第64卷第1期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.64, No.1
2021年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)01-0123-16 **文献标识码: A**

加权变指标 Herz–Morrey 空间上的双线性 Hardy 算子的交换子

王盛荣 徐景实

桂林电子科技大学数学与计算科学学院 桂林 541004
E-mail: 67775874@qq.com; jingshixu@126.com

摘 要 本文利用权范数给出 BMO 函数的一个新刻画. 作为此刻画的一个应用, 获得了双线性 Hardy 算子和 BMO 函数生成的交换子在加权变指标 Herz–Morrey 乘积空间上的有界性.

关键词 Hardy 算子; 交换子; Muckenhoupt 权; 变指标; Herz–Morrey 空间
MR(2010) 主题分类 42B25, 42B35
中图分类 O177.2

Commutators of Bilinear Hardy Operators on Weighted Herz–Morrey Spaces with Variable Exponents

Sheng Rong WANG Jing Shi XU

School of Mathematics and Computing Science,
Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, *P. R. China*
E-mail: 67775874@*qq.com*; *jingshixu*@126.*com*

Abstract We give a novel characterization of BMO functions via weighted norm. As an application, we obtain the boundedness of commutators generated by bilinear Hardy operator and BMO functions on products of weighted Herz–Morrey spaces with variable exponents.

Keywords Hardy operator; commutator; Muckenhoupt weight; variable exponent; Herz–Morrey space
MR(2010) Subject Classification 42B25, 42B35
Chinese Library Classification O177.2

1 引言

用 $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有复值局部可积函数的集合. Faris 在文 [20] 中引入了 n 维 Hardy

收稿日期: 2019-12-06; 接受日期: 2020-03-26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11761026); 海南省自然科学基金资助项目 (2018CXTD338)
通讯作者: 徐景实

算子, 其定义为

$$Hf(x):=\frac{1}{\Omega_n|x|^n}\int_{|y|<|x|}f(y)dy,\quad x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\},$$

其中 $f\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, Ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积. 当 $n=1$ 时, 它是文 [23] 中的经典 Hardy 算子. 在文 [4] 中, Christ 和 Grafakos 证明了 Hardy 算子在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

设 $m\in\mathbb{N}$, $f_1,\dots,f_m\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, m 重线性 Hardy 算子定义为

$$H(f_1,\dots,f_m):=\frac{1}{\Omega_{mn}|x|^{mn}}\int_{|(y_1,\dots,y_m)|<|x|}\prod_{i=1}^m f_i(y_i)dy_1\cdots dy_m,\quad x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

设 $b\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, 如果 $\|b\|_*:=\sup_B\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b_B|dx<\infty$, 这里的上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中的所有球体 B, $b_B=\frac{1}{|B|}\int_B b(x)dx$, 则称 $b\in{\rm BMO}(\mathbb{R}^n)$ (有界平均振荡函数的集合).

m 重线性 Hardy 算子的交换子定义为

$$H_{\vec{b}}(f_1,\dots,f_m)(x):=\sum_{i=1}^m H^i_{b_i}(f_1,\dots,f_m)(x),$$

其中 $H^i_{b_i}(f_1,\dots,f_m)(x):=b_i(x)H(f_1,\dots,f_m)(x)-H(f_1,\dots,f_{i-1},f_ib_i,f_{i+1},\dots,f_m)(x)$. 当 $m=1$ 时, 算子 $H_b(f)(x)=b(x)Hf(x)-H(bf)(x)$. 虽然, 对于每个 $m\geq 2$, 我们的结果均成立, 但为了简洁起见, 我们仅考虑 $m=2$. 而 2 重线性算子将被称为双线性算子.

1991 年, 自 Kováčik 和 Rákosník [32] 的文章发表, 变指标函数空间理论得到了迅速发展 (见文 [6, 7, 12]). 近年来, 人们引入了许多变指标的函数空间, 如变指标 Besov 空间和变指标 Trieble–Lizorkin 空间 [3, 14, 16–19, 48–53], 变指标 Hardy 空间 [37], 变指标 Bessel 位势空间 [22], 变指标 Herz 空间 [1, 26, 31], 变指标 Morrey 空间 [2] 和变指标 Herz–Morrey 空间 [27–30].

2003 年, Samko 和 Stefan [39] 证明了 Hardy 算子在变指标 Lebesgue 空间上的有界性. 2005 年, Harjulehto, Hasto 和 Koskenoja [24] 得到了在变指标 Sobolev 空间上的 Hardy 型不等式. 2007 年, Diening 和 Samko 在文 [15] 中证明了变指标型的 Hardy 算子在变指标 Lebesgue 空间上的有界性. 2004 年, Wu 和 Liu 在文 [44] 中给出了 Hardy 算子高阶交换子的 λ- 中心 BMO 估计. 2010 年, Izuki 在文 [26] 中证明了由奇异积分和 BMO 函数生成的交换子在变指标 Herz 空间 $\dot{K}^{\alpha,q}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 2011 年, Wu 在文 [42] 中给出了由多线性分数次 Hardy 算子和 BMO 函数生成的交换子在变指标 Herz–Morrey 空间 $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 2012 年, Almeida 和 Drihem 在文 [1] 中讨论了次线性算子在变指标 Herz 空间 $K^{\alpha(\cdot),p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\dot{K}^{\alpha(\cdot),p}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. Wu 在文 [43] 中考虑了分数次 Hardy 型算子在变指标 Herz–Morrey 空间 $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 2013 年, 武江龙和张璞在文 [45] 中得到了多线性 Hardy 型算子在变指标 Herz–Morrey 乘积空间 $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 2014 年, 武江龙和张璞在文 [46] 中考虑了由分数次 Hardy 算子和 BMO 函数生成的交换子在变指标 Herz–Morrey 空间 $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 2015 年, 束立生, 王敏和瞿萌在文 [41] 中获得了由 Hardy 型算子和 BMO 函数生成的交换子在变指标 Herz 空间 $\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q}$ 上的有界性. 2016 年, Wu 和 Zhao 在文 [47] 中证明了变指标分数次 Hardy 型算子在变指标 Herz–Morrey 空间 $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),\lambda}_{p,q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. 上的有界性.

Cruz-Uribe 和 Wang 在文 [9] 中利用外推定理, 得到了分数次积分在加权变指标 Lebesgue 空间上的有界性. Cruz-Uribe, Fiorenza 和 Neugebauer 在文 [8] 中证明了在加权变指标 Lebesgue

空间上, Muckenhoupt 条件与 Hardy–Littlewood 极大算子的有界性是等价的. Izuki 和 Noi 在文 [29] 中考虑了分数次积分在加权变指标 Herz 空间上的有界性.

受上述工作的启发, 本文将考虑由双线性 Hardy 算子和 BMO 函数生成的交换子在加权变指标 Herz–Morrey 空间上的有界性. 本文第 2 节是预备知识并陈述主要结果. 第 3 节给出 BMO 函数的一个新刻画. 第 4 节给出主要结果的证明.

2 预备知识与主要结果

首先回顾一些定义和符号, 然后陈述主要结果.

定义 2.1 设 $p(\cdot):\mathbb{R}^n\to[1,\infty)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数,

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n):=\left\{f\ \text{可测: 存在某个}\ \lambda>0,\ \text{使得}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}dx<\infty\right\},$$

则称 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 为变指标 Lebesgue 空间, $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 的范数为

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}}:=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}dx\le 1\right\}.$$

在此范数下, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Banach 空间.

定义 2.2 设 $p(\cdot):\mathbb{R}^n\to[1,\infty)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数, 空间 $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 由满足以下条件的所有函数 f 组成: 对于任意可测紧子集 $S\subset\mathbb{R}^n$ 存在某个常数 $\lambda>0$, 使得 $\int_S\big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\big)^{p(x)}dx<\infty$.

