第64卷第1期 数学学报中文版 Vol.64, No.1
2021年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2021

**文章编号:** 0583-1431(2021)01-0139-06 **文献标识码:** A

# 加权 Bloch 空间上复合算子的线性组合

张 利 楚秀娇

南阳师范学院 南阳 473061
E-mail: zhangli0977@126.com; chuxiujiao@163.com

**摘 要** 设 $\lambda_i$ $(i=1,\ldots,N)$ 是一列非 0 的数, $\mathbb{D}$ 是一维复平面 $\mathbb{C}$ 的开单位圆盘, $\varphi_i$ $(i=1,\ldots,N)$ 是 $\mathbb{D}$ 的解析自映射, 本文研究了定义在加权 Bloch 空间上复合算子线性组合 $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_{\varphi_i}$ 的紧致性.

**关键词** 加权 Bloch 空间; 复合算子; 线性组合; 紧致性
**MR(2010) 主题分类** 47B33, 32A37, 32H02
**中图分类** O174.5

## Linear Combinations of Composition Operators on Weighted Bloch Type Space

Li ZHANG Xiu Jiao CHU

*Nanyang Normal University, Nanyang* 473061*, P. R. China*
*E-mail*: *zhangli*0977*@*126*.com*; *chuxiujiao@*163*.com*

**Abstract** For $i=1,2,\ldots,N$, let $\lambda_i$ be nonzero number, and $\mathbb{D}$ the unit open disk of complex plane $\mathbb{C}$, $\varphi_i$ is analytic self-maps of $\mathbb{D}$. In this paper, the compactness of linear combinations of composition operators $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_{\varphi_i}$ on the weighted Bloch space is discussed.

**Keywords** weighted Bloch space; composition operator; linear combinations; compactness
**MR(2010) Subject Classification** 47B33, 32A37, 32H02
**Chinese Library Classification** O174.5

## 1 引言

设 $\mathbb{D}$ 是一维复平面 $\mathbb{C}$ 的开单位圆盘, $H(\mathbb{D})$ 为定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数类. 用 $S(\mathbb{D})$ 表示 $\mathbb{D}$ 上全体解析自映射构成的集合.

收稿日期: 2020-01-03; 接受日期: 2020-03-26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11526116); 南阳师范学院自然科学基金资助项目 (QN2017047)

加权的 Bloch 空间 $\mathscr{B}_\alpha$ $(\alpha > 1)$ 是由全体满足

$$|||f||| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha|f'(z)| < \infty$$

的解析函数 $f$ 构成的, 并且 $|||\cdot|||$ 是 $\mathscr{B}_\alpha$ 的完备半范数. 如果定义空间范数为 $\|f\|_\alpha = |f(0)| + |||f|||$, 则 $\mathscr{B}_\alpha$ 构成一个 Banach 空间.

设 $\varphi \in S(\mathbb{D})$, 由 $\varphi$ 诱导的复合算子 $C_\varphi$ 定义为 $(C_\varphi f)(z) = f(\varphi(z))$, $f \in H(\mathbb{D})$, $z \in \mathbb{D}$. 关于复合算子的研究已经持续了很长时间, 可参阅书籍 [1, 10, 11, 15] 及论文 [5–7, 14].

设 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ $(N \geq 2)$ 是 $S(\mathbb{D})$ 中不同的映射, 且对每个 $i$, 有 $\|\varphi_i\|_\infty = 1$, $\lambda_i$ 是 $\mathbb{C}$ 中 $N$ 个非零数, 复合算子的线性组合定义为 $T = \sum_{i=1}^N \lambda_i C_{\varphi_i}$.

在文 [8] 中, Lou 得到 $C_\varphi$ 是 $\mathscr{B}_\alpha$ 上的紧算子等价于如下式子成立:

$$\frac{(1-|z|^2)^\alpha|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha} \to 0 \quad 当 \quad |\varphi(z)| \to 1 \text{ 时}. \tag{1.1}$$

Hosokawa 和 Ohno [3] 研究了 Bloch 空间上复合算子的差分 $C_\varphi - C_\psi$, 在此基础上, Nieminen 在文 [9] 中研究了加权 Bloch 空间上复合算子差分的紧致性, 随后, Shi 和 Li [12] 根据 $\varphi^n - \psi^n$ 的 Bloch 空间范数, 给出了复合算子差分紧致的另外一种表示形式.

