第64卷第1期 数学学报中文版 Vol.64, No.1
2021年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2021

**文章编号:** 0583-1431(2021)01-0155-12 **文献标识码: A**

# $b_p^{(2)}$ 空间中的等距映射

王瑞东 王 普

天津理工大学理学院 天津 300384
E-mail: wangruidong@tjut.edu.cn; lubc02@126.com

**摘 要** 度量与线性性质是赋范空间的重要性质, 因此, 研究线性算子与等距算子的关系成为了泛函分析领域重要的研究课题. 本文首先研究一类特殊的赋准范空间, 即 $b_p^{(2)}$ 空间的重要性质. 然后给出 $b_p^{(2)}$ 空间单位球面间满等距映射的表示定理及延拓性质.

**关键词** 二维 $b_p^{(2)}$ 空间; 等距映射; 线性延拓; 表现定理
**MR(2010) 主题分类** 46B20, 47A12
**中图分类** O177.3

## The Isometry on $b_p^{(2)}$ Space

Rui Dong WANG Pu WANG

*Department of Mathematics, Tianjin University of Technology,*
*Tianjin* 300384, *P. R. China*
*E-mail*: *wangruidong@tjut.edu.cn*; *lubc02@126.com*

**Abstract** Metric and linear properties are significant properties of normed spaces, so the study of the relationship between linear operators and isometric operators has become an important research topic in the field of functional analysis. In this paper, we will study a special F-space, $b_p^{(2)}$ space, and give the representation theorem for the onto isometric mapping on the unit sphere of the $b_p^{(2)}$ space, then give a result about the isometric linear extension from unit sphere in the $b_p^{(2)}$.

**Keywords** 2-dimensional space $b_p^{(2)}$; isometry; linear extension; representation theorem
**MR(2010) Subject Classification** 46B20, 47A12
**Chinese Library Classification** O177.3

## 1 引言

作为赋范线性空间研究的有力工具, 等距算子和线性算子在泛函分析中具有重要的意义, 度量几何、空间结构、等价定理和仿射运动定理等都需要这两个工具的支撑. 在 1932 年, Mazur 和

收稿日期: 2017-10-23; 接受日期: 2020-06-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11301384)

Ulam [19] 研究得出了著名的 Mazur–Ulam 定理, 这是对赋范空间的度量与线性结构关系研究的开端.

**定理 1.1** (Mazur–Ulam 定理)[19] 赋范空间 $X$ 到赋范空间 $Y$ 的满等距映射 $T$ 必为仿射的, 且当 $T(0)=0$ 时 $T$ 必为线性的.

对研究一般的线性度量空间来说, 我们仍未能确定 Mazur–Ulam 定理是否成立. 在 1953 年, Charzynshi 在文 [3] 中证得一个主要结论:

**定理 1.2** [3] 设 $X$ 和 $Y$ 为维数相等的两个有限维度量向量空间, $T$ 为 $X$ 到 $Y$ 的等距映射且保持保持 $T(0)=0$, 则 $T$ 为线性的.

长期以来, 国内外的研究学者一直尝试推广 Mazur–Ulam 定理, 通过对空间结构的不断研究, 许多开放性问题被发现并提出, 如著名的 Aleksandrov 问题、Aleksandrov–Rassias 问题以及 Tingley 问题等. Baker 在文 [2] 中证得任意从赋范空间到一个严格凸赋范空间的非满等距映射均为仿射的. 在文 [18] 中, Mankiewicz 推广了 Mazur–Ulam 定理, 提出将赋范空间 $X$ 的一个连通子集映射到赋范空间 $Y$ 的一个开子集上的满等距算子必能延拓为全空间上的仿射算子. 在文 [20] 中, Tingley 将这一结论应用到了 $X$ 和 $Y$ 的单位球上, 并提出著名的 Tingley 问题:

**问题 1.3** (Tingley 问题) [20] 设 $X$ 和 $Y$ 为两个赋范空间, $S(X)$, $S(Y)$ 是各自的单位球面, 若 $T_0$ 为 $S(X)$ 到 $S(Y)$ 的一个满等距映射, 问是否存在一个从 $X$ 到 $Y$ 的线性等距映射 $T$ 满足 $T$ 在 $S(X)$ 上的限制为 $T_0$ (也即问 $T_0$ 能否线性延拓至全空间上)?

文 [20] 中, Tingley 还给出了一个很好的结论:

**定理 1.4** [20] 设 $X$ 和 $Y$ 为两个有限维赋范空间, $T_0$ 为 $S(X)$ 到 $S(Y)$ 的一个满等距映射, 则对任意 $x\in S(X)$, 都有 $T_0(-x)=-T_0(x)$.

我们称具有此性质的 $T_0$ 为能够保奇性的.

对于这个问题, 当映射为从单位球面到单位球面的非满等距映射时, 很容易找到例子证明延拓问题不成立. 在文 [23] 中, 张伦构造了一个从 $S_1(\ell_\infty^{(2)})$ 到 $S_1(\ell_\infty^{(3)})$ 的非满等距映射, 为等距延拓问题的第一个反例:

**例 1.5** [23] 设 $T_0$ 为从 $S_1(\ell_\infty^{(2)})$ 到 $S_1(\ell_\infty^{(3)})$ 的如下定义的非满映射:

$$T_0[(\zeta_1,\zeta_2)]=\begin{cases}\left(1,\dfrac{3}{4}\zeta_2,\zeta_2\right), & \zeta_1=1,\quad \zeta_2\ge 0;\\ \left(-1,\zeta_2,\dfrac{3}{4}\zeta_2\right), & \zeta_1=-1,\quad \zeta_2\ge 0;\\ \left(\zeta_1,1-\dfrac{1}{4}\zeta_1,1\right), & \zeta_2=1,\quad \zeta_1\ge 0;\\ \left(\zeta_1,1,1+\dfrac{1}{4}\zeta_1\right), & \zeta_2=1,\quad \zeta_1<0;\\ (\zeta_1,\zeta_2,\zeta_2), & \zeta_2<0,\end{cases}$$

则 $T_0$ 是一个从 $S_1(\ell_\infty^{(2)})$ 到 $S_1(\ell_\infty^{(3)})$ 的等距映射, 但 $T_0$ 不能等距地延拓为全空间 $\ell_\infty^{(2)}$ 上的等距映射.