设 $p(\cdot):\mathbb{R}^n\to(0,\infty)$, 我们记 $p_-:=\operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^n}p(x)$, $p_+:=\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}p(x)$. $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ 表示在 $\mathbb{R}^n$ 上非负可测函数 $p(\cdot)$ 满足 $p_->1$, $p_+<\infty$ 的全体. $\mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n)$ 表示在 $\mathbb{R}^n$ 上非负可测函数 $p(\cdot)$ 满足 $p_->1$, $p_+<\infty$ 的全体. 我们记 $p'(\cdot)$ 为 $p(\cdot)$ 共轭指标函数, 即 $1/p(\cdot)+1/p'(\cdot)=1$.

给定 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则 Hardy–Littlewood 极大算子 M 定义为

$$Mf(x):=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|dy,\quad\forall x\in\mathbb{R}^n,$$

这里的上确界取遍所有包含 x 的球体 B, $|B|$ 表示 B 的 Lebesgue 测度. 一般来说, Hardy–Littlewood 极大算子在变 Lebesgue 空间上不是有界的. 但如果 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ 且满足下面的全局 log-Hölder 连续, 则 M 在 $L^{p(\cdot)}$ 上是有界的 [7]. 更多详情见文 [10, 12, 13, 38].

定义 2.3 令 $\alpha(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数:

(i) 如果存在常数 C_1, 使得 $|\alpha(x)-\alpha(y)|\le\frac{C_1}{\log(\mathrm{e}+1/|x-y|)}$, $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|x-y|<\frac{1}{2}$, 则称函数 $\alpha(\cdot)$ 是局部 log-Hölder 连续.

(ii) 如果存在常数 C_2, 使得 $|\alpha(x)-\alpha(0)|\le\frac{C_2}{\log(\mathrm{e}+1/|x|)}$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, 则称函数 $\alpha(\cdot)$ 在原点处是 log-Hölder 连续, 用 $\mathscr{P}^{\log}_0(\mathbb{R}^n)$ 表示原点处所有 log-Hölder 连续函数的集合.

(iii) 如果存在 $\alpha_\infty\in\mathbb{R}$ 和常数 C_3, 使得 $|\alpha(x)-\alpha_\infty|\le\frac{C_3}{\log(\mathrm{e}+|x|)}$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, 则称函数 $\alpha(\cdot)$ 在无穷大处是 log-Hölder 连续, 用 $\mathscr{P}^{\log}_\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示无穷大处所有 log-Hölder 连续函数的集合.

(iv) 如果 $\alpha(\cdot)$ 既是局部 log-Hölder 连续又是在无穷大处 log-Hölder 连续, 则称函数 $\alpha(\cdot)$ 是全局 log-Hölder 连续. 用 $\mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 表示所有全局 log-Hölder 连续函数的集合.

设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ 和 w 都是在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 那么加权变指标 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(w)$ 是所有复值可测函数 f, 使得 $fw\in L^{p(\cdot)}$ 的集合. 空间 $L^{p(\cdot)}(w)$ 是 Banach 空间, 其范数定义为 $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(w)}:=\|fw\|_{L^{p(\cdot)}}$.

Muckenhoupt 在文 [36] 中首次提出了常指标 $p\in(1,\infty)$ 的 Muckenhoupt 类 A_p. 在文 [8] 中, Cruz-Uribe, Fiorenza 和 Neugebauer 引入了变指标 Muckenhoupt $A_{p(\cdot)}$.

定义 2.4 设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, w 为 $\mathbb{R}^n$ 上的正可测函数. 如果存在一个正常数 C, 使得对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意球 B, 都有

$$\frac{1}{|B|}\|w\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}}\|w^{-1}\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}}\le C,$$

则称 w 属于 $A_{p(\cdot)}$.

注 2.5 容易看出, 如果 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ 且 $w\in A_{p(\cdot)}$, 那么 $w^{-1}\in A_{p'(\cdot)}$.

引理 2.6 (文 [8, 定理 1.5]) 如果 $p(\cdot)\in\mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, 且 $w\in A_{p(\cdot)}$, 则存在一个常数 $C>0$, 使得对于每个 $f\in L^{p(\cdot)}(w)$, 有 $\|(Mf)w\|_{L^{p(\cdot)}}\le C\|fw\|_{L^{p(\cdot)}}$.

为了陈述加权变指标 Herz 空间和加权变指标 Herz–Morrey 空间的定义, 我们使用下面符号. 对于每一个 $k\in\mathbb{Z}$, 记 $B_k:=\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|\le 2^k\}$, $D_k:=B_k\setminus B_{k-1}$, $\chi_k:=\chi_{D_k}$, $\widetilde{\chi}_m=\chi_m$, $m\ge 1$, $\widetilde{\chi}_0=\chi_{B_0}$. 还需要混合序列空间 $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))$ 的概念. 设 $p(\cdot)$, $q(\cdot)\in\mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n)$, 且 w 为非负可测函数. 给定一列函数 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, 混合序列空间 $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))$ 通过模定义为

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}((f_j)_j):=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\inf\left\{\lambda_j:\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f_j(x)w(x)|}{\lambda_j^{\frac{1}{q(x)}}}\right)^{p(x)}dx\le 1\right\}.$$

这里约定 $\lambda^{1/\infty}=1$. 如果 $q^+<\infty$ 或者 $q(\cdot)\le p(\cdot)$, 上面公式可以写成

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}(\{f_j\}_j)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\,|f_jw|^{q(\cdot)}\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}}.$$

范数为

$$\|\{f_j\}_j\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}:=\inf\{\mu>0:\ \rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}(\{f_j/\mu\}_j)\le 1\}.$$

设 $p(\cdot):\mathbb{R}^n\to[1,\infty)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数, w 是在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 若对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意紧子集 S, 都有 $f_{\chi_S}\in L^{p(\cdot)}(w)$, 则称 $f\in L^{p(\cdot)}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n,w)$. 若对于 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 中任意紧子集 S, 都有 $f_{\chi_S}\in L^{p(\cdot)}(w)$, 则称 $f\in L^{p(\cdot)}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},w)$.

定义 2.7 设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, $q(\cdot)\in\mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n)$. 令 $\alpha(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界实值可测函数. 齐次加权 Herz 空间 $\dot{K}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda}(w)$ 和非齐次加权Herz空间 $K^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda}(w)$ 分别定义为

$$\dot{K}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot)}(w):=\big\{f\in L^{p(\cdot)}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},w):\|f\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot)}(w)}<\infty\big\}$$

和

$$K^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot)}(w):=\big\{f\in L^{p(\cdot)}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n,w):\|f\|_{K^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot)}(w)}<\infty\big\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot)}(w)}:=\|(2^{j\alpha(\cdot)}f\chi_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}$$

和

$$\|f\|_{K^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot)}(w)}:=\|(2^{j\alpha(\cdot)}f\widetilde{\chi}_j)_{j\ge 0}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}.$$

注 2.8 如果 $w\equiv 1$, $q(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$ 和 $p(\cdot)$ 都是常数, 那么 $\dot{K}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)=\dot{K}^{\alpha,q}_{p}(\mathbb{R}^n)$ 是经典的 Herz 空间 [33, 34].

对于任意的实数 A 和 B, 如果存在一个常数 $C > 0$, 使得 $A \le CB$, 记为 $A \lesssim B$. 如果 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$, 记为 $A \approx B$.

下面的引理是文 [31, 定理 3] 中的一个推论.

