文章编号: 0583-1431(2021)02-0231-12 **文献标识码: A**

Sobolev–Lorentz 范数约束下的次临界型 Adams 不等式

朱茂春 刘宇航

江苏大学数学科学学院 镇江 212013
E-mail: zhumaochun2006@126.com; 409686570@qq.com

摘 要 本文在 Sobolev–Lorentz 空间 $W^2L^{2,q}(\mathbb{R}^4)$ 的范数约束下得到了一个最佳的二阶次临界型 Adams 不等式. 进一步, 当次临界指标逼近最佳常数时, 得到了 Adams 泛函的上、下界的估计. 本文主要采用了 Lam 和 Lu [A new approach to sharp Moser–Trudinger and Adams type inequalities: a rearrangement-free argument, *J. Diff. Equ.*, 2013, **255**(3): 298–325] 的分割水平集方法.

关键词 次临界; Adams 不等式; Sobolev–Lorentz 空间; 重排理论
MR(2010) 主题分类 35B33, 46E30
中图分类 O178

A Sharp Subcritical Adams Inequality in Lorentz Sobolev Space

Mao Chun ZHU Yu Hang LIU

School of Mathematical Sciences, Jiangsu University,
Zhenjiang 212013*, P. R. China*
E-mail: *zhumaochun*2006@126.*com*; 409686570@*qq.com*

Abstract We obtain a sharp second order subcritical Adams inequality in Lorentz Sobolev space $W^2L^{2,q}(\mathbb{R}^4)$. Moreover, the lower and upper bounds asymptotically for the subcritical Adams functional is obtained. Our approach is based on the rearrangement free argument developed by Lam and Lu [A new approach to sharp Moser–Trudinger and Adams type inequalities: a rearrangement-free argument, *J. Diff. Equ.*, 2013, **255**(3): 298–325].

Keywords subcritical; Adams' inequality; Sobolev–Lorentz space; rearrangement argument
MR(2010) Subject Classification 35B33, 46E30
Chinese Library Classification O178

收稿日期: 2020-04-01; 接受日期: 2020-05-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11601190, 11701162, 11661006);
江苏省青年基金资助项目 (BK20160483); 江苏大学基础基金资助项目 (16JDG043)

1 引言

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上有限测度区域, k 是一个非负整数, $W_0^{k,p}(\Omega)$ 是由在边界处的取值以及从 1 阶直到 k 阶的导数为 0 的函数所组成的 Sobolev 空间, 即 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数

$$\left[\|f\|_{L^p(\Omega)}^p+\sum_{j=1}^k\|\nabla^j f\|_{L^p(\Omega)}^p\right]^{1/p}$$

下的完备化空间. 经典的 Sobolev 嵌入定理告诉我们: 只要 $p<\frac{n}{k}$, 就有 $W_0^{k,p}(\Omega)\subseteq L^q(\Omega)$. 于是当 $p=n/k$ 时, 由 Sobolev 嵌入定理可以知道

$$W_0^{k,\frac{n}{k}}(\Omega)\subseteq L^r(\Omega),\quad \forall\, 0<r<\infty,$$

但是 $W_0^{k,\frac{n}{k}}(\Omega)\nsubseteq L^\infty(\Omega)$. 在 $k=1$ 时, 最佳嵌入由著名的 Trudinger–Moser 不等式 [13, 21]

$$\sup_{\|\nabla f\|_n\le 1}\int_\Omega \exp(\alpha_n|f|^{n/(n-1)})dx<C|\Omega| \tag{1.1}$$

给出, 其中 $\alpha_n=(nv_n^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n-1}}$, $v_n=\pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$, v_n 是 $\mathbb{R}^n$ 的单位球测度, Γ 是伽马函数. 这里常数 α_n 是最佳的, 即若将 (1.1) 中 α_n 替换为一个更大的数, 上面的积分就不一致有界了. 当 $k>1$ 时, 最佳嵌入不等式主要归功于 Adams [2]:

定理 1.1 (Adams 不等式) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个开的有界区域. 如果 m 是一个小于 n 的正整数, 那么一定存在一个常数 $C_0=C(n,m)>0$ 满足对于任何 $f\in W_0^{m,\frac{n}{m}}(\Omega)$, 若 $\|\nabla^m f\|_{L^{\frac{n}{m}}(\Omega)}\le 1$, 其中

$$\nabla^m f=\begin{cases}\Delta^{\frac{m}{2}}f, & m=2h,\\ \nabla\Delta^{\frac{m-1}{2}}f, & m=2h+1,\end{cases}\qquad (h\in\mathbb{N}),$$

则对于任意的 $\alpha\le\beta_{n,m}$, 均有

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \exp(\alpha|f(x)t|^{\frac{n}{n-m}})dx\le C_0, \tag{1.2}$$

其中

$$\beta_{n,m}=\begin{cases}\left(\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma(\frac{m}{2})}{v_n^{\frac{n-m}{n}}\Gamma(\frac{n-m}{2})}\right)^{\frac{n}{n-m}}, & m=2h+1,\\ \left(\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma(\frac{m+1}{2})}{v_n^{\frac{n-m}{n}}\Gamma(\frac{n-m+1}{2})}\right)^{\frac{n}{n-m}}, & m=2h,\end{cases}\qquad (h\in\mathbb{N}),$$

这里的 $\beta_{n,m}$ 是最佳的, 即对于任意 $\alpha>\beta_{n,m}$, 上面的积分可以无限大.