Izuchi, Ohno [4] 和 Nieminen, Ohno [2] 分别讨论了 $H^\infty$, Bloch 空间上复合算子线性组合的紧致性, 随后, Shi 和 Li [13] 给出了这两个空间上复合算子线性组合紧致性的另外一种表示形式. 本文将研究在加权 Bloch 空间上复合算子线性组合的紧致性问题.

在此, 我们先约定 $C$ 表示一个非负的常数, 且其真正数值在不同的位置出现时是可以不同的. $a \lesssim b$ 表示存在一个 $C$ 满足 $a \leq Cb$. $a \approx b$ 表示 $a \lesssim b$, $b \lesssim a$ 同时成立.

## 2 预备知识

首先介绍一些符号和相关的引理.

对点 $a \in \mathbb{D}$, $\mathbb{D}$ 的 Möbius 变换定义为 $\phi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$, 显然有 $\phi_a(0) = a$, $\phi_a(a) = 0$ 和 $\phi_a = \phi_a^{-1}$.

设 $z$, $w$ 为 $\mathbb{D}$ 中两点, $z$ 和 $w$ 间的伪双曲距离为

$$\rho(z,w) = |\phi_z(w)| = \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|,$$

并且很容易验证 $1-\rho^2(z,w) = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2}$.

映射 $\varphi \in S(\mathbb{D})$, 定义 $\varphi^\sharp$ 为 $\varphi^\sharp(z) = \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha}\varphi'(z)$.

假设 $\varphi_i : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ 是两两不同的映射. 令 $\triangle$ 为满足条件 (i)–(iv) 的所有点列 $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ 构成的集合, 其中四个条件为:

(i) 当 $n \to \infty$ 时, $z_n \to \zeta$, 其中 $|\zeta| = 1$;

(ii) 对每个 $i$, $\{\varphi_i(z_n)\}$ 是收敛的点列;

(iii) 对每个 $i$, $\{\varphi_i^\sharp(z_n)\}$ 是收敛的数列;

(iv) 对 $i, j$, $\{\rho_{i,j}(z_n)\}$ 是收敛的数列, 其中 $\rho_{i,j}(z_n) = \rho(\varphi_i(z_n), \varphi_j(z_n))$.

给定点列 $\{z_n\} \in \triangle$ 和指标 $j = 1, 2, \ldots, N$, 定义 $I\{z_n\} = \{i : |\varphi_i(z_n)| \to 1\}$, $I_j\{z_n\} = \{i : \rho_{i,j}(z_n) \to 0\}$. 这里所有的极限趋近过程都为 $n \to \infty$.

如果当 $n\to\infty$ 时, 有 $|z_n|\to 1$, 则易证 $\{z_n\}$ 存在子列 $\{z_{n_k}\}$ 满足 $\{z_{n_k}\}\in\triangle$.

根据文献 [2] 可知, 当 $s,t\in I\{z_n\}$ 时, 集合 $I_s\{z_n\}$ 和 $I_t\{z_n\}$ 要么无交要么相同. 如果用 “+” 表示无交并, 则有 $I(z_n)=I_{j1}(z_n)+\cdots+I_{jp}(z_n)$.

下面给出一些相关的引理.