引理 2.9　设 $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n)$, w 为权函数. 如果 $\alpha(\cdot)$ 和 $q(\cdot)$ 都是在无穷远处 log-Hölder 连续, 那么 $K_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w) = K_{p(\cdot)}^{\alpha_\infty,q_\infty}(w)$. 此外, 如果 $\alpha(\cdot)$ 和 $q(\cdot)$ 都是在原点处 log-Hölder 连续, 那么

$$\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w)} \approx \left(\sum_{k\le 0} \|2^{k\alpha(0)} f\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\right)^{\frac{1}{q(0)}} + \left(\sum_{k>0} \|2^{k\alpha_\infty} f\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\right)^{\frac{1}{q_\infty}}.$$

定义 2.10　设 $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in \mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in [0,\infty)$. 令 $\alpha(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界实值可测函数. 齐次加权 Herz–Morrey 空间 $M\dot{K}_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w)$ 和非齐次加权 Herz–Morrey 空间 $MK_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w)$ 分别定义为

$$M\dot{K}_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w) := \big\{f \in L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, w) : \|f\|_{M\dot{K}_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w)} < \infty\big\}$$

和

$$MK_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w) := \big\{f \in L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, w) : \|f\|_{MK_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w)} < \infty\big\},$$

其中

$$\|f\|_{M\dot{K}_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w)} := \sup_{L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \|(2^{\alpha(\cdot)k} f\chi_k)_{k\le L}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}$$

和

$$\|f\|_{MK_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w)} := \sup_{L\in\mathbb{N}_0} 2^{-L\lambda} \|(2^{\alpha(\cdot)k} f\tilde{\chi}_k)_{k=0}^{L}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}.$$

注 2.11　如果 $w \equiv 1$, $q(\cdot)$ 和 $\alpha(\cdot)$ 都是常数, 那么 $M\dot{K}_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = M\dot{K}_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ (见文 [28]). 如果 $w \equiv 1$, $q(\cdot)$ 是常数且 $\lambda = 0$, 那么 $M\dot{K}_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q}(\mathbb{R}^n)$. 如果 $w \equiv 1$, $q(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$ 和 $p(\cdot)$ 都是常数以及 $\lambda = 0$, 那么 $M\dot{K}_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ 是经典的 Herz 空间 [34].

命题 2.12　令 $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n)$, w 为权函数, $\lambda \in [0,\infty)$, 且 $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(i) 如果 $\alpha(\cdot)$, $q(\cdot) \in \mathscr{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, 那么对于任意 $f \in L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus 0, w)$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{M\dot{K}_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}} \approx \max\Big\{ &\sup_{L\leqslant 0,\, L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \|(2^{k\alpha(0)} f\chi_k)_{k\le L}\|_{\ell^{q(0)}(L^{p(\cdot)})},\\ &\sup_{L>0,\, L\in\mathbb{Z}} [2^{-L\lambda} \|(2^{k\alpha(0)} f\chi_k)_{k<0}\|_{\ell^{q(0)}(L^{p(\cdot)})}\\ &+ 2^{-L\lambda} \|(2^{k\alpha_\infty} f\chi_k)_{k=0}^{L}\|_{\ell^{q_\infty}(L^{p(\cdot)})}]\Big\};\end{aligned}$$

(ii) 如果 $\alpha(\cdot)$, $q(\cdot) \in \mathscr{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, 那么 $MK_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w) = MK_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha_\infty,q_\infty}(w)$.

证明　显然

$$\begin{aligned}\|f\|_{M\dot{K}_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w)} = \max\Big\{ &\sup_{L\le 0,\, L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \|(2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k)_{k\le L}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))},\\ &\sup_{L>0,\, L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \|(2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k)_{k\le L}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}\Big\}.\end{aligned}$$

当 $L\le 0$ 时, 由引理 2.9, 有

$$\|(2^{k\alpha(\cdot)}f\chi_k)_{k\le L}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}\approx\|(2^{k\alpha(0)}f\chi_k)_{k\le L}\|_{\ell^{q_0}(L^{p(\cdot)}(w))}.$$

当 $L>0$ 时, 再次使用引理 2.9, 得到

$$\|(2^{k\alpha(\cdot)}f\chi_k)_{k<L}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}\approx\|(2^{k\alpha(0)}f\chi_k)_{k<0}\|_{\ell^{q_0}(L^{p(\cdot)}(w))}+\|(2^{k\alpha_\infty}f\chi_k)_{k=0}^{L}\|_{\ell^{q_\infty}(L^{p(\cdot)}(w))}.$$

因此, 证明了 (i).

(ii) 的证明是类似的. 证毕.

下面的引理 2.13 和 2.14 已由 Izuki 和 Noi 在文 [29, 30] 中证明.

引理 2.13 如果 $p(\cdot)\in\mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, $w\in A_{p(\cdot)}$, 则存在常数 $C>0$, 使得对于 $\mathbb{R}^n$ 中的所有球 B 和所有可测子集 $S\subset B$, 有

$$\frac{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}}{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(w)}}\le C\frac{|B|}{|S|}.$$

引理 2.14 如果 $p(\cdot)\in\mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, $w\in A_{p(\cdot)}$, 则存在常数 $C>0$, δ_1, $\delta_2\in(0,1)$, 使得对于 $\mathbb{R}^n$ 中的所有球 B 和所有可测子集 $S\subset B$, 有

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(w)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}}\le C\bigg(\frac{|S|}{|B|}\bigg)^{\delta_1},\quad\frac{\|\chi_S\|_{L^{p'(\cdot)}(w^{-1})}}{\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(w^{-1})}}\le C\bigg(\frac{|S|}{|B|}\bigg)^{\delta_2}.$$

主要结果如下.

定理 2.15 设 H 为双线性 Hardy 算子, $p_1(\cdot)$, $p_2(\cdot)\in\mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$. 设 $w_i\in A_{p_i(\cdot)}$ 且 $w=w_1w_2$, $i=1,2$. 令 $\alpha(\cdot)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha(0)=\alpha_1(0)+\alpha_2(0)$, $\alpha_\infty=\alpha_{1\infty}+\alpha_{2\infty}$, $q(\cdot)\in\mathscr{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $q(0)=1/q_1(0)+1/q_2(0)$, $q_\infty=1/q_{1\infty}+1/q_{2\infty}$, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$, $0\le\lambda_1,\lambda_2<\infty$, δ_{i1}, $\delta_{i2}\in(0,1)$ 为在引理 2.14 相应于指标函数 $p_i(\cdot)$, 权函数 w_i, $i=1,2$ 的常数. 若 $\alpha_i(0),\alpha_{i\infty}<n\delta_{i2}$, $i=1,\ 2$, $1/p(\cdot)=1/p_1(\cdot)+1/p_2(\cdot)$, 那么 $H_{\vec{b}}^1$ 是从 $M\dot{K}_{p_1(\cdot),\lambda_1}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(w_1)\times M\dot{K}_{p_2(\cdot),\lambda_2}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(w_2)$ 到 $M\dot{K}_{p(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w)$ 内有界的, 其中 $\vec{b}=(b_1,b_2),b_1,b_2\in$ BMO.

3 BMO 函数的一个新刻画

本节将通过权范数对 BMO 函数进行新的刻画. 文 [21, 推论 3.1.9] 表示, $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ 中的函数 f 属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 当且仅当对于某些 $t\ge 1$,

$$\sup_{\text{球 }B\subset\mathbb{R}^n}\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-f_B|^t dx<\infty. \tag{3.1}$$

再者, 如果式 (3.1) 对于某些 $t\ge1$ 成立, 那么对于式 (3.1) 所有 $t\ge1$ 同样成立, 并且

$$\sup_{\text{球 }B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-f_B|^t dx\approx\|f\|_*^t.$$

下面, 通过权范数对式 (3.1) 中的数进行修改.

