文章编号: 0583-1431(2021)01-0151-04 **文献标识码: A**

与 Smarandache 函数有关的一个方程的解的注记

刘 莉 李 钰

安徽机电职业技术学院 芜湖 241002
E-mail: jsslliuli@163.com; ahjdliyu@126.com

摘 要 设 $\varphi(n)$、$S(n)$ 分别表示正整数 n 的 Euler 函数和 Smarandache 函数, 白海荣和廖群英在 [Smarandache 函数的几类相关方程的解, 数学学报中文版, 2019, **62**(2): 247–254] 中称方程 $\varphi(n)=\sum_{d\,|\,n}S(d)$ 只有两个解, 分别为 $n=2^5$ 和 $n=3\times 2^5$. 本文指出, 这两个数均不是此方程的解, 并指出其出错原因是因为他们对 Möbius 反转公式的错误理解所造成的.

关键词 Euler 函数; Smarandache 函数; Möbius 反转公式
MR(2010) 主题分类 11A25
中图分类 O156.4

A Note on Solutions of an Equation Relating to Smarandache Function

Li LIU Yu LI

Anhui Technical College of Mechanical and Electrical Engineering,
Wuhu 241002*, P. R. China*
E-mail: *jsslliuli@163.com*; *ahjdliyu@126.com*

Abstract For any positive integer n, let $\varphi(n)$ be the Euler function and $S(n)$ be the Smarandache function. Bai and Liao [On the solutions for several classes of equations related to the smarandache function, *Acta Math. Sin., Chin. Series*, 2019, **62**(2): 247–254] proved that the equation $\varphi(n)=\sum_{d\,|\,n}S(d)$ has only two solutions: $n=2^5$ and $n=3\times 2^5$. In this paper, we point out that both numbers are not solutions of the equation, and point out that this mistake was caused by that the authors misunderstood the Möbius inversion formula.

Keywords Euler function; Smarandache function; Möbius inversion formula
MR(2010) Subject Classification 11A25
Chinese Library Classification O156.4

收稿日期: 2019-12-24; 接受日期: 2020-04-30
基金项目: 安徽省高校自然科学重点项目 (KJ2019A1)

1 引言

对于任意的正整数 n, Euler 函数 $\varphi(n)$ 定义为不超过 n 且与 n 互素的正整数的个数, Smarandache 函数定义为使得 $n\,|\,m!$ 的最小的正整数 m, 即

$$S(n)=\min\{m\in\mathbb{N}: n\,|\,m!\}. \tag{1.1}$$

记

$$F(n)=\sum_{d\,|\,n}S(d). \tag{1.2}$$

关于方程

$$\varphi(n)=F(n), \tag{1.3}$$

文 [1] 得到以下错误命题 A.

命题 A (文 [1, 定理 1.6]) 关于正整数 n 的方程 (1.3) 只有两个解 $n=2^5$ 和 $n=3\times 2^5$.

根据 Smarandache 函数的定义 (1.1) 易算出 $n=2^5$ 和 $n=3\times 2^5$ 不是方程 (1.3) 的解:

$$\begin{aligned}
F(2^5)&=S(1)+S(2)+S(4)+S(8)+S(16)+S(32)\\
&=1+2+4+4+6+8=25\neq 16=\varphi(2^5),\\
F(3\times 2^5)&=S(1)+S(2)+S(3)+S(4)+S(6)+S(8)+S(12)\\
&\quad\ +S(16)+S(24)+S(32)+S(48)+S(96)\\
&=1+2+3+4+3+4+4+6+4+8+6+8=53\\
&\neq 32=\varphi(3\times 2^5),
\end{aligned}$$

所以, 命题 A 是一个错误命题.

本文第 2 节将阐述文 [1] 这个错误产生的原因是在证明命题 A 时错误地用了 Möbius 反转公式.

2 出错原因

文 [3, 第 7.4 节] 详细阐述了 Möbius 反转公式和 Möbius 函数的诞生过程. 设 f 为一个算术函数 (它对每一个正整数 n 有一个唯一确定的值, 例如 Smarandache 函数 S), F 是 f 的求和函数, 它对于每一个正整数 n 所确定的值是通过 f 对于一些相关正整数的值来表达的.

$$F(n)=\sum_{d\,|\,n}f(d). \tag{2.1}$$

这个关系可以反转过来吗? 就是说, 有一个简便的方法通过 F 对于一些相关正整数的值来表达 f 的函数值吗? 在研究这个问题时 (研究过程详见文 [3, 第 7.4 节]), 诞生了 Möbius 反转公式和 Möbius 函数.