**引理 2.1** 设 $\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, $|a_n|\to 1$ $(n\to\infty)$, 函数列

$$g_n(z)=\frac{1-|a_n|^2}{(1-\overline{a_n}z)^\alpha}\phi_{a_n}(z),\quad z\in\mathbb{D}.$$

假设 $g_n$ 的幂级数展开式为 $g_n(z)=\sum_{k=0}^\infty b_{n,k}z^k$, 则存在常数 $C>0$ 满足

$$\sum_{k=0}^\infty |b_{n,k}|k^{1-\alpha}<C,$$

且对固定的 $K$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^K |b_{n,k}|k^{1-\alpha}=0.$$

**证明** 因为 $\frac{1}{(1-\overline{a_n}z)^\alpha}=\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)}\overline{a_n}^kz^k$, $\phi_{a_n}(z)=a_n-(1-|a_n|^2)\sum_{k=0}^\infty\overline{a_n}^kz^{k+1}$, 所以有

$$\begin{aligned}
g_n(z)&=\frac{1-|a_n|^2}{(1-\overline{a_n}z)^\alpha}\phi_{a_n}(z)\\
&=(1-|a_n|^2)\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)}\overline{a_n}^kz^k\right)\left[a_n-(1-|a_n|^2)\sum_{k=0}^\infty\overline{a_n}^kz^{k+1}\right]\\
&=(1-|a_n|^2)a_n\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)}\overline{a_n}^kz^k\\
&\quad-(1-|a_n|^2)^2\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)}\overline{a_n}^kz^k\right)\left(\sum_{k=0}^\infty\overline{a_n}^kz^{k+1}\right)\\
&=(1-|a_n|^2)a_n\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)}\overline{a_n}^kz^k-(1-|a_n|^2)^2\left(\sum_{k=1}^\infty\left(\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\Gamma(l+\alpha)}{l!\Gamma(\alpha)}\right)a_n^{k-1}z^k\right).
\end{aligned}$$

因此

$$|b_{n,k}|\le(1-|a_n|^2)\frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)}|a_n|^k+(1-|a_n|^2)^2\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\Gamma(l+\alpha)}{l!\Gamma(\alpha)}|a_n|^{k-1},\quad k>1.$$

根据斯特林公式, 当 $k\to\infty$ 时, 可得

$$\frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)}\approx k^{\alpha-1};\quad\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\Gamma(l+\alpha)}{l!\Gamma(\alpha)}\approx k^\alpha.$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^\infty|b_{n,k}|k^{1-\alpha}&\lesssim(1-|a_n|^2)\sum_{k=0}^\infty|a_n|^k+(1-|a_n|^2)^2\sum_{k=0}^\infty k|a_n|^{k-1}\\
&\lesssim(1-|a_n|^2)\frac{1}{1-|a_n|}+(1-|a_n|^2)^2\frac{1}{(1-|a_n|)^2}\le C.
\end{aligned}$$

对固定的 $K$, 我们有

$$
\begin{aligned}
0 &\le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{K}|b_{n,k}|k^{1-\alpha}\\
&\lesssim \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{K}(1-|a_n|^2)\left[\frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)}|a_n|^k k^{1-\alpha}+\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\Gamma(l+\alpha)}{l!\Gamma(\alpha)}|a_n|^{k-1}k^{1-\alpha}\right]\\
&\lesssim \lim_{n\to\infty}(1-|a_n|^2)=0.
\end{aligned}
$$

证毕.

**引理 2.2** 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是非负的数列, 对 $\forall N$,

$$A_N=a_1+a_2+\cdots+a_N\le B_N=b_1+b_2+\cdots+b_N,$$

若存在常数 $C>0$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n n^{1-\alpha}<C$, 则有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{1-\alpha}<C$.

**证明** 根据阿贝尔变换, 对 $\forall N$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}a_n n^{1-\alpha}&=(1^{1-\alpha}-2^{1-\alpha})A_1+(2^{1-\alpha}-3^{1-\alpha})A_2+\cdots+[(N-1)^{1-\alpha}-N^{1-\alpha}]A_{N-1}+N^{1-\alpha}A_N\\
&\le(1^{1-\alpha}-2^{1-\alpha})B_1+(2^{1-\alpha}-3^{1-\alpha})B_2+\cdots+[(N-1)^{1-\alpha}-N^{1-\alpha}]B_{N-1}+N^{1-\alpha}B_N\\
&=\sum_{n=1}^{N}b_n n^{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n n^{1-\alpha}<C$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{1-\alpha}<C$. 证毕.

