: $y^* F(x) = \{\langle y, y^* \rangle \,|\, y \in F(x)\}$, $\forall\, x \in X$. 类似地, 可以定义 $y^* G$.

定理 6.4 令 B 是 D 的有界基, $C \subseteq D \setminus \{0\}$, $\varepsilon \geq 0$, $\overline{x} \in S$. 假设下列条件满足:

(i) $(\overline{x}, \overline{y})$ 是 (SVOP) 的 $C(\varepsilon)$- 超有效元;

(ii) 存在 $x_0 \in A$, 使得 $G(x_0) \cap (-\operatorname{int} K) \neq \emptyset$;

(iii) $I_{\overline{y}}(x)$ 在 A 上是近似 $C(\varepsilon) \times K$- 次似凸的,

则

(a) 存在 $(y^*, z^*) \in B^{\mathrm{st}} \times K^*$, 使得

$$0 \in \partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}(F y^* + G z^*)(\overline{x}, \langle \overline{y}, y^* \rangle + \langle \overline{z}, z^* \rangle); \tag{6.2}$$

(b) 存在 $T \in \mathscr{L}_+(K, D)$, 使得

$$0 \in \partial^{\mathrm{Se}}_{C,\varepsilon}(F + T(G))(\overline{x}, \overline{y} + T(\overline{z})). \tag{6.3}$$

证明 首先, 将证明结论 (a) 成立. 根据定理 6.2, 存在 $(y^*, z^*) \in B^{\mathrm{st}} \times K^*$, 使得 (6.1) 成立. 既然 $\overline{x} \in S$, 存在 $\overline{z} \in G(\overline{x}) \cap (-D) \neq \emptyset$, 使得

$$\langle \overline{z}, z^* \rangle \leq 0. \tag{6.4}$$

根据 (6.1) 和 (6.4) 有

$$\langle y, y^* \rangle + \langle q, y^* \rangle + \langle z, z^* \rangle \geq \langle \overline{y}, y^* \rangle + \langle \overline{z}, z^* \rangle, \quad \forall\, x \in A, y \in F(x), \quad \forall\, z \in G(x), \quad \forall\, q \in C(\varepsilon). \tag{6.5}$$

由 (6.5) 和注 5.2 知 (6.2) 成立.

现在证明结论 (b) 成立. 既然 B 是 D 的基, 且 $y^* \in B^{\mathrm{st}}$, 则存在 $d \in D \setminus \{0\}$, 使得 $\langle d, y^* \rangle = 1$. 定义算子 $T : Z \to Y$ 如下:

$$T(z) = \langle z, z^* \rangle d, \quad \forall\, z \in Z. \tag{6.6}$$

显然, $T \in \mathscr{L}_+(K, D)$. 由 (6.5) 和 (6.6) 有

$$\langle y + T(z), y^* \rangle + \langle q, y^* \rangle \geq \langle \overline{y} + T(\overline{z}), y^* \rangle, \quad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in F(x), \quad \forall\, z \in G(x),\ \forall\, q \in C(\varepsilon). \tag{6.7}$$

根据 (6.7) 和命题 5.3 知, (6.3) 成立. 证毕.

注 6.5 (i) 文 [19, 定理 6.5] 中假设 (A) 被定理 6.4 的条件 $I_{\overline{y}}(x)$ 在 A 上是近似 $C(\varepsilon) \times K$- 次似凸的替代; (ii) 文 [19, 定理 6.5)] 中 q-Benson 真有效性被定理 6.4 的 $C(\varepsilon)$- 超有效性替代.