定理 3.1 设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, $w\in A_{p(\cdot)}$, 且 $t\ge1$. 那么在 $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ 中的函数 b 属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\sup_{\text{球 }B\subset\mathbb{R}^n}\frac{1}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}}\|(b-b_B)^t\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}<\infty.$$

若如此, 存在正常数 C_1 和 C_2, 使得

$$C_1\|b\|_*^t \le \sup_{\text{球 } B\subset\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}}\|(b-b_B)^t\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \le C_2\|b\|_*^t. \tag{3.2}$$

为了证明定理 3.1, 需要一些预备知识. 首先是广义 Hölder 不等式.

引理 3.2 (见文 [32, 定理 2.1])　设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$. 那么对于所有的 $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 和所有的 $g\in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|dx \le r_p\|f\|_{L^{p(\cdot)}}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}},$$

其中 $r_p = 1+1/p_+ - 1/p_-$.

为了进一步准备, 需要回顾一些概念. 用 $\mathscr{X}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有方体的集合. 用 $\mathscr{Y}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有互不相交方体族的集合.

定义 3.3　设 φ 为非负函数. 我们说 φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 N- 函数, 如果它满足以下条件:

(a) 存在 $\mathbb{R}^n\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 上的非负函数 a, 其中 $a(w,0)=0$, 对于 $t>0$, $a(x,t)>0$, 使得对于每个 $x\in\mathbb{R}^n$, $a(x,\cdot)$ 是右连续, 非递减函数. 再者, 对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$, $\varphi(x,t)=\int_0^t a(x,u)du$.

(b) 对于所有 $t>0$, $\varphi(x,t)$ 对变量 x 是 Lebesgue 可测的.

下面的注来自 Diening 的文 [11, 例 2.3 和 2.4].

注 3.4　由于 $\varphi(x,t):=t^{p(x)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的正常的 N- 函数. 设 w 为 $\mathbb{R}^n$ 上的权函数, 定义 $\varphi_w(x,t):=\varphi(x,w(x)t)$, 那么 φ_w 是在 $\mathbb{R}^n$ 上的正常的 N- 函数, 且 $L^{\varphi_w}(\mathbb{R}^n)=L^{p(\cdot)}(w)$, $\|f\|_{L^{\varphi_w}}=\|f\|_{L^{p(\cdot)}(w)}=\|fw\|_{L^{p(\cdot)}}$.

对于 $f\in L^1_{\rm loc}$ 和 $Q\in\mathscr{X}^n$, 定义 $M_Qf:=\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|dx$.

定义 3.5　设 φ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的正常的 N- 函数. 对于每个 $\mathscr{Q}\in\mathscr{Y}^n$ 和 $f\in L^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$, 令 $T_{\mathscr{Q}}:=\sum_{Q\in\mathscr{Q}}\chi_Q M_Qf$. 如果存在一个正常数 C, 使得对于所有 $\mathscr{Q}\in\mathscr{Y}^n$ 以及所有 $f\in L^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$, 有 $\|T_{\mathscr{Q}}f\|_{\varphi}\le C\|f\|_{\varphi}$, 则称 φ 是 $\mathscr{A}$ 类.

引理 3.6 (文 [11, 引理 3.2])　如果 φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的正常的 N- 函数, 使得 M 在 $L^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 那么 φ 是 $\mathscr{A}$ 类.

定义 3.7　如果对于任意 $\varepsilon>0$ 且存在 $\delta>0$, 使得以下成立: 如果 $N\subset\mathbb{R}^n$ 是可测的且 $\mathscr{Q}\in\mathscr{Y}^n$, 使得 $|Q\cap N|\ge\varepsilon|Q|$ 对任意 $Q\in\mathscr{Q}$ 成立, 那么对于任意的序列 $\{t_Q\}_{Q\in\mathscr{Q}}$, $t_Q\in[0,\infty)$, 有

$$\delta\Big\|\sum_{Q\in\mathscr{Q}}t_Q\chi_Q\Big\|_{L^{\varphi}} \le \Big\|\sum_{Q\in\mathscr{Q}}t_Q\chi_{Q\cap N}\Big\|_{L^{\varphi}},$$

则称正常的 N- 函数 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是 $\mathscr{A}_\infty$ 类.

引理 3.8 (文 [11, 引理 5.2])　如果 φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的正常的 N- 函数且是 $\mathscr{A}$ 类, 则 φ 是 $\mathscr{A}_\infty$ 类.

引理 3.9 (文 [11, 引理 5.5])　如果 φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的正常的 N- 函数且是 $\mathscr{A}_\infty$ 类, 那么存在常数 A, 对于所有 $\mathscr{Q}\in\mathscr{Y}^n$, 所有 $\{t_Q\}_{Q\in\mathscr{Q}}$, $t_Q\ge0$ 以及所有 $f\in L^1_{\rm loc}$ 且 $M_Qf\ne0$, $\mathscr{Q}\in Q$, 有

$$\Big\|\sum_{\mathscr{Q}\in Q}t_Q\Big|\frac{f}{M_Qf}\Big|\chi_Q\Big\|_{L^{\varphi}} \le A\Big\|\sum_{\mathscr{Q}\in Q}t_Q\chi_Q\Big\|_{L^{\varphi}}.$$

由注 3.4, 引理 2.6, 3.6, 3.8 和 3.9, 得到下面引理.

引理 3.10 如果 $p(\cdot)\in\mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ 且 $w\in A_{p(\cdot)}$, 那么存在常数 $C>0$ 和 $0<\delta<1$, 使得对于所有 $\mathscr{Q}\in\mathscr{Y}^n$ 和所有 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 且 $f_Q\neq 0$ $(Q\in\mathscr{Q})$, 有 $\|f^\delta\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\le C|f_Q|^\delta\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(w)}$.

定理 3.1 的证明 对于任意球 B, 由引理 3.2 和定义 2.4, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b_B|^t dx&\le\frac{1}{|B|}\|(b-b_B)^t\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(w^{-1})}\\&\le C\frac{1}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}}\|(b-b_B)^t\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

由此, 定理 3.1 中的 (3.2) 的左边可由 (3.1) 和 (3.3) 直接得到.

对于定理 3.1 中的 (3.2) 的右边, 我们将使用与文 [26] 中非加权情况一样的方法. 取方体 Q_B, 使得 $B\subset Q_B\subset\sqrt{n}B$. 由引理 3.10 可知, 对于所有 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$, 存在一个不依赖于 B 的常数 $0<\delta<1$, 使得

$$\||f|^\delta\chi_{Q_B}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\le C(|f|_{Q_B})^\delta\|\chi_{Q_B}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}.\tag{3.4}$$

如果令 $f(x)=|b(x)-b_B|^{t/\delta}\chi_B$, 那么有

$$(|f|_{Q_B})^\delta=\left(\frac{1}{|Q_B|}\int_B|b(x)-b_B|^{t/\delta}dx\right)^\delta\le C\|b\|_*^t.\tag{3.5}$$

由引理 2.13 得

$$\|\chi_{Q_B}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\le\frac{\|\chi_{\sqrt{n}B}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\le C\frac{|\sqrt{n}B|}{|B|}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}.\tag{3.6}$$

因此, 由 (3.4), (3.5) 和 (3.6), 得

$$\|(b-b_B)^t\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\le C\|b\|_*^t\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}.\tag{3.7}$$

由 (3.3) 和 (3.7) 得 (3.2). 证毕.