文 [4, 6–10, 13, 16, 22] 中对于几类经典的同类型及不同类型赋范空间的单位球面之间等距算子延拓问题做了研究, 讨论了其上的 Tingley 问题. Gehér 和王瑞东分别在文 [15, 21] 中研究得出二维赋范空间中 Tingley 问题成立的充分条件. 在文 [21] 中, 王瑞东研究了实二维严格凸赋范空间中的 Tingley 问题, 得出对于任意两个二维严格凸赋范线性空间单位球面间的等距映射 $V_0$,

在 $\|V_0(y)-(\|x+y\|-1)V_0(x)\|=\|y-(\|x+y\|-1)x\|$ 的条件下该等距映射能够延拓至全空间. 定光桂教授在文 [11] 中证得两个 Hilbert 空间单位球面之间的 1-Lipschitz 映射可延拓为全空间上的一个线性等距映射.

虽然到目前为止我们已经得出了许多关于 Tingley 问题的肯定结论, 但是对于任意 Banach 空间来说, 仍未有很好的方法证明它们单位球面间的满等距是否能延拓至全空间. 即便对于二维赋范空间 (或更一般的赋准范空间) 来说, Tingley 问题也仍未完全解决.

**定义 1.6** [12] 设 $X$ 和 $Y$ 为线性空间, 如果在 $X$ 上定义一个非负函数 $\|x\|$ 满足对任意的 $x, x_n \in X$, $\alpha, \alpha_n \in \mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}
&\text{(n1) } \|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta;\\
&\text{(n2) } \|x+y\| \le \|x\|+\|y\|;\\
&\text{(n3) (a) } \|-x\|=\|x\|,\\
&\qquad\ \text{(b) } \|\alpha_n x\| \to 0 \ \ (\alpha_n \to 0),\\
&\qquad\ \text{(c) } \|\alpha x_n\| \to 0 \ \ (\|x_n\| \to 0),
\end{aligned}$$

则称此函数为准范数, $(X, \|x\|)$ 称为赋准范空间, 完备的赋准范空间称为 Fréchet 空间 (简记为 F 空间).

F 空间中的等距问题在泛函分析领域也具有极大的研究意义. 安桂梅 [1] 研究了 $\ell^{\beta_n}$ $(0<\beta_n<1)$ 空间中单位球面间的等距延拓, 并证得了 Tingley 问题在此空间中的肯定答案. 傅小红在文 [14] 中研究了一类赋准范空间, $s$ 空间中的等距映射, 借助元素支集这一工具证得了 $s$ 空间中球面间等距延拓的可实现性. 李建泽在文 [17] 中研究了 $J_U$ 空间, 得出了此空间单位球面间满等距映射可线性延拓至全空间上的充分条件. 本文将介绍一类特殊的 F 空间, $b_p^{(2)}$ 空间, 以及此空间中的等距算子问题.

**定义 1.7** 空间 $b_p^{(2)} \triangleq (\mathbb{R}^2, \|x\|_{[b,p]})$ $(1 \le p < \infty, p \neq 2)$, $\theta$ 表示空间中的零元, 元素 $x=(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}^2$ 的准范数定义为

$$\|x\|_{[b,p]}=\begin{cases}(|\zeta|^p+|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}, & (|\zeta|^p+|\eta|^p)^{\frac{1}{p}} \le 1;\\ \dfrac{1}{2}+\frac{1}{1+(|\zeta|^p+|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}}, & (|\zeta|^p+|\eta|^p)^{\frac{1}{p}} > 1.\end{cases}$$

在此空间内的元素

$$x=(\zeta,\eta)\in b_p^{(2)}, \quad \|x\|_{\ell_p}=(|\zeta|^p+|\eta|^p)^{\frac{1}{p}},$$

且记 $S[b_p^{(2)}]$ 为 $b_p^{(2)}$ 空间的单位球面.

## 2 $b_p^{(2)}$ 空间的性质

对于线性度量空间完备性的等价定理, 闭球套定理是显然的, 但是大多数从事泛函分析研究的学者都未曾想到的是, 即使在完备的赋准范空间 (更别提一般的完备度量空间) 中, 对于其内的 "闭球套" $\{B_n\}$, 当其半径 $r_n \nrightarrow 0$ 时也未必能导出 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \neq \emptyset$, 本文研究的 $b_p^{(2)}$ 空间就具有以下这种特性.

**性质 2.1** 对于空间 $b_p^{(2)}$, 存在闭球套 $\{B(x_n, r_n)\}$ $(B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n))$ 满足当其半

径 $r_n$ 趋近 $\frac{1}{2}$ 时, 有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) = \emptyset.$$

**证明** 在 $b_p^{(2)}$ 空间中, 选择 $\{x_n\}$ 满足

$$\|x_n\|_{\ell_p} = 3 \times 4^n, \quad x_{n+1} = 4x_n, \quad r_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^{n+1}},$$

并以 $x_n$ 作球心, $r_n$ 作半径构造闭球套 $\{B(x_n, r_n)\}$, 则有

$$\begin{aligned}
B(x_n, r_n) &= \{x \,|\, \|x - x_n\|_{[b,p]} \le r_n, \ \|x_n\|_{\ell_p} = 3 \times 4^n\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, \|x - x_n\|_{[b,p]} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4^{n+1}}, \|x_n\|_{\ell_p} = 3 \times 4^n \right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, \|x - x_n\|_{\ell_p} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4^{n+1}} \ \text{或} \ \frac{1}{1+\|x-x_n\|_{\ell_p}} + \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4^{n+1}}, \|x_n\|_{\ell_p} = 3 \times 4^n \right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, \|x - x_n\|_{\ell_p} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4^{n+1}} \ \text{或} \ \|x - x_n\|_{\ell_p} \ge 4^{n+1} - 1, \|x_n\|_{\ell_p} = 3 \times 4^n \right\}, \\
B(x_{n+1}, r_{n+1}) &= \{x \,|\, \|x - x_{n+1}\|_{[b,p]} \le r_{n+1}, \ \|x_{n+1}\|_{\ell_p} = 3 \times 4^{n+1}\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, \|x - x_{n+1}\|_{\ell_p} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4^{n+2}} \ \text{或} \ \|x - x_{n+1}\|_{\ell_p} \ge 4^{n+2} - 1, \|x_{n+1}\|_{\ell_p} = 3 \times 4^{n+1} \right\} \\
&\subset B(x_n, r_n) \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}),
\end{aligned}$$

且 $r_n \downarrow \frac{1}{2}$, 但有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) = \emptyset.$$