**引理 2.3** 设 $\{b_n\}\subset\mathbb{D}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, $g_n$ 为引理 2.1 中的函数列, $f_n(z)=g_n(z)\phi_{b_n}^2(z)$. 假设 $f_n$ 的幂级数展开式为 $f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{n,k}z^k$, 则存在常数 $C>0$ 满足

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_{n,k}|k^{1-\alpha}<C,$$

且对固定的 $K$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{K}|c_{n,k}|k^{1-\alpha}=0$.

**证明** 因为 $g_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{n,k}z^k$, $\phi_{b_n}(z)=b_n-(1-|b_n|^2)\sum_{k=0}^{\infty}\overline{b_n}^k z^{k+1}$, 对任意的 $K$, 有

$$\left(\sum_{k=0}^{K}b_{n,k}z^k\right)\left(b_n-(1-|b_n|^2)\sum_{k=0}^{K}\overline{b_n}^k z^{k+1}\right)^2=c_{n,0}+c_{n,1}z+\cdots+c_{n,K}z^K+z^{K+1}h(z),$$

这里 $h(z)$ 是一个多项式.

因此可得

$$\sum_{k=0}^{K}|c_{n,k}|\le\left(\sum_{k=0}^{K}|b_{n,k}|\right)\left(|b_n|+(1-|b_n|^2)\sum_{k=0}^{K}|b_n|^k\right)^2\le 9\sum_{k=0}^{K}|b_{n,k}|,$$

其中 $|b_n|+(1-|b_n|^2)\sum_{k=0}^{\infty}|b_n|^k\le 3$.

根据引理 2.2, 可知 $\sum_{k=0}^{\infty}|c_{n,k}|k^{1-\alpha}<C$.

对固定的 $K$, 有

$$0\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{K}|c_{n,k}|k^{1-\alpha}\le 9\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{K}|b_{n,k}|k^{1-\alpha}=0.$$

证毕.

**引理 2.4** (文 [12, 引理 1]) 假设 $f \in \mathscr{B}_\alpha$, 则存在与 $f$ 无关的常数 $C > 0$, 满足对任意的 $z, w \in \mathbb{D}$, $|(1-|z|^2)^\alpha f'(z) - (1-|w|^2)^\alpha f'(w)| \le C\|f\|_\alpha \rho(z,w)$.

**引理 2.5** (文 [13, 引理 1]) 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是由 $\mathbb{D}$ 上的解析函数构成的两个 Banach 空间, $\|\cdot\|_{X\to Y}$ 表示算子范数, $T$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的有界算子. 假设 $\{f_n\}$ 是 $X$ 中的函数列, $f_n(z) = \sum_{j=0}^\infty a_{n,j} z^j$, 如果

(i) 存在与 $n$ 无关的常数 $C > 0$ 满足 $\sum_{j=0}^\infty |a_{n,j}|\,\|z^j\|_X \le C$;

(ii) 对固定的 $k$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^k |a_{n,j}|\,\|z^j\|_X = 0$,

则 $\lim_{n\to\infty} \|Tf_n\|_Y \lesssim \limsup_{n\to\infty} \frac{\|Tz^n\|_Y}{\|z^n\|_X}$.

下面的引理是证明算子为紧算子时非常重要的论断, 其证明可由文献 [1, 命题 3.11] 的证明思路做简单修改得到.

**引理 2.6** 算子 $T: \mathscr{B}_\alpha \to \mathscr{B}_\alpha$ 是紧致的当且仅当 $T: \mathscr{B}_\alpha \to \mathscr{B}_\alpha$ 是有界的, 且对 $\mathscr{B}_\alpha$ 中任意在 $\mathbb{D}$ 上内闭一致收敛到 0 的有界函数列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有: 当 $k\to\infty$ 时, $\|Tf_k\|_\alpha \to 0$.

## 3 复合算子线性组合的紧致性

本节研究 $\mathscr{B}_\alpha$ 上复合算子线性组合的紧致性. 在此假设对每个 $i$, $C_{\varphi_i}$ 是 $\mathscr{B}_\alpha$ 上的有界算子, 则 $\varphi_i^\sharp$ 在 $\mathbb{D}$ 上有界.