定理 6.6 令 A 是 X 的非空凸子集, 集值映射 F 和 G 在 A 上分别是 D- 凸的和 K- 凸的. 记 $E := \{x \,|\, F(x) \neq \emptyset, G(x) \neq \emptyset\}$. 令 B 是 D 的有界基, $C \subseteq D \setminus \{0\}$, $\varepsilon \geq 0$. 设 $\overline{z} \in G(\overline{x}) \cap (-D)$. 假设下列条件成立:

(i) $(\overline{x},\overline{y})$ 是 (SVOP) 的 $C(\varepsilon)$- 超有效元;

(ii) $I_{\overline{y}}(x)$ 在 A 是近似 $C(\varepsilon)\times K$- 次似凸的.

(iii) 存在 $x'\in\operatorname{int}E$, 使得 F 在 x' 满足条件 $\mathscr{A}$;

(iv) 存在 $x_0\in A$, 使得 $G(x_0)\cap(-\operatorname{int}K)\neq\emptyset$,

则存在 $T\in\mathscr{L}_+(K,D)$, $y^*\in B^{\rm st}$ 和 $(q,C_1(\varepsilon_1),C_2(\varepsilon))\in C(\varepsilon)\times\mathscr{F}_D\times\mathscr{F}_D$, 使得 $\tau_{C_1(\varepsilon_1)}(y^*)+\tau_{C_2(\varepsilon_2)(\varepsilon_2)}(y^*)\leq\langle q,y^*\rangle$, 且

$$0\in\partial^{\rm Se}_{C,\varepsilon_1}F(\overline{x},\overline{y})+\partial^{\rm Se}_{C,\varepsilon_2}T(G)(\overline{x};T(\overline{z})).\tag{6.8}$$

证明 据定理 6.4 存在 $T\in\mathscr{L}_+(K,D)$, 使得 (6.3) 成立. 由 G 的 K- 性和 T 的线性知 $T(G)$ 在 A 上是 D- 凸的. 由条件 (iii) 和引理 5.10, 有 $\operatorname{int}(\operatorname{epi}F)\cap\operatorname{epi}(T(G))\neq\emptyset$. 据定理 5.15 获得

$$\begin{aligned}&\partial^{\rm Se}_{C,\varepsilon}(F+T(G))(\overline{x},\overline{y}_1+\overline{y}_2)\\&\subseteq\bigcup_{y^*\in B^{\rm st}}\left(\bigcup_{\substack{(q,C_1(\varepsilon_1),C_2(\varepsilon_2))\in C(\varepsilon)\times\mathscr{F}_D\times\mathscr{F}_D\\ \tau_{C_1(\varepsilon_1)}(y^*)+\tau_{C_2(\varepsilon_2)}(y^*)\leq\langle q,y^*\rangle}}[\partial^{\rm Se}_{C_1,\varepsilon_1}F(\bar{x},\bar{y}_1)+\partial^{\rm Se}_{C_2,\varepsilon_2}T(G)(\bar{x},\bar{y}_2)]\right).\end{aligned}\tag{6.9}$$

因此, 存在 $y^*\in B^{\rm st}$ 和 $(q,C_1(\varepsilon_1),C_2(\varepsilon))\in C(\varepsilon)\times\mathscr{F}_D\times\mathscr{F}_D$, 使得 $\tau_{C_1(\varepsilon_1)}(y^*)+\tau_{C_2(\varepsilon_2)(\varepsilon_2)}(y^*)\leq\langle q,y^*\rangle$, 且 (6.8) 成立. 证毕.

令 A 是 X 的非空子集, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\geq0$. 记

$$\begin{aligned}{\rm N}^{{\rm Se},\,C,\varepsilon}_A(\overline{x}):=\{&T\in\mathscr{L}(X,Y)\,|\,\forall V\in N(0),\ \exists U\in N(0),\\&\text{使得 }{\rm cl}({\rm cone}(T(A)-C(\varepsilon)-T(\overline{x})))\cap(U-D)\subseteq V\}.\end{aligned}$$

令 A 是 X 的非空子集, 广义指标函数 $\delta_A:X\rightrightarrows Y$ 定义如下:

$$\delta_A(x):=\begin{cases}\{0\}, & x\in A,\\ \emptyset, & x\notin A.\end{cases}$$

注 6.7 容易验证 $\partial^{\rm Se}_{C,\varepsilon}\delta_A(\overline{x},0)={\rm N}^{{\rm Se},C,\varepsilon}_A(\overline{x})$.