反证法. 假设 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \ne \emptyset$, 则必存在一点 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$ 满足 $\|x_0\|_{\ell_p} > 1$. 令 $n_0 = [\log_4(\|x_0\|_{\ell_p} + 1)] + 2$, 则有

$$\|x_0\|_{\ell_p} \le 4^{n_0 - 1} - 1 < 4^{n_0} - 1, \quad \|x_{n_0}\|_{\ell_p} = 3 \times 4^{n_0}, \quad r_{n_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^{n_0+1}}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\|x_{n_0} - x_0\|_{\ell_p} \ge \|x_{n_0}\|_{\ell_p} - \|x_0\|_{\ell_p} > 3 \times 4^{n_0} - (4^{n_0} - 1) > 1, \\
&\|x_{n_0} - x_0\|_{\ell_p} \le \|x_{n_0}\|_{\ell_p} + \|x_0\|_{\ell_p} < 3 \times 4^{n_0} + 4^{n_0} - 1 = 4^{n_0+1} - 1.
\end{aligned}$$

进而

$$\|x_{n_0} - x_0\|_{[b,p]} = \frac{1}{1 + \|x_{n_0} - x_0\|_{\ell_p}} + \frac{1}{2} > \frac{1}{4^{n_0+1}} + \frac{1}{2} = r_{n_0},$$

也即 $x_0 \notin B(x_{n_0}, r_{n_0})$. 但这与 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$ 矛盾, 因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) = \emptyset$. 证毕.

类似文 [5] 中定义的正交性, 本文中选取 $\{e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1)\}$ 作为空间 $b_p^{(2)}$ 的标准正交基, 则对空间 $b_p^{(2)}$ 中任意元素 $x = (\zeta, \eta)$ 可知 $x = \zeta e_1 + \eta e_2$.

**定义 2.2** 对于空间 $b_p^{(2)}$, $\{e_1, e_2\}$ 为一组标准正交基, 任意 $x = (\zeta, \eta) = \zeta e_1 + \eta e_2 \in b_p^{(2)}$, $|\theta_1| = |\theta_2| = 1$, 定义 $A_x = \{\bar{x} \,|\, \bar{x} = (\theta_1 \zeta, \theta_2 \eta) = \theta_1 \zeta e_1 + \theta_2 \eta e_2\}$ 为元素 $x$ 的对称元集; 定义 $B_x = \{\widetilde{x} \,|\, \widetilde{x} = (\theta_1 \eta, \theta_2 \zeta) = \theta_1 \eta e_1 + \theta_2 \zeta e_2\}$ 为元素 $x$ 的旋转元集.

**性质 2.3** 对于空间 $b_p^{(2)}$, 任意 $x = (\zeta, \eta) \in b_p^{(2)}$, 都有

$$\|x\|_{[b,p]} = \|\bar{x}\|_{[b,p]} = \|\widetilde{x}\|_{[b,p]}.$$

**证明** 对任意的 $x=(\zeta,\eta)\in b_p^{(2)}$,

$$\bar{x}=(\theta_1\zeta,\theta_2\eta),\quad \widetilde{x}=(\theta_1\eta,\theta_2\zeta)\quad (|\theta_1|=|\theta_2|=1),$$
$$(|\theta_1\zeta|^p+|\theta_2\eta|^p)^{\frac{1}{p}}=(|\theta_1\eta|^p+|\theta_2\zeta|^p)^{\frac{1}{p}}=(|\zeta|^p+|\eta|^p)^{\frac{1}{p}},$$

也即 $\|x\|_{\ell_p}=\|\bar{x}\|_{\ell_p}=\|\widetilde{x}\|_{\ell_p}$. 从而由空间 $b_p^{(2)}$ 的定义可知

$$\|x\|_{[b,p]}=\|\bar{x}\|_{[b,p]}=\|\widetilde{x}\|_{[b,p]}.$$

证毕.

**性质 2.4** 对于空间 $b_p^{(2)}$, $T_0$ 为 $S[b_p^{(2)}]$ 到 $S[b_p^{(2)}]$ 的满等距映射, 对任意 $x\in b_p^{(2)}$, 令

$$V(x)=\begin{cases}\|x\|_{\ell_p}\cdot T_0\left(\dfrac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\right), & x\neq\theta;\\ \theta, & x=\theta,\end{cases}$$

则有 $\|V(x)\|_{[b,p]}=\|x\|_{[b,p]}$.

**证明** 对于零元该性质显然成立: 当 $x\neq\theta$ 时, $x=(\zeta,\eta)$, 记 $\|x\|_{\ell_p}=a$, 则

$$a\in\mathbb{R}_+,\quad \left\|\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\right\|_{\ell_p}=\frac{\|x\|_{\ell_p}}{\|x\|_{\ell_p}}=1.$$

因此 $\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\in S[b_p^{(2)}]$.

记 $T_0(\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}})=x'$, 则

$$\left\|T_0\left(\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\right)\right\|_{[b,p]}=\|x'\|_{[b,p]}=1=\left\|T_0\left(\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\right)\right\|_{\ell_p},$$
$$\|V(x)\|_{\ell_p}=\left\|\|x\|_{\ell_p}\cdot T_0\left(\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\right)\right\|_{\ell_p}=\|x\|_{\ell_p}\cdot\left\|T_0\left(\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\right)\right\|_{\ell_p}=\|x\|_{\ell_p}.$$

由空间 $b_p^{(2)}$ 的定义得出

$$\|V(x)\|_{[b,p]}=\|x\|_{[b,p]}.$$

证毕.

类似于文 [21] 中对弧的定义, 我们给出空间 $b_p^{(2)}$ 中单位球面上的弧的定义.

**定义 2.5** 对任意 $x,y\in S[b_p^{(2)}]$, 且 $x\neq -y$, 记 $\widehat{x,y}=\{z\,|\,z=\frac{\lambda x+(1-\lambda)y}{\|\lambda x+(1-\lambda)y\|_{\ell_p}}\}$, 若

$$z_0\in\widehat{x,y}=\left\{z\,\middle|\,z=\frac{\lambda x+(1-\lambda)y}{\|\lambda x+(1-\lambda)y\|_{\ell_p}}\right\},\quad \lambda\in[0,1],$$

则称 $z_0$ 位于 $x$ 和 $y$ 之间.

由于 $S[\ell_p^{(2)}]\triangleq S[b_p^{(2)}]$, 结合文 [21, 引理 5] 可得类似 $S[b_p^{(2)}]$ 上的单调递增的性质.

