第64卷第2期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.64, No.2
2021年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Mar., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)02-0219-06 **文献标识码:** A

广义中心 α-Armendariz 环

刘大俊 魏加群

安徽工程大学数理学院 芜湖 241000
南京师范大学数学科学学院 南京 210046
E-mail: ldjnnu2017004@163.com; weijiaqun@njnu.edu.cn

摘 要 本文引入广义中心 α-Armendariz 环的概念, 得到了广义中心 α-Armendariz 环的基本性质, 研究了广义中心 α-Armendariz 环与其他环之间的一些关系.

关键词 广义中心 α-Armendariz 环; 约化环; abelian 环
MR(2010) 主题分类 16N40, 16S50
中图分类 O153.3

Generalized Central α-Armendariz Rings

Da Jun LIU Jia Qun WEI

School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000*, P. R. China*
School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046*, P. R. China*
E-mail: *ldjnnu*2017004*@*163*.com*; *weijiaqun@njnu.edu.cn*

Abstract In this paper, the notion of a generalized central α-Armendariz ring is introduced, and this paper also obtains some basic properties of such rings. At the same time, the relations between generalized central α-Armendariz rings and other rings are studied.

Keywords generalized central α-Armendariz ring; reduced ring; abelian ring
MR(2010) Subject Classification 16N40, 16S50
Chinese Library Classification O153.3

1 引言

本文中的环均指有单位元的结合环, 环 R 的自同态 α 不一定保持单位元. $R[x]$ 表示环 R 的多项式环, $C(R)$, $C(R[x])$ 分别表示环 R 与环 $R[x]$ 的中心元,

$$R[[x]]=\left\{\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i : a_i\in R\right\},$$

$$R[x;x^{-1}]=\left\{\sum_{i=-s}^{t}a_ix^i : s\geq 0,\ t\geq 0,\ a_i\in R\right\},\quad R[[x;x^{-1}]]=\left\{\sum_{i=-s}^{\infty}a_ix^i : s\geq 0,\ a_i\in R\right\}.$$

收稿日期: 2019-02-26; 接受日期: 2020-04-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11771212); 江苏省杰出青年科学基金资助项目 (BK2012044)
通讯作者: 魏加群 (南京师范大学数学科学学院)

Armendariz 在文 [3] 中指出了约化环 R 满足如下性质: 如果对 $R[x]$ 中的任意两个多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\in R[x]\setminus\{0\}$, 当 $f(x)g(x)=0$ 时, 对任意 i,j, 有 $a_ib_j=0$. 文 [6] 引入了 Armendariz 环的概念, 并研究了 Armendariz 环与半交换环之间的一些关系. 如果对任意的 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\in R[x]$, 由 $f(x)g(x)=0$ 可推出对任意的 i,j, 有 $a_ib_j=0$, 则称环 R 为 Armendariz 环. 之后, 众多数学工作者对 Armendariz 环的推广做了很多的研究.

设 α 为环 R 的自同态, $R[x;\alpha]$ 表示斜多项式环, 加法为普通加法, 对于所有 $r\in R$, 乘法为 $xr=\alpha(r)x$. 文 [1] 讨论了中心 Armendariz 环. 如果对任意的 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\in R[x]$, 由 $f(x)g(x)=0$ 可推出对任意的 i,j, 有 $a_ib_j\in C(R)$, 则称环 R 为中心 Armendariz 环. 文 [4] 讨论了 α- 斜 Armendariz 环. 环 R 被称为 α- 斜 Armendariz 环, 如果对任意的 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i,g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\in R[x;\alpha]$, 由 $f(x)g(x)=0$ 可推出对任意的 i,j, 有 $a_i\alpha^i(b_j)=0$. 文 [7] 讨论了中心斜 Armendariz 环. 环 R 被称做中心斜 Armendariz 环, 如果对任意的 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\in R[x;\alpha]$, 由 $f(x)g(x)=0$ 可推出对任意的 i,j, 有 $a_i\alpha^i(b_j)\in C(R)$. 文 [8] 提出了 α- 弱 Armendariz 环的概念. 称环 R 是一个右 (左) α- 弱 Armendariz 环, 如果 $f(x)=a_0+a_1x$, $g(x)=b_0+b_1x\in R[x]$, $f(x)\alpha(g(x))=0$ $(\alpha(f(x))g(x)=0)$, 则对于任意的 i,j, 有 $a_i\alpha(b_j)=0$ $(\alpha(a_i)b_j=0)$, 这里 $\alpha(g(x))=\sum_{j=0}^{n}\alpha(b_j)x^j$. 环 R 被称为 α- 弱 Armendariz 环, 如果环 R 既是左 α- 弱 Armendariz 环又是右 α- 弱 Armendariz 环. 文 [9] 提出了 α-McCoy 环的概念, 称环 R 是一个左 α-McCoy 环, 如果对于任意的非零多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\in R[x]$, 由 $f(x)\alpha(g(x))=0$, 可推出存在 $0\neq r\in R$, 使得 $r\alpha(g(x))=0$- 右 α-Mccoy 可类似定义. 环 R 称为 α-McCoy 环, 如果环 R 既是左 α-McCoy 环又是右 α-McCoy 环.