定理 6.8 令 B 是 D 的有界基, $C\subseteq D\setminus\{0\}$, $\varepsilon\geq0$, 集值映射 $F:X\rightrightarrows Y$ 在 A 上是 D- 凸的, 如果下列条件成立:

(i) 存在 $x'\in\operatorname{int}E$, 使得 F 在 x' 满足条件 $\mathscr{A}$;

(ii) $(\overline{x},\overline{y})$ 是 (SVOP) 的 (C,ε)- 超有效元,

则存在 $y^*\in B^{\rm st}$ 和 $(q,C_1(\varepsilon_1),C_2(\varepsilon))\in C(\varepsilon)\times\mathscr{F}_D\times\mathscr{F}_D$, 使得 $\tau_{C_1(\varepsilon_1)}(y^*)+\tau_{C_2(\varepsilon_2)(\varepsilon_2)}(y^*)\leq\langle q,y^*\rangle$, 且

$$0\in\partial^{\rm Se}_{C_1,\varepsilon_1}F(\overline{x},\overline{y})+{\rm N}^{{\rm Se},C_2,\varepsilon_2}_A(\overline{x}).\tag{6.10}$$

证明 由条件 (ii) 有

$$0\in\partial^{\rm Se}_{C,\varepsilon}(F+\delta_A)(\overline{x};\overline{y}).\tag{6.11}$$

由条件 (i), $\operatorname{int}(\operatorname{epi}F)\neq\emptyset$. 显然, $\operatorname{int}(\operatorname{epi}F)\cap\operatorname{epi}\delta_A\neq\emptyset$. 由定理 5.15 有

$$\partial^{\rm Se}_{C,\varepsilon}(F+\delta_A)(\overline{x},\overline{y})\subseteq\bigcup_{y^*\in B^{\rm st}}\left(\bigcup_{\substack{(q,C_1(\varepsilon_1),C_2(\varepsilon_2))\in C(\varepsilon)\times\mathscr{F}_D\times\mathscr{F}_D\\ \tau_{C_1(\varepsilon_1)}(y^*)+\tau_{C_2(\varepsilon_2)}(y^*)\leq\langle q,y^*\rangle}}[\partial^{\rm Se}_{C_1,\varepsilon_1}F(\overline{x},\overline{y})+\partial^{\rm Se}_{C_2,\varepsilon_2}\delta_A(\overline{x},0)]\right).\tag{6.12}$$

据 (6.11), (6.12) 和注 6.7, 存在 $y^*\in B^{\rm st}$ 和 $(q,C_1(\varepsilon_1),C_2(\varepsilon))\in C(\varepsilon)\times\mathscr{F}_D\times\mathscr{F}_D$, 使得 $\tau_{C_1(\varepsilon_1)}(y^*)+\tau_{C_2(\varepsilon_2)(\varepsilon_2)}(y^*)\leq\langle q,y^*\rangle$, 且 (6.10) 成立. 证毕.

致谢 感谢重庆师范大学杨新民教授的鼓励与帮助.