**性质 2.6** 对任意 $x_0,x_1,x_2\in S[b_p^{(2)}]$, 若 $\widehat{x_0,x_1}\subset\widehat{x_0,x_2}$, 则有

$$\|x_0-x_1\|_{\ell_p}\leq\|x_0-x_2\|_{\ell_p}.$$

**定理 2.7** 对 $b_p^{(2)}$ 空间, $T_0$ 为 $S[b_p^{(2)}]$ 到 $S[b_p^{(2)}]$ 的满等距映射, 则对任意 $x,y\in S[b_p^{(2)}]$, 都有

$$T_0(\widehat{x,y})=\widehat{T_0(x),T_0(y)}.$$

**证明**　在 $S[b_p^{(2)}]$ 上任意取定 $x_0$, 如图 1 可知必存在 $x_1,x_2,x_3,x_4\in S[b_p^{(2)}]$, 满足

$$\|x_0-x_1\|_{\ell_p}=\|x_0-x_2\|_{\ell_p}=\frac{5}{6},\quad \|x_0-x_3\|_{\ell_p}=\|x_0-x_4\|_{\ell_p}=1.$$

如图 1

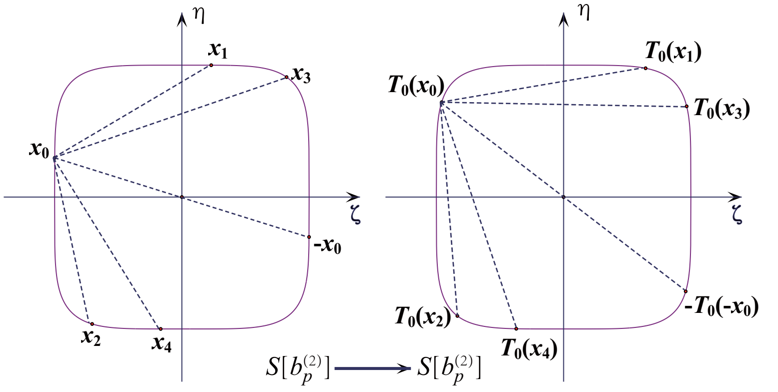


图 1　$b_p^{(2)}$ 单位球面间等距映射

我们先看 $\widehat{x_0,x_1}$, 可知对任意的 $x\in\widehat{x_0,x_1}$, $\|x_0-x\|_{\ell_p}\le\|x_0-x_1\|_{\ell_p}=\frac{5}{6}$, 而在 $S[b_p^{(2)}]$ 中,

$$\max\{\|x_0-x\|_{[b,p]}\}=1,\quad \max\{\|x_0-x\|_{\ell_p}\}=2,$$

$$\|x_0-(-x_0)\|_{\ell_p}=2;\quad \|x_0-(-x_0)\|_{[b,p]}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1+2}=\frac{5}{6},$$

则如图 2

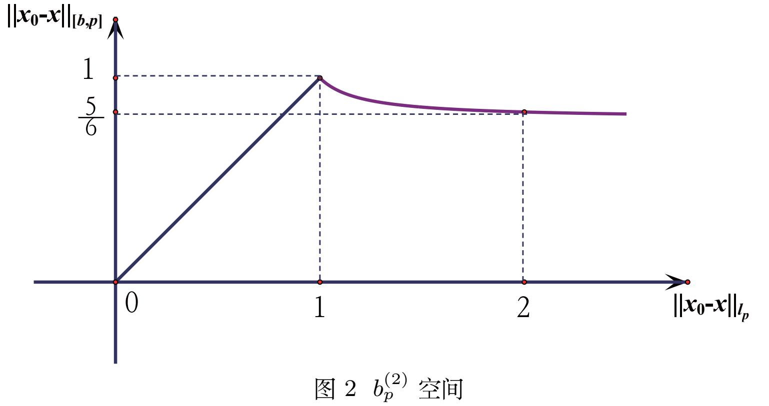


图 2　$b_p^{(2)}$ 空间

由 $b_p^{(2)}$ 空间范数定义可知对任意的 $x\in\widehat{x_0,x_1}$, 都有

$$\|x_0-x\|_{[b,p]}=\|T_0(x_0)-T_0(x)\|_{[b,p]}\le\frac{5}{6},$$

也即

$$T_0(\widehat{x_0,x_1})=T_0(\widehat{x_0),T_0}(x_1),\quad T_0(\widehat{x_0,x_2})=T_0(\widehat{x_0),T_0}(x_2).$$

对 $\widehat{x_1,x_3}$, 由 $\|x\|_{\ell_p}$ 和 $\|x\|_{[b,p]}$ 的连续性可知, 对任意的 $x\in\widehat{x_1,x_3}$, 都有

$$\|x_0-x\|_{\ell_p}=\|T_0(x_0)-T_0(x)\|_{\ell_p},\quad \|x_0-x\|_{[b,p]}=\|T_0(x_0)-T_0(x)\|_{[b,p]},$$

也即

$$T_0(\widehat{x_0,x_3})=T_0(\widehat{x_0),T_0}(x_3),\quad T_0(\widehat{x_0,x_4})=T_0(\widehat{x_0),T_0}(x_4).$$

显然, 在 $\widehat{x_3, -x_0}$ 上存在点 $x$, 使得 $\|x_3 - x\|_{\ell_p} \le 1$. 因此, 由上述证明过程可知

$$T_0(\widehat{x_3, x}) = T_0(\widehat{x_3), T_0}(x),$$

进而可逐步推导出

$$T_0(\widehat{x_3, -x_0}) = T_0(\widehat{x_3), T_0}(-x_0), \quad T_0(\widehat{x_4, -x_0}) = T_0(\widehat{x_4), T_0}(-x_0).$$

综上可得, 对任意 $x \in S[b_p^{(2)}]$, 都有

$$T_0(\widehat{x_0, x}) = T_0(\widehat{x_0), T_0}(x).$$

再由 $x_0$ 的任意性可知定理成立. 证毕.