推论 3.11 设 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $p(\cdot)\in\mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, $w\in A_{p(\cdot)}$, $t\in[1,\infty)$, 那么存在常数 $C>0$, 使得 $k>i$, $k,i\in\mathbb{N}$,

$$\||b-b_{B_i}|^t\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\le C(k-i)^t\|b\|_*^t\|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}.\tag{3.8}$$

证明 对于所有 $k,i\in\mathbb{N}$ 且 $k>i$, 有

$$\begin{aligned}\||b-b_{B_i}|^t\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}&\le C\|(|b-b_{B_k}|^t+|b_{B_k}-b_{B_i}|^t)\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\\&\le C(\|(b-b_{B_k})^t\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}+|b_{B_k}-b_{B_i}|^t\|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}).\end{aligned}\tag{3.9}$$

由式 (3.2) 得到

$$\|(b-b_{B_k})^t\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\le C\|b\|_*^t\|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}.\tag{3.10}$$

由 BMO 的定义, 容易看出

$$\begin{aligned}|b_{B_k}-b_{B_i}|&\le\sum_{m=i}^{k-1}|b_{B_{m+1}}-b_{B_m}|=\sum_{m=i}^{k-1}\left|\frac{1}{|B_m|}\int_{B_m}|b_{B_{m+1}}-b(x)|dx\right|\\&=\sum_{m=i}^{k-1}\frac{1}{|B_{m+1}|}\int_{B_{m+1}}|b_{B_{m+1}}-b(x)|dx\le\sum_{m=i}^{k-1}\|b\|_*=C(k-i)\|b\|_*.\end{aligned}\tag{3.11}$$

由式 (3.9), (3.10) 和 (3.11), 得 (3.8). 证毕.

4 定理 2.15 的证明

为了证明定理 2.15, 需要下面的引理.

引理 4.1 (文 [25, 定理 2.3]) 设 $p, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n)$, 使得 $1/p(x) = 1/p_1(x) + p_2(x)$. 那么对于每个 $f \in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $g \in L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 存在一个仅依赖于 p, p_1 的常数 $C > 0$, 使得

$$\|fg\|_{L^{p(\cdot)}} \le C_{p,p_1}\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}}\|g\|_{L^{p_2(\cdot)}}.$$

如果 $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, w 为权函数且 $w = w_1 \times w_2$, 那么 $\|fg\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \le C_{p,p_1}\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\|g\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}$.

引理 4.2 (文 [40, 命题 1.2]) 设 $0 < p \le \infty$, $\delta > 0$. 那么对于非负序列 $\{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, 有

$$\bigg(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\bigg(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{-|k-j|\delta}a_k\bigg)^p\bigg)^{1/p} \le C\bigg(\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j^p\bigg)^{1/p}, \tag{4.1}$$

当 $p = \infty$ 时, 式 (14) 为

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}\bigg(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{-|k-j|\delta}a_k\bigg) \le C\sup_{j\in\mathbb{Z}}a_j.$$

定理 2.15 的证明 设 $f_1 \in M\dot{K}_{p_1(\cdot),\lambda_1}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(w_1)$, $f_2 \in M\dot{K}_{p_2(\cdot),\lambda_2}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(w_2)$. 令 $(b_i)_{B_k}$ 表示 b_i 在球 B_k 上的平均值, $i = 1, 2$, 且 $k \in \mathbb{Z}$. 如果 $x \in D_k$, 那么

$$\begin{aligned}|H_{b_1}^1(f_1,f_2)(x)| &\lesssim 2^{-2kn}\int_{|(y_1,y_2)|<|x|}|f_1(y_1)f_2(y_2)|\,|b_1(x)-b_1(y_1)|dy_1dy_2\\&\lesssim 2^{-2kn}\int_{|(y_1,y_2)|<|x|}|f_1(y_1)f_2(y_2)|\,|b_1(x)-(b_1)_{B_k}|dy_1dy_2\\&\quad+2^{-2kn}\int_{|(y_1,y_2)|<|x|}|f_1(y_1)f_2(y_2)|\,|b_1(y_1)-(b_1)_{B_k}|dy_1dy_2\\&=: \mathrm{I}+\mathrm{II}.\end{aligned}$$

首先估计 I,

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &\lesssim 2^{-2kn}\int_{B_k}\int_{B_k}|f_1(y_1)f_2(y_2)|\,|b_1(x)-(b_1)_{B_k}|dy_1dy_2\\&\lesssim 2^{-2kn}|b_1(x)-(b_1)_{B_k}|\int_{B_k}\int_{B_k}|f_1(y_1)f_2(y_2)|dy_1dy_2\\&= 2^{-2kn}|b_1(x)-(b_1)_{B_k}|\sum_{i=-\infty}^{k}\int_{D_i}|f_1(y_1)|dy_1\sum_{j=-\infty}^{k}\int_{D_j}|f_2(y_2)|dy_2.\end{aligned}$$

由于 $w = w_1 \cdot w_2$, 由引理 3.2 和定理 3.1, 有

$$\begin{aligned}\|\mathrm{I}\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)} &\lesssim 2^{-2kn}\|(b_1-(b_1)_{B_k})\cdot\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\sum_{i=-\infty}^{k}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\|\chi_i\|_{L^{p_1'(\cdot)}(w_1^{-1})}\\&\quad\times\sum_{j=-\infty}^{k}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\|\chi_j\|_{L^{p_2'(\cdot)}(w_2^{-1})}\\&\lesssim 2^{-2kn}\|b_1\|_*\|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\sum_{i=-\infty}^{k}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\|\chi_{B_i}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(w_1^{-1})}\\&\quad\times\sum_{j=-\infty}^{k}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{p_2'(\cdot)}(w_2^{-1})}.\end{aligned}$$

由于 $w=w_1w_2$ 和 $1/p(\cdot)=1/p_1(\cdot)+1/p_2(\cdot)$, 由 Hölder 不等式, 引理 2.14 和定义 2.4, 有

$$\begin{aligned}
&2^{-2kn}\|\chi_{B_i}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(w_1^{-1})}\|\chi_{B_j}\|_{L^{p_2'(\cdot)}(w_2^{-1})}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\\
&\quad\lesssim 2^{-2kn}\|\chi_{B_i}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(w_1^{-1})}\|\chi_{B_j}\|_{L^{p_2'(\cdot)}(w_2^{-1})}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\\
&\quad\lesssim \frac{\|\chi_{B_i}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(w_1^{-1})}}{\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(w_1^{-1})}}\times\frac{\|\chi_{B_j}\|_{L^{p_2'(\cdot)}(w_2^{-1})}}{\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_2'(\cdot)}(w_2^{-1})}}\\
&\quad\lesssim 2^{-(k-i)n\delta_{12}}\times 2^{-(k-j)n\delta_{22}}.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

因此得

$$\|\mathrm{I}\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\lesssim\|b_1\|_*\sum_{i=-\infty}^{k}2^{-(k-i)n\delta_{12}}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\sum_{j=-\infty}^{k}2^{-(k-j)n\delta_{22}}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}.$$

接下来估计 II,

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}&\lesssim 2^{-2kn}\sum_{i=-\infty}^{k}\int_{D_i}|f_1(y_1)|\,|b_1(y_1)-(b_1)_{B_i}|dy_1\sum_{j=-\infty}^{k}\int_{D_j}|f_2(y_2)|dy_2\\
&\quad+2^{-2kn}\sum_{i=-\infty}^{k}\int_{D_i}|f_1(y_1)|\,|(b_1)_{B_k}-(b_1)_{B_i}|dy_1\sum_{j=-\infty}^{k}\int_{D_j}|f_2(y_2)|dy_2\\
&=:\mathrm{II}_1+\mathrm{II}_2.
\end{aligned}$$

由引理 3.2 和定理 3.1, 有

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{II}_1\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}&\lesssim 2^{-2kn}\sum_{i=-\infty}^{k}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\|(b_1-(b_1)_{B_i})\chi_i\|_{L^{p_1'(\cdot)}(w_1^{-1})}\\
&\qquad\times\sum_{j=-\infty}^{k}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\|\chi_j\|_{L^{p_2'(\cdot)}(w_2^{-1})}\|\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\\
&\lesssim 2^{-2kn}\|b_1\|_*\sum_{i=-\infty}^{k}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\|\chi_{B_i}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(w_1^{-1})}\\
&\qquad\times\sum_{j=-\infty}^{k}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{p_2'(\cdot)}(w_2^{-1})}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}.
\end{aligned}\tag{4.3}$$