后来, Tarsi [20] 证明了 Adams 不等式 (1.1) 在更大的 Sobolev 函数空间, 即具有 Navier 边界条件的函数空间

$$W_N^{m,\frac{n}{m}}(\Omega)=\left\{f\in W^{m,\frac{n}{m}}:\Delta^j u(x)=0\ 对\ \partial\Omega\ 和\ 0\le j\le\left[\frac{m-1}{2}\right]\right\} \tag{1.3}$$

依旧成立.

1995 年, Ozawa [14] 在条件 $\|\Delta^{\frac{m}{2}}u\|_{\frac{n}{m}}\le 1$ 约束下得到 Sobolev 空间 $W^{m,\frac{n}{m}}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Adams 不等式. 但是利用文 [14] 中的方法并不能得到最佳常数. 2013 年, Ruf 和 Sani [15] 在强约束

$$\{u\in W^{m,\frac{n}{m}}\mid \|(I-\Delta)^{\frac{m}{2}}\|_{\frac{n}{m}}\le 1\}$$

下得到了一个偶数维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的精确 Adams 不等式. 奇数维欧氏空间上的精确 Adams 不等式被 Lam 和 Lu [9] 得到. 后来, Lam 和 Lu [8] 在得到了一个分数阶 $\gamma < n$ Sobolev 空间 $W^{\gamma,\frac{n}{\gamma}}(\mathbb{R}^n)$ 上的精确 Adams 不等式. 更进一步, 他们利用具有齐次 Navier 边界条件 Adams 不等式 [20] 和分割水平集方法建立了 $\mathbb{R}^4$ 上的二阶临界型 Adams 不等式:

$$S(\alpha) = \sup_{u\in H}\int_{\mathbb{R}^4}(\exp(\alpha|u|^2)-1)dx < \infty, \tag{1.4}$$

其中 $\alpha \le 32\pi^2$,

$$H := \left\{u \in H^2(\mathbb{R}^4) \,|\, \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^4)} = \left(\int_{\mathbb{R}^4}|u|^2+|\Delta u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1\right\}.$$

若 $\alpha > 32\pi^2$, 则 $S(\alpha)=\infty$. 之后, Lam, Lu 和 Zhang [10] 得到了在 Dirichlet 范数约束下的次临界型 Adams 不等式: 当 $\alpha < 32\pi^2$, 有

$$S(\alpha) = \sup_{\int_{\mathbb{R}^4}|\Delta u|^2dx\le 1}\frac{1}{\|u\|_{L^2}^2}\int_{\mathbb{R}^4}(\exp(\alpha|u|^2)-1)dx < \infty \tag{1.5}$$

成立, 而当 $\alpha \ge 32\pi^2$ 时, 则 $S(\alpha)=\infty$. 并且他们还证明了临界 Adams 不等式 (1.4) 和次临界型 Adams 不等式 (1.5) 具有某种等价性. 全空间上 Adams 不等式的其他研究可见文 [6, 7].

本文关注 Lorentz–Sobolev 空间范数约束下的 Trudinger–Moser 不等式和 Adams 不等式. 首先回顾一下 Lorentz 空间上的相关 Trudinger–Moser 不等式. 首个 Lorentz 空间上 Trudinger–Moser 不等式由 Alvino, Ferone 和 Trombetti [4] 得到 (奇异情形可见 Lu 和 Tang 的工作 [12]):

定理 1.2 设 Ω 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中测度有限的区域, $n\ge 2$, $1<q<+\infty$. 若 $\|\nabla f\|_{n,q}\le 1$, 则有

$$\int_\Omega \exp(\alpha_{n,q}|f(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx \le C,$$

其中 $\alpha_{n,q} = (nv_n^{1/n})^{\frac{q}{q-1}}$. 这里 $\alpha_{n,q}$ 是最佳的, 即若 $\alpha_{n,q}$ 被任意 $\alpha > \alpha_{n,q}$ 代替, 上面的积分可以任意大.

一个自然的问题是上面的不等式在无界区域上是否依然成立, Cassani 和 Tarsi 在文 [5] 中针对该问题给出了一个肯定的回答, 他们得到了如下的无界区域上的 Trudinger–Moser 型不等式 (奇异情形可见 Lu 和 Tang 的工作 [12]):

定理 1.3 设 $n\ge 2$, $1<q<+\infty$. 若 $f\in W^1L^{n,q}(\mathbb{R}^n)$ 满足约束 $\|\nabla f\|_{n,q}+\|f\|_{n,q}\le 1$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\alpha_{n,q}|f(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx \le C, \tag{1.6}$$

其中 $\Phi(t) = \mathrm{e}^t - \sum_{j=0}^{k_0}\frac{t^j}{j!}$, $k_0 = [\frac{(q-1)n}{q}]$, 且 $\alpha_{n,q}$ 是最佳的, 即若 $\alpha_{n,q}$ 被任意 $\alpha > \alpha_{n,q}$ 代替, 上面的积分可以任意大.

此后, 在 Adachi 和 Tanaka [1] 的 Sobolev 范数约束下的次临界型 Trudinger–Moser 不等式的基础之上, Lu 和 Tang [12] 建立了 Lorentz 范数约束下的次临界型 Trudinger–Moser 不等式:

定理 1.4 设 $n\ge 2$, $1<q<+\infty$. 若 $f\in W_0^1L^{n,q}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\|\nabla f\|_{n,q}\le 1$, 则存在常数 c_0, 使得只要 $\alpha < \alpha_{n,q}$, 就有

$$\frac{1}{\|f\|_{n,q}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\alpha|f(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx \le C \tag{1.7}$$

成立. 这里的常数 $\alpha_{n,q}$ 是最佳的, 即若 $\alpha \ge \alpha_{n,q}$, 则上面的积分可以任意大.