**定理 2.8** 对 $b_p^{(2)}$ 空间, $T_0$ 为 $S[b_p^{(2)}]$ 到 $S[b_p^{(2)}]$ 的满等距映射, 则对任意 $x, y \in S[b_p^{(2)}]$, 都有

$$\|x - y\|_{\ell_p} = \|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p}.$$

**证明** 对任意的 $x, y \in S[b_p^{(2)}]$, 由 $T_0$ 的等距性可知

$$\|x - y\|_{[b,p]} = \|T_0(x) - T_0(y)\|_{[b,p]}. \tag{2.1}$$

记 $a = \|x - y\|_{\ell_p}$, $b = \|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p}$. 因此关于 $a, b$ 会有四种情形:

**情形 I** $a \le 1$, $b \le 1$.

由 $b_p^{(2)}$ 空间的定义可知, 当 $\|x - y\|_{\ell_p} = a \le 1$, $\|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p} = b \le 1$ 时, 有

$$\|x - y\|_{[b,p]} = \|x - y\|_{\ell_p}, \quad \|T_0(x) - T_0(y)\|_{[b,p]} = \|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p}.$$

因此, 根据 (2.1) 式可得

$$\|x - y\|_{\ell_p} = \|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p}.$$

**情形 II** $a > 1$, $b > 1$.

由 $b_p^{(2)}$ 空间的定义可知, 当 $\|x - y\|_{\ell_p} = a > 1$, $\|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p} = b > 1$ 时, 有

$$\|x - y\|_{[b,p]} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \|x - y\|_{\ell_p}}, \quad \|T_0(x) - T_0(y)\|_{[b,p]} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p}}.$$

因此, 根据 (2.1) 式可得

$$\|x - y\|_{\ell_p} = \|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p}.$$

**情形 III** $a < 1$, $b > 1$.

此时, $\|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p} > \|x - y\|_{\ell_p}$, 由 $b_p^{(2)}$ 空间的定义可知

$$\begin{aligned} \|x - y\|_{[b,p]} = \|x - y\|_{\ell_p} = a = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p}}, \\ \|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p} = b = \frac{3 - 2a}{2a - 1} > 1 > a. \end{aligned}$$

由定理 2.7 知, 存在一点 $T_0(z_1) \in T_0(\widehat{x), T_0}(y)$ 满足 $\|T_0(x) - T_0(z_1)\|_{\ell_p} = \|x - y\|_{\ell_p} = a$. 因此, 对所有 $T_0(z) \in T_0(\widehat{z_1), T_0}(y)$ $(z \in \widehat{x, y})$, 可知

$$a < \|T_0(x) - T_0(z)\|_{\ell_p} < \|T_0(x) - T_0(y)\|_{\ell_p} = \frac{3 - 2a}{2a - 1}.$$

但 $\|x - z\|_{\ell_p} < \|x - y\|_{\ell_p} = a < 1$, 由 $b_p^{(2)}$ 及其范数的定义, 可得

$$\|x - z\|_{[b,p]} \ne \|T_0(x) - T_0(z)\|_{[b,p]},$$

这与 $T_0$ 的等距性矛盾, 故此情形不成立.

**情形 IV** $a>1$, $b<1$.

与情形 III 类似可推出矛盾.

综上, $\|x-y\|_{\ell_p}$ 与 $\|T_0(x)-T_0(y)\|_{\ell_p}$ 的关系只能遵循情形 I 与 II, 定理得证.

**定理 2.9** 对 $b_p^{(2)}$ 空间, $T_0$ 为 $S[b_p^{(2)}]$ 到 $S[b_p^{(2)}]$ 的满等距映射, 则对任意 $x\in S[b_p^{(2)}]$, 都有

$$T_0(-x)=-T_0(x).$$

**证明** 对任意的 $x=(\zeta,\eta)\in S[b_p^{(2)}]$, $\|x-(-x)\|_{\ell_p}=\|x+x\|_{\ell_p}=\|2x\|_{\ell_p}=2$, 由定理 2.8 知

$$\|T_0(x)-T_0(-x)\|_{\ell_p}=\|x-(-x)\|_{\ell_p}=2.$$

因此 $T_0(-x)=-T_0(x)$. 证毕.

由定理 2.9 知, 对于 $S[b_p^{(2)}]$ 到 $S[b_p^{(2)}]$ 的满等距映射 $T_0$, 必为 $(S[\ell_p^{(2)}],\|x\|_{\ell_p})$ 到 $(S[\ell_p^{(2)}],\|x\|_{\ell_p})$ 的满等距映射. 因此, 由定理 2.8 及 2.9, 我们得到如下的推论:

**推论 2.10** 对 $b_p^{(2)}$ 空间, $T_0$ 为 $S[b_p^{(2)}]$ 到 $S[b_p^{(2)}]$ 的满等距映射, 则对任意 $x,y\in S[b_p^{(2)}]$,都有

$$\|x\pm y\|_{\ell_p}=\|T_0(x)\pm T_0(y)\|_{\ell_p}.$$

## 3 主要结论: $b_p^{(2)}$ 空间单位球面间的等距映射

本节来讨论 $b_p^{(2)}$ 空间单位球面间等距映射的延拓问题.

**定理 3.1** 对 $b_p^{(2)}$ $(1\le p<\infty,\, p\ne 2)$ 空间, $T_0$ 为 $S[b_p^{(2)}]$ 到 $S[b_p^{(2)}]$ 的满等距映射, 则对任意的 $x,y\in S[b_p^{(2)}]$, 有

$$\operatorname{supp}(x)\cap\operatorname{supp}(y)=\emptyset\Leftrightarrow\|x\pm y\|_{\ell_p}^p=2=\|x\|_{\ell_p}^p+\|y\|_{\ell_p}^p.$$

**证明** 对任意的 $x=(\zeta_1,\eta_1)$, $y=(\zeta_2,\eta_2)\in S[b_p^{(2)}]$,

充分性. 如果 $\operatorname{supp}(x)\cap\operatorname{supp}(y)=\emptyset$, 不失一般性, 令 $\operatorname{supp}(x)=\{1\}$, $\operatorname{supp}(y)=\{2\}$, 也即 $x=(\zeta_1,0)$, $y=(0,\eta_2)$, 则

$$\|x\pm y\|_{\ell_p}^p=\|(\zeta_1,\pm\eta_2)\|_{\ell_p}^p=|\zeta_1|^p+|\eta_2|^p=2=\|x\|_{\ell_p}^p+\|y\|_{\ell_p}^p.$$

必要性. 如果 $\|x\pm y\|_{\ell_p}^p=2=\|x\|_{\ell_p}^p+\|y\|_{\ell_p}^p$, 也即

$$\|x+y\|_{\ell_p}^p+\|x-y\|_{\ell_p}^p=2(\|x\|_{\ell_p}^p+\|y\|_{\ell_p}^p),$$

$$|\zeta_1+\zeta_2|^p+|\eta_1+\eta_2|^p+|\zeta_1-\zeta_2|^p+|\eta_1-\eta_2|^p=2(|\zeta_1|^p+|\zeta_2|^p+|\eta_1|^p+|\eta_2|^p). \tag{3.1}$$