由引理 3.2 和式 (3.11), 有

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{II}_2\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}&\lesssim 2^{-2kn}\sum_{i=-\infty}^{k}|(b_1)_{B_k}-(b_1)_{B_i}|\,\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\|\chi_i\|_{L^{p_1'}(\cdot)(w_1^{-1})}\\
&\qquad\times\sum_{j=-\infty}^{k}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\|\chi_j\|_{L^{p_2'(\cdot)}(w_2^{-1})}\|\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\\
&\lesssim 2^{-2kn}\|b_1\|_*\sum_{i=-\infty}^{k}(k-i)\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\|\chi_{B_i}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(w_1^{-1})}\\
&\qquad\times\sum_{j=-\infty}^{k}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{p_2'(\cdot)}(w_2^{-1})}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(w)}.
\end{aligned}\tag{4.4}$$

由式 (4.2) 和 (4.3), 得

$$\|\mathrm{II}_1\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \lesssim \|b_1\|_* \sum_{i=-\infty}^{k} 2^{-(k-i)n\delta_{12}}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)} \sum_{j=-\infty}^{k} 2^{-(k-j)n\delta_{22}}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}.$$

由式 (4.2) 和 (4.4), 得

$$\begin{aligned}\|\mathrm{II}_2\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}} \lesssim \|b_1\|_* &\sum_{i=-\infty}^{k} (k-i)2^{-(k-i)n\delta_{12}}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\\ &\times \sum_{j=-\infty}^{k} 2^{-(k-j)n\delta_{22}}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}.\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\|H^1_{b_1}(f_1,f_2)\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \lesssim \|b_1\|_* &\sum_{i=-\infty}^{k} (k-i)2^{-(k-i)n\delta_{12}}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\\ &\times \sum_{j=-\infty}^{k} 2^{-(k-j)n\delta_{22}}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}. \qquad (4.5)\end{aligned}$$

由命题 2.12 有

$$\begin{aligned}\|H^1_{b_1}(f_1,f_2)\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda}(w)} \approx \max\Big\{ &\sup_{L\le 0,\, L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}\|(2^{k\alpha(0)}H^1_{b_1}(f_1,f_2)\chi_k)_{k\le L}\|_{l^{q_0}(L^{p(\cdot)}(w))},\\ &\sup_{L>0,\, L\in\mathbb{Z}} \big[2^{-L\lambda}\|(2^{k\alpha(0)}H^1_{b_1}(f_1,f_2)\chi_k)_{k<0}\|_{l^{q_0}(L^{p(\cdot)}(w))}\\ &+2^{-L\lambda}\|(2^{k\alpha_\infty}H^1_{b_1}(f_1,f_2)\chi_k)_{k=0}^{L}\|_{l^{q_\infty}(L^{p(\cdot)}(w))}\big]\Big\}\\ =:\ &\max\{E,F\},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}E &:= \sup_{L\le 0,\, L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}\|(2^{k\alpha(0)}H^1_{b_1}(f_1,f_2)\chi_k)_{k\le L}\|_{l^{q_0}(L^{p(\cdot)}(w))},\\ F &:= \sup_{L>0,\, L\in\mathbb{Z}} \{G+H\},\\ G &:= 2^{-L\lambda}\|(2^{k\alpha(0)}H^1_{b_1}(f_1,f_2)\chi_k)_{k<0}\|_{l^{q_0}(L^{p(\cdot)}(w))},\\ H &:= 2^{-L\lambda}\|(2^{k\alpha_\infty}H^1_{b_1}(f_1,f_2)\chi_k)_{k=0}^{L}\|_{l^{q_\infty}(L^{p(\cdot)}(w))}.\end{aligned}$$

估计 E. 由于 $1/q(0)=1/q_1(0)+1/q_2(0)$, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$, 由 (4.5) 和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}E=&\sup_{L\le 0,\, L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda}\bigg(\sum_{k=-\infty}^{L}\|2^{k\alpha(0)}H^1_{b_1}(f_1,f_2)\chi_k\|^{q(0)}_{L^{p(\cdot)}(w)}\bigg)^{\frac{1}{q(0)}}\\ &\lesssim \|b_1\|_* \sup_{L\le 0,\, L\in\mathbb{Z}} 2^{-L\lambda_1}\bigg\{\sum_{k=-\infty}^{L}\bigg(\sum_{i=-\infty}^{k} 2^{i\alpha_1(0)}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)(n\delta_{12}-\alpha_1(0))}\bigg)^{q_1(0)}\bigg\}^{\frac{1}{q_1(0)}}\\ &\quad\times 2^{-L\lambda_2}\bigg\{\sum_{k=-\infty}^{L}\bigg(\sum_{j=-\infty}^{k} 2^{j\alpha_2(0)}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}2^{(j-k)(n\delta_{22}-\alpha_2(0))}\bigg)^{q_2(0)}\bigg\}^{\frac{1}{q_2(0)}}\\ &=: \|b_1\|_* \sup_{L\le 0,\, L\in\mathbb{Z}} E_1\times E_2,\end{aligned}$$

其中

$$E_1 := 2^{-L\lambda_1}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{L}\Bigg(\sum_{i=-\infty}^{k}2^{k\alpha_1(0)}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)(n\delta_{12}-\alpha_1(0))}\Bigg)^{q_1(0)}\Bigg\}^{\frac{1}{q_1(0)}},$$

$$E_2 := 2^{-L\lambda_2}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{L}\Bigg(\sum_{j=-\infty}^{k}2^{k\alpha_2(0)}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}2^{(j-k)(n\delta_{22}-\alpha_2(0))}\Bigg)^{q_2(0)}\Bigg\}^{\frac{1}{q_2(0)}}.$$

估计 E_1. 由于 $n\delta_{12}-\alpha_1(0)>0$, 通过引理 4.2 得

$$E_1 \lesssim 2^{-L\lambda_1}\Bigg(\sum_{i=-\infty}^{L}2^{i\alpha_1(0)}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q_1(0)}\Bigg)^{\frac{1}{q_1(0)}} \lesssim \|f_1\|_{M\dot{K}_{p_1(\cdot),\lambda_1}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(w_1)},$$

其中记 $(k-i)2^{-|k-i|(n\delta_{12}-\alpha_1(0))}\lesssim 2^{-|k-i|\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1\in(0,n\delta_{12}-\alpha_1(0))$.

估计 E_2. 由于 $n\delta_{22}-\alpha_2(0)>0$, 通过引理 4.2 得

$$E_2 \lesssim 2^{-L\lambda_2}\Bigg(\sum_{j=-\infty}^{L}2^{j\alpha_2(0)}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}^{q_2(0)}\Bigg)^{\frac{1}{q_2(0)}} \lesssim \|f_2\|_{M\dot{K}_{p_2(\cdot),\lambda_2}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(w_2)},$$

其中记 $2^{-|k-j|(n\delta_{22}-\alpha_2(0))}=2^{-|k-j|\varepsilon_2}$, $\varepsilon_2=n\delta_{22}-\alpha_2(0)$.