定理 A (文 [3, 定理 7.16]) 设 f 为一个算术函数, F 是 f 的求和函数 (2.1). 那么对于所有正整数 n,

$$f(n)=G(n), \tag{2.2}$$

这里

$$G(n)=\sum_{d\,|\,n}\mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right)\left(=\sum_{d\,|\,n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)F(d)\right), \tag{2.3}$$

而 μ 就是 Möbius 函数

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & n=1;\\ (-1)^r, & n=p_1p_2\cdots p_r,\ \text{其中 } p_i \text{ 为不同的素因子};\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

从 Möbius 反转公式和 Möbius 函数的诞生过程和定理 A 的证明过程, 不难看出, 对于一个特定的正整数 n_0, 要证明

$$f(n_0)=G(n_0),$$

必须用到

“n_0 的每一个因子 n 满足 (2.1)”

这个条件. 反过来也一样, 对于一个特定的正整数 n_0 要证明

$$F(n_0)=\sum_{d\,|\,n_0}f(d),$$

必须用到

“n_0 的每一个因子 n 满足 (2.2)”

这个条件.

文 [1] 在证明命题 A 时错误地认为, 方程 (1.3) 等价于

$$S(n)=H(n), \tag{2.4}$$

这里

$$H(n)=\sum_{d\,|\,n}\mu(d)\varphi\left(\frac{n}{d}\right)\left(=\sum_{d\,|\,n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\varphi(d)\right). \tag{2.5}$$

现在令 (2.1) 中的 f 就是 Smarandache 函数 S, 但 Euler 函数 φ 不是 (2.1) 中的 F, 它对于每一个正整数 n 所确定的值不是通过 S 对于一些相关正整数的值来表达的, 而是先定义好的 (与 S 的函数值毫无关联). 所以 (2.5) 中的 H 就不是 (2.3) 中的 G. 对于一些特定的正整数 n_0 (例如 $n_0=2^5$ 或 3×2^5), 虽然可能有 $S(n_0)=H(n_0)$, 但不能推出 $\varphi(n_0)=F(n_0)$, 因为 n_0 的非平凡因子 n 都不满足 (2.4). 文 [1] 在证明命题 A 时用的这个等价式 (2.4) 也就不能成立了. 这一点可从下面的 2 个表格所列数据更清楚地看出来.

n	1	2	4	8	16	32
$\varphi(n)$	1	1	2	4	8	16
$S(n)$	1	2	4	4	6	**8**
$F(n)$	1	3	7	11	17	25
$H(n)$	1	0	1	2	4	**8**

表 1　2^5 的因子对应的四种函数数值表

n	1	2	3	4	6	8	12	16	24	32	48	96
$\varphi(n)$	1	1	2	2	2	4	4	8	8	16	16	32
$S(n)$	1	2	3	4	3	4	4	6	4	8	6	**8**
$F(n)$	1	3	4	7	9	11	17	17	26	25	37	53
$H(n)$	1	0	1	1	0	2	1	4	2	8	4	**8**

表 2 3×2^5 的因子对应的四种函数数值表

从表 1 和表 2 中我们还可看出, 当 $n_0=1$ 时, 上面提到的条件成立, 所以 1 是方程 (1.3) 的解 (平凡解).

最后我们指出, 关于方程 (1.3) 的解, 早在 2013 年已有完整的结论.

命题 B [2] 对于任意的正整数 n, 方程 (1.3) 成立当且仅当 $n=1$.

致谢 衷心感谢张振祥老师对本文初稿的修改意见.

参 考 文 献

[1] Bai H. R., Liao Q. Y., On the solutions for several classes of equations related to the smarandache function, *Acta Math. Sin., Chin. Series*, 2019, **62**(2): 247–254.

[2] Liu Z., Shi P., On the solvability of the equation $\phi(n)=\sum_{d\,|\,n}S(d)$ (in Chinese), *Journal of Southwest University* (*Natural Science Edition*), 2013, **35**(6): 54–58.

[3] Kenneth H. R., Elementary Number Theory and Its Applications, 4th Ed., Addison Wesley, Reading, MA, Longman, 2000.