由著名的不等式 (对任意的 $a\ne 0$, $b\ne 0$)

$$|a+b|^p+|a-b|^p<2(|a|^p+|b|^p)\ \ (1<p<2),$$

$$|a+b|^p+|a-b|^p>2(|a|^p+|b|^p)\ \ (p>2)$$

可知 $b_p^{(2)}$ $(1\le p<\infty,\, p\ne 2)$ 空间中的 (3.1) 式只能在 $\zeta_1$ 与 $\zeta_2$ 中有一个为 0, 且 $\eta_1$ 与 $\eta_2$ 中有一个为 0 时才成立, 即

$$\zeta_1\cdot\eta_1=\zeta_2\cdot\eta_2=0,\quad \operatorname{supp}(x)\cap\operatorname{supp}(y)=\emptyset.$$

证毕.

**定理 3.2** 对 $b_p^{(2)}$ $(1 \le p < \infty,\ p \ne 2)$ 空间, $T_0$ 为 $S[b_p^{(2)}]$ 到 $S[b_p^{(2)}]$ 的满等距映射, 则对任意的 $x, y \in S[b_p^{(2)}]$, 有

$$\mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(y) = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{supp}[T_0(x)] \cap \mathrm{supp}[T_0(y)] = \emptyset.$$

**证明** 由推论 2.10 及定理 3.1 可得对任意 $x, y \in S[b_p^{(2)}]$,

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(y) = \emptyset &\Leftrightarrow \|x \pm y\|_{\ell_p}^p = 2 = \|x\|_{\ell_p}^p + \|y\|_{\ell_p}^p \\ &\Leftrightarrow \|T_0(x) \pm T_0(y)\|_{\ell_p}^p = 2 = \|T_0(x)\|_{\ell_p}^p + \|T_0(y)\|_{\ell_p}^p \\ &\Leftrightarrow \mathrm{supp}[T_0(x)] \cap \mathrm{supp}[T_0(y)] = \emptyset.\end{aligned}$$

证毕.

**定理 3.3** 对 $b_p^{(2)}$ $(1 \le p < \infty,\ p \ne 2)$ 空间, $T_0$ 为 $S[b_p^{(2)}]$ 到 $S[b_p^{(2)}]$ 的满等距映射, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, 则 $\{T_0(e_1), T_0(e_2)\}$ 为 $b_p^{(2)}$ 的一组标准正交基.

**证明** 对 $b_p^{(2)}$ 空间, 由 $\{e_1, e_2\}$ 为上述的一组标准正交基, 则 $e_1, e_2 \in S[b_p^{(2)}]$, 并且 $\mathrm{supp}(e_1) \cap \mathrm{supp}(e_2) = \emptyset$, 由定理 3.2 得

$$\mathrm{supp}[T_0(e_1)] \cap \mathrm{supp}[T_0(e_2)] = \emptyset, \quad \text{并且} \quad \|T_0(e_1)\|_{[b,p]} = \|T_0(e_2)\|_{[b,p]} = 1,$$

也即 $\{T_0(e_1), T_0(e_2)\}$ 为 $b_p^{(2)}$ 的一组标准正交基. 证毕.

**注 3.4** 由定理 3.3 我们还能推出 $\{T_0(e_1), T_0(e_2)\} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\}$.

**定理 3.5** 对 $b_p^{(2)}$ $(1 \le p < \infty,\ p \ne 2)$ 空间, $T_0$ 为 $S[b_p^{(2)}]$ 到 $S[b_p^{(2)}]$ 的满等距映射, 则对任意的 $x \in S[b_p^{(2)}]$, 都有 $T_0(x) = \overline{x}$ 或 $T_0(x) = \widetilde{x}$.

**证明** 对 $b_p^{(2)}$ 空间, $\{e_1, e_2\}$ 是一组标准正交基, $x = (\zeta_1, \zeta_2) \in S[b_p^{(2)}]$.

当 $x \in \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$, 则由定理 3.3 知

$$T_0(x) \in \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\},$$

也即 $T_0(x) = \overline{x}$ 或 $T_0(x) = \widetilde{x}$;

当 $x \notin \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$, 则

$$T_0(x) = x' = (\zeta_1', \zeta_2') \notin \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\},$$

对于 $\{T_0(e_1), T_0(e_2)\}$ 会有两种情形:

**情形 I** $T_0(e_1) = \bar{e_1}$, $T_0(e_2) = \bar{e_2}$.

由 $1 \le p < \infty$, $p \ne 2$, $x, x' \in S[b_p^{(2)}]$ 可知

$$\begin{aligned}\|x\|_{\ell_p}^p = 1 = |\zeta_1|^p + |\zeta_2|^p \Rightarrow 0 < |\zeta_1| < 1, \quad 0 < |\zeta_2| < 1, \\ \|x'\|_{\ell_p}^p = 1 = |\zeta_1'|^p + |\zeta_2'|^p \Rightarrow 0 < |\zeta_1'| < 1, \quad 0 < |\zeta_2'| < 1.\end{aligned}$$

从而

$$\|T_0(x) \pm T_0(e_1)\|_{\ell_p}^p = \|x \pm e_1\|_{\ell_p}^p = \|x' \pm \bar{e_1}\|_{\ell_p}^p = \|x' \pm \theta_1 e_1\|_{\ell_p}^p, \tag{3.2}$$

$$\|T_0(x) \pm T_0(e_2)\|_{\ell_p}^p = \|x \pm e_2\|_{\ell_p}^p = \|x' \pm \bar{e_2}\|_{\ell_p}^p = \|x' \pm \theta_2 e_2\|_{\ell_p}^p, \tag{3.3}$$

也即

$$\begin{aligned}\|x \pm e_1\|_{\ell_p}^p &= \|(\zeta_1 \pm 1, \zeta_2)\|_{\ell_p}^p = |\zeta_1 \pm 1|^p + |\zeta_2|^p = |\zeta_1 \pm 1|^p + 1 - |\zeta_1|^p, \\ \|x' \pm \bar{e_1}\|_{\ell_p}^p &= \|(\zeta_1' \pm \theta_1, \zeta_2')\|_{\ell_p}^p = |\zeta_1' \pm \theta_1|^p + |\zeta_2'|^p = |\zeta_1' \pm \theta_1|^p + 1 - |\zeta_1'|^p.\end{aligned}$$