Lorentz 空间上的临界不等式 (1.6) 和次临界型不等式 (1.7) 也具有某种等价性 [19]. 类似于一阶情形, 在 Lorentz 空间也有相应的高阶 Adams 不等式 [3]:

定理 1.5 设 Ω 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的测度有限的开区域, $n \geq 2$, $1 < q < +\infty$. 若 $f \in W_0^m L^{\frac{n}{m},q}(\Omega)$ 满足约束 $\|\nabla^m f\|_{\frac{n}{m},q} \leq 1$, 则有

$$\int_\Omega \exp(\beta_{n,m}^{\frac{q}{q-1}}|f(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx \leq C. \tag{1.8}$$

这个常数 $\beta_{n,m}^{\frac{q}{q-1}}$ 是最佳的, 即若 $\beta_{n,m}^{\frac{q}{q-1}}$ 被 $\beta > \beta_{n,m}^{\frac{q}{q-1}}$ 代替, 上面的积分可以任意大.

本文将研究全空间 $\mathbb{R}^4$ 的 Adams 不等式, 主要结果如下:

定理 1.6 设 $1 < q < +\infty$ 和 $\alpha_q = (32\pi^2)^{\frac{q}{2(q-1)}}$. 令

$$ATA(\alpha) = \sup_{f \in W_0^2 L^{2,q}(\mathbb{R}^4)\setminus\{0\},\, \|\Delta f\|_{2,q} \leq 1} \frac{1}{\|f\|_{2,q}^2} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|f(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx,$$

其中 $\Phi(t) = \mathrm{e}^t - \sum_{j=0}^{k_0} \frac{t^j}{j!}$, $k_0 = [\frac{4(q-1)}{q}]$. 则对于任意的 $0 < \alpha < \alpha_q$, 存在常数 $C_1(q)$, 使得

$$ATA(\alpha) \leq \frac{C_1(q)}{(1-(\frac{\alpha}{\alpha_q})^{q-1})^{\frac{2}{q}}}. \tag{1.9}$$

如果 α 足够接近于 α_q, 则一定存在常数 $C_2(q)$, 使得

$$ATA(\alpha) \geq \frac{C_2(q)}{(1-(\frac{\alpha}{\alpha_q})^{q-1})^{\frac{2}{q}}}. \tag{1.10}$$

这里常数 α_q 是最佳的, 即 $ATA(\alpha_q) = +\infty$.

这篇文章的证明方法主要是利用分割水平集方法, 该方法曾被 Lam 和 Lu [8] 用于研究全空间的临界 Adams 不等式.

2 背景知识

设 $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, 定义 f 的重排函数为

$$f^*(s) = \sup\{t > 0,\, d_f(t) > s\},$$

其中 $d_f(t) := \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, f(x) > t\}$. 记 $f^\#: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ 为

$$f^\#(x) = f^*(v_4|x|^4),$$

其中 v_4 是 $\mathbb{R}^4$ 的单位球的测度. 由文 [11] 可知对于每个连续增函数 $\Psi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, 均有

$$\int_{\mathbb{R}^4} \psi(f)dx = \int_{\mathbb{R}^4} \psi(f^\#)dx.$$

令 $f^{**} := \frac{1}{s}\int_0^s f^*\,dt$, 由于 f^* 是非增的, 由 f^{**} 的定义可知 f^{**} 也是非增的且满足 $f^* \leq f^{**}$. 关于重排函数的更多性质可见文 [11, 16, 18]. 利用重排函数我们可以引入 Lorentz 函数空间 $L^{p,q}$, 其中的函数 Ψ 满足

$$\|\Psi\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty [\Psi^*(t)t^{\frac{1}{p}}]^q \frac{1}{t}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

其中 $1 < p < \infty$ 且 $1 \leq q < \infty$. 由定义知 $L^{p,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$, 当 $q > p$ 时, $\|\Psi\|_{p,q}$ 不是范数. 但是可以验证

$$\|\Psi\|_{p,q}^* = \left(\int_0^\infty [\Psi^{**}(t)t^{\frac{1}{p}}]^q \frac{1}{t}\,dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

利用 Hardy 不等式 [16] 可以证明这两个量是等价的, 即存在常数 $C(p,q)$, 使得

$$\|\Psi\|_{p,q} \le \|\Psi\|_{p,q}^* \le C(p,q)\|\Psi\|_{p,q}$$

成立. 关于更多 Lorentz 空间的信息, 可见 Stein 和 Weiss 的专著 [16].

类似于经典的 Sobolev 空间, 我们也可以定义 Lorentz–Sobolev 空间 $W_0^2L^{2,q}(\mathbb{R}^4)$ 为由弱导数属于 Lorentz 空间 $L^{p,q}(\mathbb{R}^4)$ 的所有函数构成, 即

$$W_0^2L^{2,q}(\mathbb{R}^4) = \mathrm{Cl}(\{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4) : \|f\|_{2,(2,q)} < +\infty\}),$$

这里 $\|f\|_{2,(2,q)}^q = \|f\|_{2,q}^q + \|\nabla f\|_{2,q}^q + \|\Delta f\|_{2,q}^q$, 其中 $1 < q < \infty$.