参 考 文 献

[1] Aubin J. P., Ekeland I., Applied Nonlinear Analysis, Wiley, New York, 1984.
[2] Borwein J. M., Continuity and differentiablity properties ofconvex operators, *Proc. London Math. Soc.*, 1982, **3**: 420–444.
[3] Cheng Y. H., Fu W. T., Strong efficiency in a locally convex space, *Math. Methods Oper. Res.*, 1999, **50**: 373–384.
[4] Corley H. W., Existence and Lagrangian duality for maximization of set-valued functions, *J. Optim. Theory Appl.*, 1987, **54**: 489–501.
[5] Göpfert A., Tammer C., Riahi H., et al., Variational Methods in Partially Ordered Spaces, Springer-Verlag, New York, 2003.
[6] Gutiérrez C., Huerga L., Jiménez B., et al., Proper approximate solutions and ε-subdifferentials in vector optimization: Basic properties and limit behaviour, *Nonlinear Anal.*, 2013, **79**: 52–67.
[7] Gutiérrez C., Huerga L., Jiménez B., et al., Proper approximate solutions and ε-subdifferentials in vector optimization: Moreau–Rockafellar type theorems, *J. Convex Anal.*, 2014, **21**: 857–886.
[8] Gutiérrez C., Huerga L., Novo V., Scalarization and saddle points of approximate proper solutions in nearly subconvexlike vector optimization problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, **389**: 1046–1058.
[9] Hiriart-Urruty J. B., Lemaréchal C., Convex Analysis and Minimization Algorithms II, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
[10] Li T. Y., Xu Y. H., The strictly efficient subgradient of set-valued optimization, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2007, **75**: 361–371.
[11] Li Z. F., Benson proper efficiency in the vector optimization of set-valued maps, *J. Optim. Theory Appl.*, 1998, **98**: 623–649.
[12] Qiu Q. S., On Henig proper efficiency (in Chinese), *J. Sys. Sci. Math. Scis.*, 2011, **31**: 482–488.
[13] Rong W. D., Wu Y. N., ε-weak minimal solutions of vector optimization problems with set-valued maps, *J. Optim. Theory Appl.*, 2000, **106**: 569–579.
[14] Sach P.H., Moreau–Rockafellar theorems for nonconvex set-valued maps, *J. Optim. Theory Appl.*, 2007, **133**: 213–227.
[15] Shi S. Z., Convex Analysis (in Chinese), Shanghai Science and Technology Press, Shanghai, 1990.
[16] Taa A., Subdifferentials of multifunctions and Lagrange multipliers for multiobjective optimization problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **283**: 398–415.
[17] Taa A., ε-subdifferentials of set-valued maps and ε-weak Pareto optimality for multiobjective optimization, *Math. Methods Oper. Res.*, 2005, **62**: 187–209.
[18] Taa A., Subdifferential calculus for set-valued mappings and optimality conditions for multiobjective optimization problems, *J. Optim. Theory Appl.*, 2019, **180**: 428–441.
[19] Tuan L. A., ε-optimality conditions for vector optimization problems with set-valued maps, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2010, **31**: 78–95.
[20] Xia L. Y., Qiu J. H., Superefficiency in vector optimization with nearly subconvexlike set-valued maps, *J. Optim. Theory Appl.*, 2008, **136**: 125–137.
[21] Yang X. M., Li D., Wang S. Y., Near-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions, *J. Optim. Theory Appl.*, 2001, **110**: 413–427.
[22] Yu G. L., Liu S. Y., The Henig efficient subdifferential of set-valued mapping and stability, *Acta Math. Sin. Chin. Ser.*, 2008, **28**: 438–446.
[23] Zheng X. Y., Proper efficiency in locally convex topological vector spaces, *J. Optim. Theory Appl.*, 1997, **94**: 469–486.
[24] Zhou Z. A., Yang X. M., Scalarization of ε-super efficient solutions of set-valued optimization problems in real ordered linear spaces, *J. Optim. Theory Appl.*, 2014, **162**: 680–693.
[25] Zhou Z. A., Yang X. M., Peng J. W., ε-strict subdifferentials of set-valued maps and optimality conditions, *Nonlinear Anal.*, 2012, **75**: 3761–3775.
[26] Zhou Z. A., Yang X. M., Peng J. W., ε-Henig proper efficiency of set-valued optimization problems in real ordered linear spaces, *Optim. Lett.*, 2014, **8**: 1813–1827.