本文受到文 [1, 4, 7–9] 的启发, 引入了广义中心 α-Armendariz 环的概念, 得到了广义中心 α-Armendariz 环的一些性质和刻画.

2 广义中心 α-Armendariz 环的定义及相关性质

定义 2.1 设 α 为环 R 的自同态. 环 R 称为右广义中心 α-Armendariz 环, 如果对任意的 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\in R[x]$, 由 $f(x)\alpha(g(x))=0$ 可推出

$$a_i\alpha(b_j)\in C(R),\quad \forall\, 0\le i\le m,\ 0\le j\le n.$$

左广义中心 α-Armendariz 环可类似定义. 环 R 称为广义中心 α-Armendariz 环, 如果环 R 既是左广义中心 α-Armendariz 环又是广义中心 α-Armendariz 环.

注 2.2 由定义知 R 是中心 Armendariz 环当且仅当 R 是广义中心 1_R-Armendariz 环, 其中 1_R 是 R 的恒等同态. 每个交换环都是广义中心 α-Armendariz 环.

注 2.3 由定义知广义中心 α-Armendariz 环是 α- 弱 Armendariz 环的推广, 下面的例子说明 α- 弱 Armendariz 环未必是广义中心 α-Armendariz 环.

例 2.4 设环 $R=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$, 这里 $\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 则环 R 是交换的约化环, 亦是 Armendariz 环 (见文 [3, 引理 1]). 设 $\alpha:R\to R$, $\alpha((a,b))=(b,a)$ 是环 R 的自同态. 令 $f(x)=(1,0)-(1,0)x$, $g(x)=(1,0)+(0,1)x\in R[x]$, 则 $f(x)\alpha(g(x))=0$, 但 $(1,0)\alpha((0,1))=(1,0)^2\neq 0$. 故环 R 不是 α- 弱 Armendariz 环, 但 R 是广义中心 α-Armendariz 环.

命题 2.5 设 α 是环 R 的自同态, S 是环 R 的子环, 且 α 限制在 S 上仍为 S 的自同态, 仍记为 α. 若 R 是广义中心 α-Armendariz 环, 则 S 是广义中心 α-Armendariz 环.

证明 设 α 是环 R 的自同态, 记其在环 $R[x]$ 上的扩张为

$$\bar{\alpha}: R[x] \to R[x], \quad \bar{\alpha}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m} \alpha(a_i) x^i,$$

则 $\bar{\alpha}$ 是环 $R[x]$ 上的自同态. 在不致混淆的情形下, 仍将 $\bar{\alpha}$ 记为 α. 设 R, S 是环且有环同构 σ: $R \to S$, 则易证

$$\sigma: \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \to \sum_{i=0}^{m} \sigma(a_i) x^i$$

是 $R[x]$ 到 $S[x]$ 的环同构. 证毕.

定理 2.6 设 R, S 是环且 $\sigma: R \to S$ 是环同构, 则环 R 是右广义中心 α-Armendariz 环当且仅当 S 是右广义中心 $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-Armendariz 环.