本节的最后我们介绍一个重要的径向结果 [17]:

引理 2.1 如果 $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $1 \le q < +\infty$, 那么

$$f^*(t) \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{p,q}}{t^{\frac{1}{p}}}.$$

3 次临界 Adams 泛函的渐近上界

本节讨论当 $\alpha \to \alpha_q$ 时次临界 Adams 不等式的渐近上界. 首先建立以下引理:

引理 3.1

$$ATA(\alpha) = \sup_{\|\Delta f\|_{2,q}\le 1,\, \|f\|_{2,q}=1} \int_{\mathbb{R}^4} \Phi(\alpha|f(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx.$$

证明 对于任意 $f \in W_0^2L^{2,q}(\mathbb{R}^4)$ 满足 $\|\Delta f\|_{2,q} \le 1$, 定义 $v(x) = f(\lambda x)$, 其中 $\lambda = \|f\|_{2,q}^{1/2}$. 因为洛伦兹范数满足以下伸缩性质:

$$\|f(\varepsilon x)\|_{2,q} = \varepsilon^{-2}\|f(x)\|_{2,q}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

于是

$$\|\Delta v\|_{2,q} = \lambda^2\|\Delta f(\varepsilon x)\|_{2,q} = \lambda^2\lambda^{-2}\|\Delta f(x)\|_{2,q} \le 1$$

和 $\|v\|_{2,q} = \lambda^{-2}\|f\|_{2,q} = 1$. 因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^4} \Phi(\alpha|v(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx &= \int_{\mathbb{R}^4} \Phi(\alpha|f(\lambda x)|^{\frac{q}{q-1}})dx \\ &= \frac{1}{\lambda^4}\int_{\mathbb{R}^4} \Phi(\alpha|f(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx = \frac{1}{\|f\|_{2,q}^2}\int_{\mathbb{R}^4} \Phi(\alpha|f(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}ATA(\alpha) &\le \sup_{\|\Delta v\|_{2,q}\le 1,\, \|v\|_{2,q}=1} \int_{\mathbb{R}^4} \Phi(\alpha|v(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx \\ &\le \sup_{\|\Delta f\|_{2,q}\le 1} \frac{1}{\|f\|_{2,q}^2}\int_{\mathbb{R}^4} \Phi(\alpha|f(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx = ATA(\alpha).\end{aligned}$$

结论得证.

由该结论, 我们可以假设 $\|f\|_{2,q} = 1$. 为了得到次临界型 Adams 不等式的渐近上界, 需要下面的在 Lorentz–Sobolev 空间中有齐次 Navier 边界条件的 Adams 不等式:

引理 3.2 设 Ω 是 $\mathbb{R}^4$ 中测度有限的开区域, $1 < q < +\infty$. 对于任意满足 $\|\Delta f\|_{2,q} \le 1$ 的 $f \in W_N^2L^{2,q}(\Omega) := W^2L^{2,q} \cap W_0^1L^{2,q}(\Omega)$, 均有

$$\int_\Omega \exp(\alpha_q|f(x)|^{\frac{q}{q-1}})dx \le C \tag{3.1}$$

成立. 这里常数 α_q 是最佳的, 即若 α_q 被任何 $\alpha > \alpha_q$ 替代, 上面的积分可以任意大.

证明 由稠密性, 只考虑光滑函数 $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = 0$. 记 $f := -\Delta u$, 则 u 就是下面方程的解:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases}$$

对 f 进行延拓, 使得延拓函数在 Ω 外为 0, 记

$$\bar{f} := \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega^c, \end{cases}$$

并且记

$$\bar{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{8v_4} |x-y|^{-2} |\bar{f}(y)| dy,$$

则必有 $-\Delta \bar{u} = |\bar{f}|$ 在 $\mathbb{R}^4$ 上成立. 由于 $\bar{u}(x) \geq 0$. 利用极大值原理可以知道在 Ω 上, $|u| \leq \bar{u}$. 由于 $\bar{u}$ 是一个积分表达形式, 且满足文 [3, 定理 1.1] 的证明中所需要的条件 (2.7), 此时利用文 [3] 同样的方法就可以证明该引理, 这里证明细节省略.

下面证明 (1.9).

证明 利用稠密性和引理 3.1, 我们可以假设 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$, 且 $\|\Delta f\|_{2,q} \leq 1$ 和 $\|f\|_{2,q} = 1$. 设

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : |f(x)| > \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_q}\right)^{q-1}\right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

利用重排性质知道对于任意的 $t \in [0, |\Omega|]$, 均有

$$f^*(t) > \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_q}\right)^{q-1}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

利用引理 2.1 我们得到

$$f^*(t) \leq \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{2,q}}{t^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}.$$

因此

$$t \leq \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{2}{q}} \frac{1}{(1 - (\frac{\alpha}{\alpha_q})^{q-1})^{\frac{2}{q}}}, \text{ 对于任意 } t \in [0, |\Omega|] \text{ 成立}.$$

所以

$$|\Omega| \leq \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{2}{q}} \frac{1}{(1 - (\frac{\alpha}{\alpha_q})^{q-1})^{\frac{2}{q}}}. \tag{3.2}$$