因此得到

$$E\lesssim \|b_1\|_*\|f_1\|_{M\dot{K}_{p_1(\cdot),\lambda_1}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(w_1)}\|f_2\|_{M\dot{K}_{p_2(\cdot),\lambda_2}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(w_2)}.$$

估计 G. 由于 $1/q(0)=1/q_1(0)+1/q_2(0)$, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$, $\alpha(0)=\alpha_1(0)+\alpha_2(0)$, 由式 (4.5) 和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
G &= 2^{-L\lambda}\Bigg(\sum_{k=-\infty}^{-1}\|2^{k\alpha(0)}H_{b_1}^1(f_1,f_2)\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\Bigg)^{1/q(0)}\\
&\lesssim \|b_1\|_* 2^{-L\lambda_1}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{-1}\Bigg(\sum_{i=-\infty}^{k}2^{i\alpha_1(0)}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)(n\delta_{12}-\alpha_1(0))}\Bigg)^{q_1(0)}\Bigg\}^{\frac{1}{q_1(0)}}\\
&\quad\times 2^{-L\lambda_2}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{-1}\Bigg(\sum_{j=-\infty}^{k}2^{j\alpha_2(0)}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}2^{(j-k)(n\delta_{22}-\alpha_2(0))}\Bigg)^{q_2(0)}\Bigg\}^{\frac{1}{q_2(0)}}\\
&=: \|b_1\|_* G_1G_2,
\end{aligned}$$

其中

$$G_1 := 2^{-L\lambda_1}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{-1}\Bigg(\sum_{i=-\infty}^{k}2^{i\alpha_1(0)}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)(n\delta_{12}-\alpha_1(0))}\Bigg)^{q_1(0)}\Bigg\}^{\frac{1}{q_1(0)}},$$

$$G_2 := 2^{-L\lambda_2}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{-1}\Bigg(\sum_{j=-\infty}^{k}2^{j\alpha_2(0)}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}2^{(j-k)(n\delta_{22}-\alpha_2(0))}\Bigg)^{q_2(0)}\Bigg\}^{\frac{1}{q_2(0)}}.$$

因为 G_1 和 G_2 的估计值分别与 E_1 和 E_2 相似. 因此有

$$G\lesssim \|b_1\|_*\|f_1\|_{M\dot{K}_{p_1(\cdot),\lambda_1}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(w_1)}\|f_2\|_{M\dot{K}_{p_2(\cdot),\lambda_2}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(w_2)}.$$

为了继续估计, 我们需要进一步的准备.

如果 $i<0$, 由命题 2.12, 有

$$
\begin{aligned}
\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)} &= 2^{-i\alpha_1(0)}\big(2^{i\alpha_1(0)q_1(0)}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q_1(0)}\big)^{\frac{1}{q_1(0)}} \\
&\lesssim 2^{-i\alpha_1(0)}\left(\sum_{l=-\infty}^{i} 2^{l\alpha_1(0)q_1(0)}\|f_1\chi_l\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q_1(0)}\right)^{\frac{1}{q_1(0)}} \\
&\lesssim 2^{i(\lambda_1-\alpha_1(0))}2^{-i\lambda_1}\left(\sum_{l=-\infty}^{i}\|2^{l\alpha(0)}f_1\chi_l\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q_1(0)}\right)^{\frac{1}{q_1(0)}} \\
&\lesssim 2^{i(\lambda_1-\alpha_1(0))}\|f_1\|_{M\dot{K}_{p_1(\cdot),\lambda_1}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(w_1)}.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

类似地, 如果 $j<0$, 有

$$
\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)} \lesssim 2^{j(\lambda_2-\alpha_2(0))}\|f_2\|_{M\dot{K}_{p_2(\cdot),\lambda_2}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(w_2)}. \tag{4.7}
$$

现在估计 H. 由于 $1/q_\infty=1/q_{1\infty}+1/q_{2\infty}$, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$, $\alpha_\infty=\alpha_{1\infty}+\alpha_{2\infty}$, 通过式 (4.5) 和 Hölder 不等式, 有

$$
\begin{aligned}
H &= 2^{-L\lambda}\left(\sum_{k=0}^{L}\|2^{k\alpha_\infty}H_{b_1}^1(f_1,f_2)\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\right)^{\frac{1}{q_\infty}} \\
&\lesssim \|b_1\|_* 2^{-L\lambda_1}\left\{\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{1\infty}q_{1\infty}}\left(\sum_{i=-\infty}^{k}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)n\delta_{12}}\right)^{q_{1\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{1\infty}}} \\
&\quad\times 2^{-L\lambda_2}\left\{\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{2\infty}q_{2\infty}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}2^{(j-k)n\delta_{22}}\right)^{q_{2\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{2\infty}}} \\
&=: \|b_1\|_* H_1H_2,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
H_1 &:= 2^{-L\lambda_1}\left\{\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{1\infty}q_{1\infty}}\left(\sum_{i=-\infty}^{k}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)n\delta_{12}}\right)^{q_{1\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{1\infty}}}, \\
H_2 &:= 2^{-L\lambda_2}\left\{\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{2\infty}q_{2\infty}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\|f_2\chi_j\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}2^{(j-k)n\delta_{22}}\right)^{q_{2\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{2\infty}}}.
\end{aligned}
$$

估计 H_1, 有

$$
\begin{aligned}
H_1 &\lesssim 2^{-L\lambda_1}\left\{\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{1\infty}q_{1\infty}}\left(\sum_{i=-\infty}^{-1}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)n\delta_{12}}\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.+\sum_{i=0}^{k}(k-i)\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}2^{(i-k)n\delta_{12}}\right)^{q_{1\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{1\infty}}} \\
&\lesssim 2^{-L\lambda_1}\left\{\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{1\infty}q_{1\infty}}\left(\sum_{i=-\infty}^{-1}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)n\delta_{12}}\right)^{q_{1\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{1\infty}}} \\
&\quad+2^{-L\lambda_1}\left\{\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{1\infty}q_{1\infty}}\left(\sum_{i=0}^{k}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)n\delta_{12}}\right)^{q_{1\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{1\infty}}} \\
&=: H_{1,1}+H_{1,2}.
\end{aligned}
$$

若 $q_{1\infty}\geq 1$, 因 $n\delta_{12}-\alpha_{1\infty}>0$ 和 $n\delta_{12}-\alpha_1(0)>0$. 那么, 由 Minkowski 不等式和 (4.6), 得

$$\begin{aligned}
H_{1,1}&=2^{-L\lambda_1}\left\{\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{1\infty}q_{1\infty}}\left(\sum_{i=-\infty}^{-1}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)n\delta_{12}}\right)^{q_{1\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\\
&\lesssim 2^{-L\lambda_1}\sum_{i=-\infty}^{-1}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\left\{\sum_{k=0}^{L}(2^{k\alpha_{1\infty}}(k-i)2^{(i-k)n\delta_{12}})^{q_{1\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\\
&\lesssim 2^{-L\lambda_1}\sum_{i=-\infty}^{-1}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\left\{\sum_{k=0}^{L}\left(2^{k\alpha_{1\infty}}2^{(i-k)(n\delta_{12}-\gamma_1)}\right)^{q_{1\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\\
&\lesssim 2^{-L\lambda_1}\sum_{i=-\infty}^{-1}2^{i(n\delta_{12}-\gamma_1)}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\left\{\sum_{k=0}^{L}2^{-k(n\delta_{12}-\alpha_{1\infty}-\gamma_1)q_{1\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\\
&\lesssim \|f_1\|_{M\dot{K}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),\lambda_1}(w_1)}2^{-L\lambda_1}\sum_{i=-\infty}^{-1}2^{i(n\delta_{12}-\gamma_1+\lambda_1-\alpha_1(0))}\lesssim\|f_1\|_{M\dot{K}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),\lambda_1}(w_1)},
\end{aligned}$$

其中 $(k-i)<2^{(i-k)(-\gamma_1)}$, $\gamma_1\in(0,\min\{n\delta_{12}-\alpha_1(0),n\delta_{12}-\alpha_{1\infty}\})$.