证明 ($\Rightarrow$) 令 $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in S[x]$, 且满足 $f(x)\sigma\alpha\sigma^{-1}(g(x)) = 0$. 下证 $a_i(\sigma\alpha\sigma^{-1})(b_j) \in C(S)$, $\forall\, 0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$. 由定义 2.1 可知

$$\exists\, f_1(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i' x^i, \quad g_1(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j' x^j \in R[x],$$

其中 $a_i = \sigma(a_i')$, $b_j = \sigma(b_j')$, 即

$$f(x) = \sigma(f_1(x)) = \sigma\left(\sum_{i=0}^{m} a_i' x^i\right) = \sigma(a_0') + \sigma(a_1')x + \cdots + \sigma(a_m')x^m,$$

$$g(x) = \sigma(g_1(x)) = \sigma\left(\sum_{j=0}^{n} b_j' x^j\right) = \sigma(b_0') + \sigma(b_1')x + \cdots + \sigma(b_n')x^n.$$

由 $f(x)\sigma\alpha\sigma^{-1}(g(x)) = (\sum_{i=0}^{m} a_i x^i)\sigma\alpha\sigma^{-1}(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j) = 0$, 从而有

$$\sum_{i+j=k} a_i(\sigma\alpha\sigma^{-1})(b_j) = \sum_{i+j=k} \sigma(a_i'\alpha(b_j')) = 0.$$

因此 $\sum_{i+j=k} a_i'\alpha(b_j') = 0$, 这里 $0 \le k \le m+n$, 即 $f_1(x)\alpha(g_1(x)) = 0$. 因为 R 是右广义中心 α-Armendariz 环, 有 $a_i'\alpha(b_j') \in C(R)$. 注意到

$$a_i' = \sigma^{-1}(a_i), \quad b_j' = \sigma^{-1}(b_j),$$

那么 $\sigma^{-1}(a_i)\alpha(\sigma^{-1}(b_j)) \in C(R)$, 即

$$\sigma^{-1}(a_i)\sigma^{-1}(\sigma\alpha\sigma^{-1})(b_j) = \sigma^{-1}(a_i(\sigma\alpha\sigma^{-1})(b_j)) \in C(R),$$

故

$$a_i(\sigma\alpha\sigma^{-1})(b_j) \in C(S), \quad \forall\, 0 \le i \le m,\ 0 \le j \le n.$$

这说明 S 是右广义中心 $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-Armendariz 环.

($\Leftarrow$) 假设 $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$, 且满足 $f(x)\alpha(g(x)) = 0$. 取 $F(x) = \sigma(f(x))$, $G(x) = \sigma(g(x)) \in S[x]$, 则

$$F(x)\sigma\alpha\sigma^{-1}(G(x)) = \sigma(f(x))\sigma\alpha\sigma^{-1}(\sigma(g(x))) = \sigma(f(x)\alpha(g(x))) = 0,$$

即

$$\sigma(a_i)\sigma\alpha\sigma^{-1}(\sigma(b_j)) = \sigma(a_i\alpha(b_j)) \in C(S),$$

故 $a_i\alpha(b_j) \in C(R)$. 证毕.

3 广义中心 α-Armendariz 环的刻画与相关环

设 α_1 是环 R_1 的自同态, α_2 是环 R_2 的自同态, 作 $\bar{\alpha}: R_1 \times R_2 \to R_1 \times R_2$, $\bar{\alpha}((a_1, a_2)) = (\alpha_1(a_1), \alpha_2(a_2))$. 易验证 $\bar{\alpha}$ 是环 $R_1 \times R_2$ 的自同态且 $\bar{\alpha}$ 在 R_i 上的限制为 $\alpha_i, i = 1, 2$. 在不致混淆的情形下, 仍将 $\bar{\alpha}, \alpha_1, \alpha_2$ 记为 α. 环 R 称为 abelian 环, 如果 R 中每个幂等元 $e \in C(R)$.

命题 3.1 R 是右广义中心 α-Armendariz 环当且仅当存在中心幂等元 $e \in R$ 且 eR 与 $(1-e)R$ 是右广义中心 α-Armendariz 环.

证明 $(\Rightarrow)$ 由命题 2.5 立得.