现在我们将原来的积分拆分为两部分:

$$\int_{\mathbb{R}^4} \Phi(\alpha |f(x)|^{\frac{q}{q-1}}) dx = I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 = \int_\Omega \Phi(\alpha |f(x)|^{\frac{q}{q-1}}) dx \quad \text{和} \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^4 \setminus \Omega} \Phi(\alpha |f(x)|^{\frac{q}{q-1}}) dx.$$

首先, 我们估计 I_2. 因为

$$\mathbb{R}^4\backslash\Omega \subset \{|f(x)|<1\},$$

于是

$$\begin{aligned} I_2 &\le \int_{\{|f|\le 1\}} \Phi(\alpha|f|^{\frac{q}{q-1}})dx = \int_{\{|f|\le 1\}} \sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!}|f(t)|^{\frac{q}{q-1}j}dt \\ &\le C_q \int_{\{|f|\le 1\}} |f(t)|^{\frac{q}{q-1}([\frac{(q-1)4}{q}]+1)}dt. \end{aligned}$$

记 $|f(x)>\alpha|=\mu(\alpha)$, 利用 L^p 积分和分布函数的关系

$$\int_{\mathbb{R}^4} |f|^p dx = p\int_0^{\infty} \alpha^{p-1}\mu(\alpha)d\alpha,$$

可以得到

$$\int_{|f|\le 1} |f(t)|^{\frac{q}{q-1}([\frac{(q-1)4}{q}]+1)}dt \le C_q \int_0^1 \alpha^{\frac{q}{q-1}([\frac{(q-1)4}{q}]+1)-1}\mu(\alpha)d\alpha.$$

因此

$$I_2 \le C_q \int_0^1 \alpha^{\frac{q}{q-1}([\frac{(q-1)4}{q}]+1)-1}\mu(\alpha)d\alpha,$$

其中

$$\frac{q}{q-1}\left(\left[\frac{(q-1)4}{q}\right]+1\right) > \frac{q}{q-1}\left(\frac{(q-1)4}{q}-1+1\right) = 4.$$

下面估计 $\mu(\alpha)$, 因为

$$f^*(t) \le \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}},$$

利用分布函数和重排的关系, 可知

$$\mu(\alpha) \le C_q \frac{1}{\alpha^2},$$

所以

$$\begin{aligned} I_2 &\le C_q \int_0^1 \alpha^{\frac{q}{q-1}([\frac{(q-1)4}{q}]+1)-1}\frac{1}{\alpha^2}d\alpha \\ &= C_q \int_0^1 \alpha^{\frac{q}{q-1}([\frac{(q-1)4}{q}]+1)-2-1}d\alpha < C_q. \end{aligned}$$

为了估计 I_1, 我们设

$$v(x) = \left[|f(x)| - \left(1-\left(\frac{\alpha}{\alpha_q}\right)^{q-1}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\chi_\Omega,$$

不难验证

$$v \in W_N^2L^{2,q}(\Omega),$$

其中 $W_N^2L^{2,q}(\Omega)$ 是有齐次 Navier 边界条件的 Sobolev 空间 (见 (1.3)).

此时借助于引理 3.2, 我们得到

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha_q\left|\frac{v}{\|\Delta v\|_{2,q}}\right|^{\frac{q}{q-1}}\right)dx \le C_q|\Omega|.$$

因为

$$\|\Delta v\|_{2,q} \le \|\Delta f\|_{2,q} \le 1,$$

所以

$$\int_\Omega \exp(\alpha_q |v|^{\frac{q}{q-1}})dx \le C_1|\Omega|. \tag{3.3}$$

记 $\varepsilon = \frac{\alpha_q}{\alpha} - 1 > 0$, 利用基本不等式:

$$(a+b)^p \le \varepsilon b^p + (1-(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}})^{1-p} a^p,$$

可知对于任意 $a, b, \varepsilon > 0$ 和 $p > 1$, 均有

$$\begin{aligned} |f(x)|^{\frac{q}{q-1}} &= \left(v(x) + \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_q}\right)^{q-1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{q}{q-1}} \\ &\le (1+\varepsilon)|v|^{\frac{q}{q-1}} + \left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^{q-1}}\right)^{\frac{1}{1-q}} \left(\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_q}\right)^{q-1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{q}{q-1}} \\ &= \frac{\alpha_q}{\alpha}|v|^{\frac{q}{q-1}} + \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_q}\right)^{q-1}\right)^{\frac{1}{1-q}} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_q}\right)^{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}} \\ &= \frac{\alpha_q}{\alpha}|v|^{\frac{q}{q-1}} + 1. \end{aligned}$$

结合 (3.2) 和 (3.3), 我们得到

$$\begin{aligned} \int_\Omega \exp\left(\alpha|f|^{\frac{q}{q-1}}\right)dx &\le \int_\Omega \exp\left(\alpha\left(\frac{\alpha_q}{\alpha}|v|^{\frac{q}{q-1}} + 1\right)\right)dx \\ &\le \exp(\alpha_q)\int_\Omega \exp(\alpha_q|v|^{\frac{q}{q-1}})dx \le C_q|\Omega| \\ &\le \frac{C_q}{(1-(\frac{\alpha}{\alpha_q})^{q-1})^{\frac{2}{q}}}. \end{aligned}$$

所以

$$ATA(\alpha) \le \frac{C_1(q)}{(1-(\alpha/\alpha_q)^{q-1})^{\frac{2}{q}}}.$$

结论得证.

4 次临界 Adams 泛函的渐近下界

本节考虑次临界 Adams 泛函的渐近下界, 也就是 (1.10).