因此, 由 (3.2) 式有

$$|\zeta_1+1|^p-|\zeta_1|^p=|\zeta_1'+\theta_1|^p-|\zeta_1'|^p, \tag{3.4}$$

$$|\zeta_1-1|^p-|\zeta_1|^p=|\zeta_1'-\theta_1|^p-|\zeta_1'|^p. \tag{3.5}$$

当 $\theta_1=1$ 时, 由函数 $f(t)=|t+1|^p-|t|^p$ 在 $-1<t<1$ 时为严格递增的, 结合 (3.4) 式可知 $\zeta_1'=\zeta_1=\theta_1\zeta_1$, 同样可知, 当 $\theta_2=1$ 时, $\zeta_2^{'}=\zeta_2=\theta_2\zeta_2$.

当 $\theta_1=-1$ 时, 由 (3.4) 式可得

$$|\zeta_1+1|^p-|\zeta_1|^p=|\zeta_1'-1|^p-|\zeta_1'|^p=|1-\zeta_1'|^p-|\zeta_1'|^p,$$

而函数 $f(t)=|t+1|^p-|t|^p$ 在 $-1<t<1$ 时的递增性可推出 $\zeta_1'=-\zeta_1=\theta_1\zeta_1$. 同样可得, 当 $\theta_2=-1$ 时, $\zeta_2^{'}=-\zeta_2=\theta_2\zeta_2$, 也即

$$T_0(x)=\bar{x}.$$

**情形 II** $T_0(e_1)=\widetilde{e_1}$, $T_0(e_2)=\widetilde{e_2}$.

$$\begin{aligned}
&\|x+e_1\|_{\ell_p}^p=|\zeta_1+1|^p+1-|\zeta_1|^p,\\
&\|x'+\tilde{e_1}\|_{\ell_p}^p=|\zeta_2'+\theta_2|^p+1-|\zeta_2'|^p,\\
&\|x-e_1\|_{\ell_p}^p=|\zeta_1-1|^p+1-|\zeta_1|^p,\\
&\|x'-\tilde{e_1}\|_{\ell_p}^p=|\zeta_2'-\theta_2|^p+1-|\zeta_2'|^p,\\
&\|T_0(x)+T_0(e_1)\|_{\ell_p}^p=\|x+e_1\|_{\ell_p}^p=\|x'+\theta_2e_2\|_{\ell_p}^p,\\
&\|T_0(x)-T_0(e_1)\|_{\ell_p}^p=\|x-e_1\|_{\ell_p}^p=\|x'-\theta_2e_2\|_{\ell_p}^p.
\end{aligned}$$

类似情形 I 的证明, 我们可得 $\zeta_2'=\theta_2\zeta_1$ 及 $\zeta_1'=\theta_1\zeta_2$, 也即

$$T_0(x)=\tilde{x}.$$

证毕.

**定理 3.6** 对 $b_p^{(2)}$ $(1\le p<\infty,\ p\ne 2)$ 空间, $T_0$ 为 $S[b_p^{(2)}]$ 到 $S[b_p^{(2)}]$ 的满等距映射, 则 $T_0$ 可延拓为全空间 $b_p^{(2)}$ 上的一个实线性等距映射.

**证明** 令

$$T(x)=\begin{cases}\|x\|_{\ell_p}T_0\Big(\dfrac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\Big), & x\ne\theta;\\ \theta, & x=\theta.\end{cases}$$

当 $x=\theta$ 或 $y=\theta$ 时, 不失一般性地设 $x=\theta$, 则 $T(x)=\theta$,

$$\|x-y\|_{\ell_p}=\|y\|_{\ell_p}\cdot\left\|T_0\Big(\frac{y}{\|y\|_{\ell_p}}\Big)\right\|_{\ell_p}=\left\|\|y\|_{\ell_p}T_0\Big(\frac{y}{\|y\|_{\ell_p}}\Big)\right\|_{\ell_p}=\|T(y)\|_{\ell_p}=\|T(x)-T(y)\|_{\ell_p}.$$

由性质 2.4 可知

$$\|x-y\|_{[b,p]}=\|y\|_{[b,p]}=\|T(y)\|_{[b,p]}=\|T(x)-T(y)\|_{[b,p]}.$$

当 $x,y\in b_p^{(2)}$ 且 $x\ne\theta$, $y\ne\theta$ 时, 由定理 3.4 可知 $T_0$ 对 $S[b_p^{(2)}]$ 中元素的作用效果会有两种情形:

**情形 I** $T_0(x_0)=\bar{x_0}$.

此时, 对任意 $x=(\zeta_1,\eta_1)$, $y=(\zeta_2,\eta_2)$, 有

$$
\begin{aligned}
&T_0\left(\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\right)=\overline{\left(\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\right)}=\frac{\bar{x}}{\|x\|_{\ell_p}},\quad T_0\left(\frac{y}{\|y\|_{\ell_p}}\right)=\overline{\left(\frac{y}{\|y\|_{\ell_p}}\right)}=\frac{\bar{y}}{\|y\|_{\ell_p}},\\
&T(x)=\|x\|_{\ell_p}T_0\left(\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\right)=\|x\|_{\ell_p}\cdot\frac{\bar{x}}{\|x\|_{\ell_p}}=\bar{x},\\
&T(y)=\|y\|_{\ell_p}T_0\left(\frac{y}{\|y\|_{\ell_p}}\right)=\|y\|_{\ell_p}\cdot\frac{\bar{y}}{\|y\|_{\ell_p}}=\bar{y}.
\end{aligned}
$$

因此

$$\|T(x)-T(y)\|_{[b,p]}=\|\bar{x}-\bar{y}\|_{[b,p]}=\|x-y\|_{[b,p]}$$

等距性满足, 且对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
T(\alpha x+\beta y)&=\|\alpha x+\beta y\|_{\ell_p}T_0\left(\frac{\alpha x+\beta y}{\|\alpha x+\beta y\|_{\ell_p}}\right)\\
&=\|\alpha x+\beta y\|_{\ell_p}\cdot\overline{\left(\frac{\alpha x+\beta y}{\|\alpha x+\beta y\|_{\ell_p}}\right)}\\
&=\overline{\alpha x+\beta y}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}=\alpha T(x)+\beta T(y)
\end{aligned}
$$

线性满足.