$(\Leftarrow)$ 令 $e \in R$ 是中心幂等元, 任取非零多项式 $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$, 如果 $f(x)\alpha(g(x)) = 0$, 取 $f_1 = ef$, $f_2 = (1-e)f$, $g_1 = eg$, $g_2 = (1-e)g$, 即

$$f_1\alpha(g_1) = 0 \in (eR)[x], \quad f_2\alpha(g_2) = 0 \in ((1-e)R)[x].$$

由定义知 $ea_i\alpha(eb_j) \in C(eR)$, $(1-e)a_i\alpha((1-e)b_j) \in C((1-e)R)$. 由 $R = eR \oplus (1-e)R$ 知 $a_i\alpha(b_j) = ea_i\alpha(eb_j) + (1-e)a_i\alpha((1-e)b_j) \in C(R)$. 故 R 是右广义中心 α-Armendariz 环. 证毕.

定理 3.2 设 α 是环 R 的单自同态, 且对任意的 $e^2 = e \in R$, $\alpha(e) = e$. 若 R 是右广义中心 α-Armendariz 环, 则 R 是 abelian 环.

证明 任取 $e^2 = e \in R$, 令 $f(x) = e - e\alpha(r)(1-e)x$, $g(x) = 1 - e + er(1-e)x \in R[x]$, $\forall\, r \in R$, 则有 $f(x)\alpha(g(x)) = 0$. 故 $e\alpha(r)(1-e) \in C(R)$, 所以 $e\alpha(r)(1-e) = e^2\alpha(r)(1-e) = e\alpha(r)(1-e)e = 0$. 因此 $e\alpha(r) = e\alpha(r)e$. 另一方面, 令 $h(x) = 1 - e - (1-e)\alpha(r)ex$, $t(x) = e + (1-e)rex \in R[x]$, 则由 $h(x)\alpha(t(x)) = 0$ 可知, $(1-e)\alpha(r)e \in C(R)$, 即 $(1-e)\alpha(r)e = 0$. 因此 $\alpha(r)e = e\alpha(r)e$. 从而有 $e\alpha(r) = \alpha(r)e$, 由于 α 是单同态, 则 $re = er$. 证毕.

推论 3.3 [5] Armendariz 环是 abelian 环.

推论 3.4 [1] 中心 Armendariz 环是 abelian 环.

称一个环 R 为 Baer 环, 如果环 R 的任一非空子集的右零化子由一个幂等元生成. 称一个环 R 是右 p.p- 环, 如果环 R 的任一元素的右零化子由一个幂等元生成. 左 p.p- 环可类似定义. 如果环 R 是右 p.p- 环, 也是左 p.p- 环, 则称环 R 是 p.p- 环.

推论 3.5 设 α 是环 R 的单自同态, 且对任意的 $e^2 = e \in R$, $\alpha(e) = e$. 若环 R 是右 p.p- 环且是广义中心 α-Armendariz 环, 则 R 是 Armendariz 环.

证明 由定理 3.2 知环 R 是 abelian 环, 而环 R 亦是右 p.p- 环. 由文 [7] 知环 R 是 Armendariz 环. 证毕.

推论 3.6 设 α 是环 R 的单自同态, 且对任意的 $e^2 = e \in R$, $\alpha(e) = e$. 若环 R 是右广义中心 α-Armendariz 环, 则以下等价:

(1) R 是右 p.p- 环 $\Leftrightarrow$ $R[x]$ 是右 p.p- 环.

(2) R 是 Baer 环 $\Leftrightarrow$ $R[x]$ 是 Baer 环.

(3) R 是 Baer 环 $\Leftrightarrow$ $R[[x]]$ 是 Baer 环.

(4) R 是 Baer 环 $\Leftrightarrow$ $R[x;x^{-1}]$ 是 Baer 环.

(5) R 是右 p.p- 环 $\Leftrightarrow$ $R[x;x^{-1}]$ 是右 p.p- 环.

(6) R 是 Baer 环 $\Leftrightarrow$ $R[[x;x^{-1}]]$ 是 Baer 环.

证明 由定理 3.2, 环 R 是 abelian 环, 则由文 [2] 可证余下内容. 证毕.

定理 3.7 环R是右广义中心 α-Armendariz环当且仅当$R[x]$是右广义中心 α-Armendariz 环.