证明 考虑特殊函数序列

$$f_k(x) = \begin{cases} C_k\sqrt{\dfrac{\log k}{32\pi^2}} - \sqrt{\dfrac{k}{8\pi^2\log k}}C_k|x|^2 + \dfrac{C_k}{\sqrt{8\pi^2\log k}}, & \text{若 } 0 \le |x| \le \left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{4}}, \\ \dfrac{C_k\log(\frac{1}{|x|})}{\sqrt{2\pi^2\log k}}, & \text{若 } \left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{4}} < |x| \le 1, \\ \eta_k, & \text{若 } 1 < |x|, \end{cases}$$

其中

$$C_k=\bigg(\int_0^{\frac{v_4}{k}}\bigg(4\sqrt{\frac{k}{2\pi^2\log k}}s^{\frac{1}{2}}\bigg)^q\frac{ds}{s}+\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}\bigg(\frac{\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\frac{2}{\sqrt{s}}s^{\frac{1}{2}}\bigg)^q\frac{ds}{s}\bigg)^{-\frac{1}{q}}.$$

$\eta_k\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足边界条件:

$$\eta_k|_{\partial B_1}=0,\quad \frac{\partial\eta_k}{\partial v}\bigg|_{\partial B_1}=\frac{C_k}{\sqrt{2\pi^2\log k}},$$

易知 $f_k\in W^2L^{2,q}(\mathbb{R}^4)$, 通过直接计算可得, 当 $k\to+\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}C_k&=\bigg(\int_0^{\frac{v_4}{k}}\bigg(-4\sqrt{\frac{k}{2\pi^2\log k}}s^{\frac{1}{2}}\bigg)^q\frac{ds}{s}+\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}\bigg(-\frac{2\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\bigg)^q\frac{ds}{s}\bigg)^{-\frac{1}{q}}\\
&=\bigg(\bigg(-4\sqrt{\frac{k}{2\pi^2\log k}}\bigg)^q\int_0^{\frac{v_4}{k}}(s^{\frac{1}{2}})^q\frac{ds}{s}+\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}\bigg(-\frac{\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\frac{2}{\sqrt{s}}s^{\frac{1}{2}}\bigg)^q\frac{ds}{s}\bigg)^{-\frac{1}{q}}\\
&=\bigg(\bigg(-4\sqrt{\frac{k}{2\pi^2\log k}}\bigg)^q\frac{2}{q}\bigg(\frac{v_4}{k}\bigg)^{\frac{1}{2}q}+\bigg(-\frac{2\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\bigg)^q\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}1\frac{ds}{s}\bigg)^{-\frac{1}{q}}\\
&=\bigg(-\bigg(\frac{-2\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\bigg)^q\frac{(-2)^{q+1}}{q}+\log k\bigg(-\frac{2\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\bigg)^q\bigg)^{-\frac{1}{q}}\\
&=\frac{1}{\big((-\frac{(-2)^{q+1}}{q}+\log k\big)\big(\frac{-2\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\big)^q\big)^{\frac{1}{q}}}\sim(\log k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

和

$$\eta_k,|\nabla\eta_k|,\,\Delta\eta_k=O\bigg(\frac{1}{(\log k)^{\frac{1}{q}}}\bigg).$$

进一步, 通过直接计算可得

$$f_k^*(s)=\begin{cases}C_k\bigg(\dfrac{\sqrt{\log k}}{4\pi\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\pi\sqrt{2\log k}}-\dfrac{\sqrt{ks}}{2\pi\sqrt{2v_4\log k}}\bigg), & 0\le s\le\dfrac{v_4}{k},\\ \dfrac{C_k\ln(\frac{v_4}{s})}{4\pi\sqrt{2\log k}}, & \dfrac{v_4}{k}<s\le v_4,\\ {\eta_k}^*, & v_4<s,\end{cases}$$

$$\Delta f_k(x)=\begin{cases}-4C_k\sqrt{\dfrac{k}{2\pi^2\log k}}, & 0\le|x|\le\bigg(\dfrac{1}{k}\bigg)^{\frac{1}{4}},\\ -\dfrac{C_k}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\dfrac{2}{|x|^2}, & \bigg(\dfrac{1}{k}\bigg)^{\frac{1}{4}}<|x|\le1,\\ \Delta\eta_k, & 1<|x|.\end{cases}$$

当 k 足够大时, 有

$$\Delta\eta_k\le\frac{C}{\log k}\le\frac{2C_k}{\sqrt{2\pi^2\log k}},$$

于是

$$
(\Delta f_k)^*(s)=\begin{cases}-4C_k\sqrt{\dfrac{k}{2\pi^2\log k}}, & 0\le s\le \dfrac{v_4}{k},\\ -\dfrac{C_k\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\dfrac{2}{\sqrt{s}}, & \dfrac{v_4}{k}<s\le v_4,\\ (\Delta\eta_k)^*, & v_4<s.\end{cases}
$$