**情形 II** $T_0(x_0)=\tilde{x_0}$.

此时, 对任意 $x=(\zeta_1,\eta_1)$, $y=(\zeta_2,\eta_2)$, 有

$$
\begin{aligned}
&T_0\left(\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\right)=\left(\widetilde{\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}}\right)=\frac{\tilde{x}}{\|x\|_{\ell_p}},\quad T_0\left(\frac{y}{\|y\|_{\ell_p}}\right)=\left(\widetilde{\frac{y}{\|y\|_{\ell_p}}}\right)=\frac{\tilde{y}}{\|y\|_{\ell_p}},\\
&T(x)=\|x\|_{\ell_p}T_0\left(\frac{x}{\|x\|_{\ell_p}}\right)=\|x\|_{\ell_p}\cdot\frac{\tilde{x}}{\|x\|_{\ell_p}}=\tilde{x},\\
&T(y)=\|y\|_{\ell_p}T_0\left(\frac{y}{\|y\|_{\ell_p}}\right)=\|y\|_{\ell_p}\cdot\frac{\tilde{y}}{\|y\|_{\ell_p}}=\tilde{y}.
\end{aligned}
$$

因此

$$\|T(x)-T(y)\|_{[b,p]}=\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{[b,p]}=\|x-y\|_{[b,p]}$$

等距性满足, 且对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
T(\alpha x+\beta y)&=\|\alpha x+\beta y\|_{\ell_p}T_0\left(\frac{\alpha x+\beta y}{\|\alpha x+\beta y\|_{\ell_p}}\right)\\
&=\|\alpha x+\beta y\|_{\ell_p}\cdot\left(\frac{\widetilde{\alpha x+\beta y}}{\|\alpha x+\beta y\|_{\ell_p}}\right)\\
&=\widetilde{\alpha x+\beta y}=\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y}=\alpha T(x)+\beta T(y)
\end{aligned}
$$

线性满足.

因此, $T$ 即为 $T_0$ 的延拓至全空间的线性等距映射. 证毕.

**致谢** 衷心感谢审稿人提供的细心帮助和宝贵意见, 以及编辑人员的细心审阅和建议.

# 参 考 文 献


[1] An G. M., Isometries on unit sphere of ($\ell^{\beta_n}$), *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, **301**: 249–254.

[2] Baker J. A., Isometries in normed space, *Amer. Math. Monthly*, 1971, **78**: 655–658.

[3] Charzynski Z., Sur les transformationes isométriques des espace du type(F), *Studia Math.*, 1953, **13**: 94–121.

[4] Cheng L. X., Dong Y. B., On a generalized Mazur–Ulam question: Extension of isometries between unit spheres of Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, **377**: 464–470.

[5] Diestel J., Geometry of Banach Spaces (Lecture Notes in Mathematics: 485), Springer-Berlag, Berlin, 1975.

[6] Ding G. G., On the extension of isometries between unit spheres of $E$ and $C(\Omega)$, *Acta Math. Sinica, Engl. Ser.*, 2003, **19**(4): 793–800.

[7] Ding G. G., The isometric extension of an into mapping from the unit sphere $S(l(\Gamma))$ to the unit sphere $S(E)$, *Acta Math. Sci. Engl. Ed.*, 2009, **29B**(3): 469–479.

[8] Ding G. G., The isometric extension problem in the unit spheres of $\ell^p(\Gamma)$ $(p > 1)$ type spaces (in Chinese), *Science in China, Ser. A*, 2002, **32**(11): 991–995.

[9] Ding G. G., The representation theorem of onto isometric mapping between two unit sphere of $\ell^1(\Gamma)$-type spaces and the application on isometric extension problem, *Acta Math. Sinica, Engl. Ser.*, 2004, **20**(6): 1089–1094.

[10] Ding G. G., The representation of onto isometric mappings between two spheres of $\ell^\infty$-type spaces and the application on isometric extension problem, *Science in China, Ser. A*, 2004, **34**(2): 157–164 (in Chinese); 2004, **47**(5): 722–729 (in English).

[11] Ding G. G., The 1-Lipschitz mapping between the unit spheres of two Hilbert spaces can be extended to a real linear isometry of the whole space, *Sci. China Ser. A*, 2002, **45**(4): 479–483.

[12] Ding G. G., New Analysis of Functional Analysis, Science Press, Beijing, 2007.

[13] Fang X. N., Wang J. Y., Extension of isometries between unit spheres of normed space $E$ and $l^1(\Omega)$, *Acta Math. Sinica Chin. Ser.*, 2008, **51**(1): 24–28.

[14] Fu X. H., Isometries on the space $s$, *Acta Math. Sci. Ser. B, Engl. Ed.*, 2006, **26B**: 502–508.

[15] Gehér G. P., A contribution to the Aleksandrov conservative distance problem in two dimensions, *Liacar Algebra Appl.*, 2015, **481**: 280–287.

[16] Li J. Z., Isometries on unit spheres of an $F$-space, *Acta Sci. Nat. Univ. Nankai.*, 2012, **45**: 80–85.

[17] Liu R., On extension of ismetries between unit spheres of $L^\infty(\Gamma)$-type space and a Banach space $E$, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **333**: 959–970.

[18] Mankiewicz P., On extension of isoometries in normed linear spaces, *Bull. Acad Polon Sci. Ser. Sci. Math. Astronom Phys.*, 1972, **20**: 367–371.

[19] Mazur S., Ulam S., Sur less transformationes isometriques d'espaces vectoriels noemes, *Comptes Rendus Acad Sci. Paris*, 1932, **194**: 946–948.

[20] Tingley D., Isometries of the unit spheres, *Geometriae Dedicata*, 1987, **22**: 371–387.

[21] Wang R. D., On linear Cxtension of isometries between the unit spheres of two-dimensional strictly convex normed space, *Acta Math. Sinica Chin. Ser.*, 2008, **51**(5): 847–852.

[22] Yi J. J., Wang R. D., Wang X. X., Extension of isometries between the unit spheres of complex $l^p(\Gamma)$ $(p > 1)$ spaces, *Acta Math. Sci. Engl. Ed.*, 2014, **34B**(5): 1540–1550.

[23] Zhang L., On the isometric extension problem from the unit sphere $S(\ell_\infty^{(2)})$ into $S(\ell_\infty^{(3)})$, *Acta Sci. Nat. Univ. Nankai.*, 2006, **39**: 110–112.