证明 ($\Rightarrow$) 令 $f(y)=f_0+f_1y+\cdots+f_ny^n$, $g(y)=g_0+g_1y+\cdots+g_my^m\in R[x][y]$, 且 $f(y)\alpha(g(y))=0$. 这里 $f_i=a_{i0}+a_{i1}x+\cdots+a_{in_i}x^{n_i}$, $g_j=b_{j0}+b_{j1}x+\cdots+b_{jm_j}x^{m_j}\in R[x]$. 下证 $f_i\alpha(g_j)\in C(R[x])$. 令 $t=\deg f_0+\deg f_1+\cdots+\deg f_n+\deg g_0+\cdots+\deg g_m$ (零多项式的次数记为 0), 则

$$f(x^t)=f_0+f_1x^t+\cdots+f_nx^{nt},\ g(x^t)=g_0+g_1x^t+\cdots+g_mx^{mt}\in R[x].$$

由 $f(y)\alpha(g(y))=0$ 知 $f(x^t)\alpha(g(x^t))=0$. 又因为环 R 是右广义中心 α-Armendariz 环, 所以

$$a_{is_i}\alpha(b_{jr_j})\in C(R),\quad \forall\, 0\le s_i\le n_i,\ 0\le r_j\le m_j.$$

由 $C(R)$ 的加法封闭性可知 $f_i\alpha(g_j)\in C(R[x])$.

($\Leftarrow$) 显然. 证毕.

对于环 R 的理想 I, 若 $\alpha(I)\subseteq I$, 则 $\bar{\alpha}:R/I\to R/I$; $\bar{\alpha}(a+I)=\alpha(a)+I$ 是商环 R/I 的自同态, 在不致混淆的情形下, 仍把 $\bar{\alpha}$ 记为 α.

定理 3.8 设 α 是环 R 的自同态, 若 I 是环 R 的理想且不含非零的幂等元, 有 $\alpha(I)\subseteq I$. 若环 R/I 是右广义中心 α-Armendariz 环, 则 R 是右广义中心 α-Armendariz 环.

证明 任取 $a,b\in R$, 若 $ab=0$, 则 $(bIa)^2=0$, 而 $(bIa)\subseteq I$, 故 $bIa=0$. 由 $(aIb)^3\subseteq(aIb)I(aIb)=0$ 可知 $aIb=0$. 假设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m\in R[x]$. 若 $f(x)\alpha(g(x))=0$, 则

$$a_0\alpha(b_0)=0, \tag{3.1}$$

$$a_0\alpha(b_1)+a_1\alpha(b_0)=0, \tag{3.2}$$

$$a_0\alpha(b_2)+a_1\alpha(b_1)+a_2\alpha(b_0)=0, \tag{3.3}$$

$$\vdots$$

下证对任意的 a_i,b_j, $a_iI\alpha(b_j)=\alpha(b_j)Ia_i=0$. 由 (3.1) 得 $a_0I\alpha(b_0)=0$. 在 (3.2) 的右边乘以 $I\alpha(b_0)$, 有 $a_0\alpha(b_1)I\alpha(b_0)=0$, $a_1\alpha(b_0)I\alpha(b_0)=0$, 则

$$(\alpha(b_0Ia_1))^3\subseteq\alpha(b_0)I(a_1\alpha(b_0)Ia_1\alpha(b_0))Ia_1=0.$$

因此有 $\alpha(b_0)Ia_1=0$. 类似可证 $a_0I\alpha(b_1)=0$. 在 (3.2) 的左边乘以 a_0I, 则

$$a_0Ia_0\alpha(b_1)=0,\quad (\alpha(b_1)Ia_0)^3=0,\quad \alpha(b_1)Ia_0=a_0I\alpha(b_1)=0.$$

在 (3.3) 的右边乘以 $I\alpha(b_0)$, 有 $a_2\alpha(b_0)Ib_0=0$, $(\alpha(b_0)Ia_2)^3=0$, $a_2I\alpha(b_0)=\alpha(b_0Ia_2)=0$. 由 (3.3) 知

$$a_0\alpha(b_2)I+a_1\alpha(b_1)I+a_2\alpha(b_0)I=0,$$

因此 $a_1\alpha(b_1)I=0$. 而 $(\alpha(b_1)Ia_1)^2=0$, $\alpha(b_1)Ia_1=0=a_1I\alpha(b_1)$. 如此继续下去, 故 $a_iI\alpha(b_j)=\alpha(b_j)Ia_i=0$. 由以上论述可知

$$(a_i\alpha(b_j)r-ra_i\alpha(b_j))I(a_i\alpha(b_j)r-ra_i\alpha(b_j))=0.$$

因为 R/I 是右广义中心 α-Armendariz 环, 故 $\bar{a}_i\alpha(\bar{b_j}) \in C(R/I)$, 即 $a_i\alpha(b_j)r - ra_i\alpha(b_j) \in I$. 由 I 是约化理想知 $a_i\alpha(b_j)r = a_i\alpha(b_j)r$. 得证.