通过计算可得

$$
\begin{aligned}
\|\Delta f_k\|_{2,q}^q &= \int_0^{+\infty}\left((\Delta f_k)^* s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}=\int_0^{\frac{v_4}{k}}\left(-4C_k\sqrt{\frac{k}{2\pi^2\log k}}s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}\\
&\quad+\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}\left(\frac{-C_k\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\frac{2}{\sqrt{s}}s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}+\int_{v_4}^{+\infty}\left(|\Delta\eta_k|^* s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}\\
&=(C_k)^q\left(\int_0^{\frac{v_4}{k}k}\left(-4\sqrt{\frac{k}{2\pi^2\log k}}s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}+\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}\left(-\frac{\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\frac{2}{\sqrt{s}}s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}\right)+O\left(\frac{1}{\log k}\right)\\
&=1+O\left(\frac{1}{\log k}\right)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\|f_k\|_{2,q}^q &= \int_0^{\frac{v_4}{k}}\left(C_k\left(\frac{\sqrt{\log k}}{4\pi\sqrt2}+\frac{1}{2\pi\sqrt{2\log k}}-\frac{\sqrt{ks}}{2\pi\sqrt{2v_4\log k}}\right)s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}\\
&\quad+\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}\left(\frac{C_k\log(\frac{v_4}{s})}{4\pi\sqrt{2\log k}}s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}+\int_1^{+\infty}\left(\eta_k^* s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}\\
&=(C_k)^q\left(\int_0^{\frac{v_4}{k}}\left(\left(\frac{\sqrt{\log k}}{4\pi\sqrt2}+\frac{1}{2\pi\sqrt{2\log k}}-\frac{\sqrt{ks}}{2\pi\sqrt{2v_4\log k}}\right)s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}+\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}\left(\frac{\log(\frac{v_4}{s})}{4\pi\sqrt{2\log k}}s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}\right)\\
&\quad+O\left(\frac{1}{\log k}\right)
\end{aligned}
$$

(利用 C_k 的定义)

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\int_0^{\frac{v_4}{k}}\left(\left(\frac{\sqrt{\log k}}{4\pi\sqrt2}+\frac{1}{2\pi\sqrt{2\log k}}-\frac{\sqrt{ks}}{2\pi\sqrt{2v_4\log k}}\right)s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}+\left(\frac{1}{4\pi\sqrt{2\log k}}\right)^q\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}\left(\log\left(\frac{v_4}{s}\right)s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}}{\int_0^{\frac{v_4}{k}}\left(4\sqrt{\frac{k}{2\pi^2\log k}}s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}+\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}\left(\frac{\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\frac{2}{\sqrt s}s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}}+O\left(\frac{1}{\log k}\right)\\
&\le\frac{\left(\frac{\sqrt{\log k}}{4\pi\sqrt2}+\frac{1}{2\pi\sqrt{2\log k}}\right)^q\int_0^{\frac{v_4}{k}}\left(s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}+\left(\frac{1}{4\pi\sqrt{2\log k}}\right)^q\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}\left(\log\left(\frac{v_4}{s}\right)s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}}{\int_0^{\frac{v_4}{k}}\left(4\sqrt{\frac{k}{2\pi^2\log k}}s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}+\int_{\frac{v_4}{k}}^{v_4}\left(\frac{\sqrt{v_4}}{\sqrt{2\pi^2\log k}}\frac{2}{\sqrt s}s^{\frac12}\right)^q\frac{ds}{s}}+O\left(\frac{1}{\log k}\right)\\
&=\frac{\left(\frac{\sqrt{\log k}}{4\pi\sqrt2}+\frac{1}{2\pi\sqrt{2\log k}}\right)^q\frac{2}{q}\left(\frac{v_4}{k}\right)^{\frac q2}+\left(\frac{1}{4\pi\sqrt{2\log k}}\right)^q\int_0^{\log k}(v_4)^{\frac q2}t^q\mathrm{e}^{-\frac{qt}{2}}ds}{\left(2\sqrt{\frac{v_4}{2\pi^2\log k}}\right)^q\left(\frac{2q+1}{q}+\log k\right)}+O\left(\frac{1}{\log k}\right)\\
&=\frac{\left(\frac{\log k}{4\pi\sqrt2}+\frac{1}{2\pi\sqrt2}\right)^q\frac{2}{q}\left(\frac{v_4}{k}\right)^{\frac q2}+\left(\frac{1}{4\pi\sqrt2}\right)^q\int_0^{\log k}(v_4)^{\frac q2}t^q\mathrm{e}^{-\frac{qt}{2}}ds}{\left(2\sqrt{\frac{v_4}{2\pi^2}}\right)^q\left(\frac{2q+1}{q}+\log k\right)}+O\left(\frac{1}{\log k}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sim \frac{q\big(\frac{\log k}{4\pi\sqrt{2k}}+\frac{1}{2\pi\sqrt{2k}}\big)^{q-1}\frac{2}{q}(v_4)^{\frac{q}{2}}\big(\frac{\frac{1}{k}4\pi\sqrt{2k}-\log k 2\pi\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{k}}}{32\pi^2 k}-\frac{1}{4\pi\sqrt{2k^3}}\big)+\big(\frac{1}{4\pi\sqrt{2}}\big)^q\frac{1}{k}(v_4)^{\frac{q}{2}}(\log k)^q k^{-\frac{q}{2}}}{\big(2\sqrt{\frac{v_4}{2\pi^2}}\big)^q\frac{1}{k}} \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\log k}\right) \\
&= -\left(\frac{\log k}{4\pi\sqrt{2k}}+\frac{1}{2\pi\sqrt{2k}}\right)^{q-1}(v_4)^{\frac{q}{2}}\left(\frac{\log k}{4\pi\sqrt{2k}}\right)+\left(\frac{1}{4\pi\sqrt{2}}\right)^q(v_4)^{\frac{q}{2}}(\log k)^q k^{-\frac{q}{2}}+O\left(\frac{1}{\log k}\right) \\
&\sim O\left(\frac{1}{\log k}\right).
\end{aligned}
$$