**定理 3.1** 下列三个结论是等价的:

(i) $T = \sum_{i=1}^N \lambda_i C_{\varphi_i}$ 是紧算子.

(ii) $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \|\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i^n\|_\alpha = 0$.

(iii) 对任意的 $\{z_n\} \in \triangle$, 以及 $j \in I\{z_n\}$, 有 $\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I_j\{z_n\}} \lambda_i \varphi_i^\sharp(z_n) = 0$.

**证明** (i)⇒(ii) 假设 $T$ 是 $\mathscr{B}_\alpha$ 上的紧算子, 则考虑单项式函数 $z^n$, $\|z^n\|_\alpha \approx n^{1-\alpha}$. 令 $f_n(z) = \frac{z_n}{\|z^n\|_\alpha}$, 则当 $n\to\infty$ 时, $f_n$ 在 $\mathbb{D}$ 上内闭一致收敛到零. 因此根据引理 2.6, 可得

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|Tf_n\|_\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\|\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i^n\|_\alpha}{\|z^n\|_\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \left\| \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i^n \right\|_\alpha.$$

(ii)⇒(iii) 不妨设 $j = 1$. 设 $\{z_n\} \in \triangle$, 且 $|\varphi_1(z_n)| \to 1$. 将 $I\{z_n\}$ 记作 $I$, $I_1\{z_n\}$ 记作 $J$. 下证 $\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in J} \lambda_i \varphi_i^\sharp(z_n) = 0$.

令 $f_n(z) = \frac{1-|\varphi_1(z_n)|^2}{(1-\overline{\varphi_1(z_n)}z)^\alpha} \phi_{\varphi_1(z_n)}(z) \cdot \prod_{i\in I\setminus J} \phi^2_{\varphi_i(z_n)}(z)$, 易证 $\{f_n\} \subset \mathscr{B}_\alpha$ 是有界函数列, 且当 $n\to\infty$ 时, $f_n$ 在 $\mathbb{D}$ 上内闭一致收敛到零. 故有

$$\|Tf_n\|_\alpha \ge (1-|z_n|^2)^\alpha |(Tf_n)'(z_n)| = \left| \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i^\sharp(z_n)(1-|\varphi_i(z_n)|^2)^\alpha f_n'(\varphi_i(z_n)) \right|.$$

当 $i \notin I$ 时, 存在常数 $\delta < 1$ 满足 $|\varphi_i(z_n)| < \delta$, 因此 $f_n'(\varphi_i(z_n)) \to 0$ $(n\to\infty)$. 又因 $C_{\varphi_i}$ 有界, 则 $|\varphi_i^\sharp(z_n)|$ 有界, 从而 $\lim_{n\to\infty} |\sum_{i\notin I} \lambda_i \varphi_i^\sharp(z_n)(1-|\varphi_i(z_n)|^2)^\alpha f_n'(\varphi_i(z_n))| = 0$. 而 $i \in I\setminus J$ 时, 有 $f_n'(\varphi_i(z_n)) = 0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} \|Tf_n\|_\alpha \gtrsim \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i\in J} \lambda_i \varphi_i^\sharp(z_n)(1-|\varphi_i(z_n)|^2)^\alpha f_n'(\varphi_i(z_n)) \right|.$$

当 $i \in J$ 时, 有 $\rho_{1i}(z_n) \to 0$ $(n\to\infty)$, 则由引理 2.4 知

$$\lim_{n\to\infty} |(1-|\varphi_i(z_n)|^2)^\alpha f_n'(\varphi_i(z_n)) - (1-|\varphi_1(z_n)|^2)^\alpha f_n'(\varphi_1(z_n))| = 0.$$