假设 Δ 是环 R 中由中心正则元构成的乘法闭子集, 令 $\Delta^{-1}R = \{u^{-1}a \mid u \in \Delta, a \in R\}$, 则 $\Delta^{-1}R$ 构成环. 对于环 R 的自同态 α, 满足 $\alpha(\Delta) \subseteq \Delta$, 那么其诱导了环 $\Delta^{-1}R$ 的自同态, 定义为 $\bar{\alpha} : \Delta^{-1}R \to \Delta^{-1}R$; $\bar{\alpha}(u^{-1}a) = \alpha(u)^{-1}\alpha(a)$. 在不致混淆的情形下, 仍把 $\bar{\alpha}$ 记为 α.

定理 3.9 环 R是右广义中心 α-Armendariz 环当且仅当 $\Delta^{-1}R$ 是右广义中心 α-Armendariz 环.

证明 ($\Rightarrow$) 假设环 R 是右广义中心 α-Armendariz 环, 令 $f(x) = \sum_{i=0}^{m} u_i^{-1}a_ix^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} v_j^{-1}b_jx^j \in (\Delta^{-1}R)[x]$, 且 $f(x)\alpha(g(x)) = 0$. 易知存在 $u, v, c_i, d_j \in \Delta$, 使得

$$uf(x) = \sum_{i=0}^{s} a_ic_ix^i \in R[x], \quad vg(x) = \sum_{i=0}^{t} b_jd_jx^j \in R[x],$$

且 $(uf(x))\alpha(vg(x)) = 0$, 故 $(a_ic_i)\alpha(b_jd_j) \in C(R)$. 因为 $c_i, \alpha(d_j)$ 是 R 中的中心正则元, $a_i\alpha(b_j) \in C(R)$, 故 $u_i^{-1}a_i\alpha(v_j^{-1}b_j) \in C(\Delta^{-1}R)$. 得证.

($\Leftarrow$) 显然. 证毕.

推论 3.10 对于环 R, 以下几条等价:

(1) R 是广义中心 α-Armendariz 环.

(2) $R[x]$ 是广义中心 α-Armendariz 环.

(3) $R[x, x^{-1}]$ 是广义中心 α-Armendariz 环.

证明 这里仅证 (1)$\Rightarrow$(3). 令 $\Delta = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$, 则易证 Δ 是环 $R[x]$ 中包含中心正则元的乘法闭子集. 而 $R[x; x^{-1}] \cong (\Delta^{-1}R)[x]$, 由定理 3.9 得证.

参考文献

[1] Agayev N., Güngöroglu G., Harmanci A., et al., Central Armendariz rings, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciety Society*, 2011, **34**(1): 137–145.

[2] Anderson D. D., Camillo V., Armendariz rings and Gaussian rings, *Communications in Algebra*, 1998, **26**(7): 2265–2272.

[3] Armendariz E. P., A note on extensions of Baer and PP-rings, *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1974, **18**(4): 470–473.

[4] Hong C. Y., Kim N. K., Kwak T. K., On skew Armendariz rings, *Communications in Algebra*, 2003, **31**(1): 103–122.

[5] Kim N. K., Lee Y., Armendariz rings and reduced rings, *Journal of Algebra*, 2000, **223**: 477–488.

[6] Rege M. B., Chhawchharia S., Armendariz rings, *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 1997, **73**(1): 14–17.

[7] Sanaei M., Sahebi S., Javadi H. H. S., On central skew Armendariz rings, Arxiv:1409.8091, 2014.

[8] Zhao L., Generalized weak Armendariz rings and their extensions (in Chinese), *Advances in Mathematics*, 2015, **44**(2): 175–186.

[9] Zhao L., Gu Q. Q., On relative McCoy properties with a ring endomorphism, *Journal of Mathematical* (*PRC*), 2015, **35**(6): 1287–1296.