当 α 足够接近 α_q, 记

$$\theta=\left(1-\frac{\alpha}{\alpha_q}\right)\log k.$$

不难验证

$$\frac{1-(\frac{\alpha}{\alpha_q})^{q-1}}{1-\frac{\alpha}{\alpha_q}}\approx 1,$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|f_k\|_{2,q}^2}\int_{\mathbb{R}^4}\Phi\left(\alpha\left|\frac{f(x)}{\|\Delta f_k\|_{2,q}}\right|^{\frac{q}{q-1}}\right)dx \\
&\geq c\left(\frac{1}{\log k}\right)^{-\frac{2}{q}}\exp\left(\left(1+O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right)\frac{\alpha}{\alpha_q}\left(C_k\sqrt{\log k}\right)^{\frac{q}{q-1}}-\log k\right) \\
&\sim (\log k)^{\frac{2}{q}}\exp\left(\left(1+O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right)\frac{\alpha}{\alpha_q}\left((\log k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\sqrt{\log k}\right)^{\frac{q}{q-1}}-\log k\right) \\
&\sim (\log k)^{\frac{2}{q}}\exp\left(\left(1-\frac{\theta}{\log k}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right)\log k-\log k\right) \\
&\geq c(\log k)^{\frac{2}{q}}\geq\frac{c}{(1-\frac{\alpha}{\alpha_q})^{\frac{2}{q}}}\sim\frac{c}{(1-(\frac{\alpha}{\alpha_q})^{q-1})^{\frac{2}{q}}}.
\end{aligned}
$$

因此

$$ATA(\alpha)\geq\frac{C_2(q)}{(1-(\frac{\alpha}{\alpha_q})^{q-1})^{\frac{2}{q}}}.$$

结论得证.

参　考　文　献

[1] Adachi S., Tanaka K., Trudinger type inequalities in $\mathbb{R}^N$ and their best exponents, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1999, **128**: 2051–2057.

[2] Adams D. R., A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives, *Ann. of Math.*, 1988, **128**: 385–398.

[3] Alberico A., Moser type inequalities for higher-order derivatives in Lorentz spaces, *Potential Anal.*, 2008, **28**: 389–400.

[4] Alvino A., Ferone V., Trombetti G., Moser-type inequalities in Lorentz spaces, *Potential Anal.*, 1996, **5**: 273–299.

[5] Cassani D., Tarsi C., A Moser-type inequality in Lorentz–Sobolev spaces for unbounded domains in $\mathbb{R}^N$, *Asymptot. Anal.*, 2009, **64**(1–2): 29–51.

[6] Chen L., Lu G., Zhang C., Sharp weighted Trudinger–Moser–Adams inequalities on the whole space and the existence of their extremals, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 2019, **58**(4): 132, 31 pp.

[7] Chen L., Lu G., Zhu M., Existence and nonexistence of extremals for critical Adams inequalities in $\mathbb{R}^4$ and Trudinger–Moser inequalities in $\mathbb{R}^2$, *Advances in Mathematics*, 2020, **368**: 107143, 61pp.

[8] Lam N., Lu G., A new approach to sharp Moser–Trudinger and Adams type inequalities: a rearrangement-free argument, *J. Differential Equations*, 2013, **255**(3): 298–325.

[9] Lam N., Lu G., Sharp Adams type inequalities in Sobolev spaces $W^{m,\frac{n}{m}}(\mathbb{R}^n)$ for arbitrary integer m, *J. Differential Equations*, 2012, **253**: 1143–1171.

[10] Lam N., Lu G., Zhang L., Equivalence of critical and subcritical sharp Trudinger–Moser–Adams inequalities, *Rev. Mat. Iberoam.*, 2017, **33**: 1219–1246.

[11] Lieb E., Loss M., Analysis, 2nd Edn., Vol. 14. Amer. Math. Soc., Providence, 2001.

[12] Lu G., Tang H., Sharp singular Trudinger–Moser inequalities in Lorentz–Sobolev spaces, *Adv. Nonlinear Stud.*, 2016, **16**(3): 581–601.

[13] Moser J., Sharp form of an inequality by N. Trudinger, *Indiana Univ. Maths J.*, 1971, **20**: 1077–1092.

[14] Ozawa T., On critical cases of Sobolev's inequalities, *J. Funct. Anal.*, 1995, **127**(2): 259–269.

[15] Ruf B., Sani F., Sharp Adams-type inequalities in $\mathbb{R}^n$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2013, **365**(2): 645–670.

[16] Stein E., Weiss G., Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Mathematical Series, No. 32, Princeton University Press, Princeton, 1971.

[17] Strauss W., Existence of solitary waves in higher dimensions, *Comm. Math. Phys.*, 1977, **55**: 149–162.

[18] Talenti G., Elliptic equations and rearrangements, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1976, **3**: 697–718.

[19] Tang H., Equivalence of Sharp Trudinger–Moser inequalities in Lorentz–Sobolev spaces, *Potential Analysis*, doi. 10.1007/s11118-019-09769-9.

[20] Tarsi C., Adams' inequality and limiting Sobolev embeddings into Zygmund spaces, *Potential Anal.*, 2012, **37**(4): 353–385.

[21] Trudinger N. S., On imbeddings into Orlicz spaces and some applications, *J. Math. Mech.*, 1967, **17**: 473–484.