所以有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|Tf_n\|_\alpha &\gtrsim \lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)(1-|\varphi_i(z_n)|^2)^\alpha f_n'(\varphi_i(z_n))\Big| \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)\Big|(1-|\varphi_1(z_n)|^2)^\alpha|f_n'(\varphi_1(z_n))| \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)\Big|(1-|\varphi_1(z)|^2)^\alpha\frac{1}{(1-|\varphi_1(z)|^2)^\alpha}\prod_{i\in I\setminus J}\phi^2_{\varphi_i(z_n)}(\varphi_1(z_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)\Big|\prod_{i\in I\setminus J}\rho_{1i}^2(z_n).
\end{aligned}$$

如果 $\lim_{n\to\infty}\|Tf_n\|_\alpha=0$, 则由 $\lim_{n\to\infty}\prod_{i\in I\setminus J}\rho_{1i}(z_n)\neq 0$ 可得 $\lim_{n\to\infty}|\sum_{i\in J}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)|=0$.

接下来, 只需证明当 $\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1}\|\sum_{i=1}^N\lambda_i\varphi_i^n\|_\alpha=0$ 时, $\lim_{n\to\infty}\|Tf_n\|_\alpha=0$ 成立即可.

假设 $f_n(z)=\sum_{l=0}^\infty a_{n,l}z^l$, 根据引理 2.3, 可得

$$\sum_{l=0}^\infty|a_{n,l}|\|z^l\|_\alpha\lesssim\sum_{l=0}^\infty|a_{n,l}|l^{1-\alpha}<C,\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^L|a_{n,l}|\|z^l\|_\alpha\lesssim\lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^L|a_{n,l}|l^{1-\alpha}=0.$$

再由引理 2.5 得 $\lim_{n\to\infty}\|Tf_n\|_\alpha\le\limsup_{n\to\infty}n^{\alpha-1}\|Tz^n\|_\alpha=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1}\|\sum_{i=1}^N\lambda_i\varphi_i^n\|_\alpha=0$.

(iii)⇒(i) 证明类似于文 [2, 定理 3.2] 中的 (2)⇒(1). 在此证明过程省略.

## 参 考 文 献


[1] Cowen C. C., MacCluer B. D., Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[2] Hosokawa T., Nieminen P. J., Ohno S., Linear combinations of composition operators on the Bloch spaces, *Canad. J. Math.*, 2011, **63**(4): 862–877.

[3] Hosokawa T., Ohno S., Differences of composition operators on the Bloch spaces, *J. Operator Theory*, 2007, **57**(2): 229–242.

[4] Izuchi K., Ohno S., Linear combinations of composition operators on $H^\infty$, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **338**: 820–839.

[5] Kellay K., Lefèvre P., Compact composition operators on weighted Hilbert spaces of analytic functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, **386**: 718–727.

[6] Koo H., Wang M. F., Cancellation properties of composition operators on Bergman spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, **432**: 1174–1182.

[7] Lindström M., Saukko E., Essential norm of weighted composition operators and difference of composition operators between standard weighted Bergman spaces, *Complex Anal. Oper. Theory*, 2015, **9**: 1411–1432.

[8] Lou Z. J., Composition operator on Bloch type spaces, *Analysis*, 2003, **1**(1): 81–95.

[9] Nieminen P., Compact differences of composition operators on Bloch and Lipschitz spaces, *Comput. methods Funct. Theory*, 2007, **7**(2): 325–344.

[10] Schwartz H. J., Composition Operators on $H^p$, Ph.D. Thesis, University of Toledo, Toledo, 1969.

[11] Shapiro J. H., Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.

[12] Shi Y. C., Li S. X., Differences of composition operators on Bloch type spaces, *Complex Anal. Oper. Theory*, 2017, **11**: 227–242.

[13] Shi Y. C., Li S. X., Linear combination of composition operators on $H^\infty$ and the Bloch space, *Arch. Math.*, 2019, **112**: 511–519.

[14] Zhang L., Zhou Z. H., Topological structure of the space of composition operators from $F(p,q,s)$ space to $\mathscr{B}_\mu$ space, *Taiwanese J. Math.*, 2014, **18**(1): 285–304.

[15] Zhu K. H., Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker Inc., New York, 1990.