若 $q_{1\infty}<1$, 由于 $n\delta_{12}-\alpha_{1\infty}>0$ 和 $n\delta_{12}-\alpha_1(0)>0$, 那么, 由式 (4.6) 有

$$\begin{aligned}
H_{1,1}&\lesssim 2^{-L\lambda_1}\left(\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{1\infty}q_{1\infty}}\sum_{i=-\infty}^{-1}\|f_1\chi_i\|^{q_{1\infty}}_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)n\delta_{12}q_{1\infty}}\right)^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\\
&\lesssim 2^{-L\lambda_1}\left(\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{1\infty}q_{1\infty}}\sum_{i=-\infty}^{-1}\|f_1\chi_i\|^{q_{1\infty}}_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}2^{(i-k)(n\delta_{12}-\gamma_1)q_{1\infty}}\right)^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\\
&=2^{-L\lambda_1}\left(\sum_{i=-\infty}^{-1}\|f_1\chi_i\|^{q_{1\infty}}_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}2^{i(n\delta_{12}-\gamma_1)q_{1\infty}}\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{1\infty}q_{1\infty}}2^{-k(n\delta_{12}-\gamma_1)q_{1\infty}}\right)^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\\
&=2^{-L\lambda_1}\left(\sum_{i=-\infty}^{-1}\|f_1\chi_i\|^{q_{1\infty}}_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}2^{i(n\delta_{12}-\gamma_1)q_{1\infty}}\sum_{k=0}^{L}2^{-k(n\delta_{12}-\alpha_{1\infty}-\gamma_1)q_{1\infty}}\right)^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\\
&\lesssim 2^{-L\lambda_1}\left(\sum_{i=-\infty}^{-1}\|f_1\chi_i\|^{q_{1\infty}}_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}2^{i(n\delta_{12}-\gamma_1)q_{1\infty}}\right)^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\\
&\lesssim \|f_1\|_{M\dot{K}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),\lambda_1}}2^{-L\lambda_1}\left(\sum_{i=-\infty}^{-1}2^{i(n\delta_{12}-\gamma_1+\lambda_1-\alpha_1(0))q_{1\infty}}\right)^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\lesssim\|f_1\|_{M\dot{K}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),\lambda_1}(w_1)},
\end{aligned}$$

其中 $(k-i)\lesssim 2^{(i-k)(-\gamma_1)}$, $\gamma_1\in(0,\min\{n\delta_{12}-\alpha_1(0),n\delta_{12}-\alpha_{1\infty}\})$.

估计 $H_{1,2}$. 由于 $n\delta_{12}-\alpha_{1\infty}>0$, 那么通过引理 4.2, 有

$$\begin{aligned}
H_{1,2}&=2^{-L\lambda_1}\left\{\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_{1\infty}q_{1\infty}}\left(\sum_{i=0}^{k}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)n\delta_{12}}\right)^{q_{1\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\\
&=2^{-L\lambda_1}\left\{\sum_{k=0}^{L}\left(\sum_{i=0}^{k}2^{i\alpha_{1\infty}}\|f_1\chi_i\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}(k-i)2^{(i-k)(n\delta_{12}-\alpha_{1\infty})}\right)^{q_{1\infty}}\right\}^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\\
&\lesssim 2^{-L\lambda_1}\left(\sum_{i=0}^{k}2^{i\alpha_{1\infty}q_{1\infty}}\|f_1\chi_i\|^{q_{1\infty}}_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\right)^{\frac{1}{q_{1\infty}}}\lesssim\|f_1\|_{M\dot{K}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),\lambda_1}(w_1)},
\end{aligned}$$

其中记 $(k-i)2^{-|k-i|(n\delta_{12}-\alpha_{1\infty})}\lesssim 2^{-|k-i|\eta_1}$, $\eta_1\in(0,n\delta_{12}-\alpha_{1\infty})$.

与 H_1 的估计相似, 得到 $H_2 \lesssim \|f_2\|_{M\dot{K}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}_{p_2(\cdot),\lambda_2}(w_2)}$. 因此得

$$H \lesssim \|b_1\|_* \|f_1\|_{M\dot{K}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),\lambda_1}(w_1)} \|f_2\|_{M\dot{K}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}_{p_2(\cdot),\lambda_2}(w_2)}.$$

把 E, G, H 所有的估计综合起来, 得到

$$\|H^1_{b_1}(f_1,f_2)\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda}(w)} \lesssim \|b_1\|_* \|f_1\|_{M\dot{K}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),\lambda_1}(w_1)} \|f_2\|_{M\dot{K}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}_{p_2(\cdot),\lambda_2}(w_2)}.$$

类似地, 有

$$\|H^1_{b_2}(f_1,f_2)\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda}(w)} \lesssim \|b_2\|_* \|f_1\|_{M\dot{K}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),\lambda_1}(w_1)} \|f_2\|_{M\dot{K}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}_{p_2(\cdot),\lambda_2}(w_2)}.$$

证毕.

参 考 文 献

[1] Almeida A., Drihem D., Maximal, potential and singular type operators on Herz spaces with variable exponents, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, **394**(2): 781–795.

[2] Almeida A., Hasanov J., Samko S., Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces, *Georgian Math. J.*, 2008, **15**(2): 195–208.

[3] Almeida A., Hästö P., Besov spaces with variable smoothness and integrability, *J. Funct. Anal.*, 2010, **258**(5): 1628–1655.

[4] Christ M., Grafakos L., Best constants for two nonconvolution inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1995, **123**(6): 1687–1693.

[5] Cruz-Uribe D., Diening L., Fiorenza A., A new proof of the boundedness of maximal operators on variable Lebesgue spaces, *Boll. Unione Mat. Ital.*, 2009, **2**(1): 151–173.

[6] Cruz-Uribe D., Fiorenza A., Variable Lebesgue Spaces, Birkhauser, Basel, 2013.

[7] Cruz-Uribe D., Fiorenza A., Martell J. M., et al., The boundedness of classical operators on variable L^p spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2006, **31**(1): 239–264.

[8] Cruz-Uribe D., Fiorenza A., Neugebauer C. J., Weighted norm inequalities for the maximal operator on variable Lebesgue spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, **394**(2): 744–760.

[9] Cruz-Uribe D., Wang L. A. D., Extrapolation and weighted norm inequalities in the variable Lebesgue spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2017, **369**(2): 1205–1235.

[10] Diening L., Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$, *Math. Inequal. Appl.*, 2004, **7**(2): 245–253.

[11] Diening L., Maximal function on Musielak–Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces, *Bull. Sci. Math.*, 2005, **129**(8): 657–700.

[12] Diening L., Harjulehto P., Hästö P., et al., Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Springer, Heidelberg, 2011.

[13] Diening L., Harjulehto P., Hästö P., et al., Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2009, **34**(1): 503–522.

[14] Diening L., Hästö P., Roudenko S., Function spaces of variable smoothness and integrability, *J. Funct. Anal.*, 2009, **256**(6): 1731–1768.

[15] Diening L., Samko S., Hardy inequality in variable exponent Lebesgue spaces, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2007, **167**(10): 2479–2486.

[16] Dong B., Xu J., New Herz type Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable exponents, *J. Funct. Spaces Appl.*, 2012, **2012**, Article ID 384593, 27 pp.

[17] Drihem D., Some characterizations of variable Besov-type spaces, *Ann. Funct. Anal.,* 2015, **6**(4): 255–288.

[18] Drihem D., Some properties of variable Besov-type spaces, *Funct. Approx. Comment. Math.,* 2015, **52**(2): 193–221.

[19] Drihem D., Heraiz R., Herz-type Besov spaces of variable smoothness and integrability, *Kodai Math. J.,* 2017, **40**(1): 31–57.

[20] Faris W., Week Lebesgue spaces and quantum mechanical binding, *Duke Math. J.*, 1967, **43**(2): 365–373.

[21] Grafakos L., Modern Fourier Analysis, Springer, New York, 2014.

[22] Gurka P., Harjulehto P., Nekvinda A., Bessel potential spaces with variable exponent, *Math. Inequal. Appl.*, 2007, **10**(3): 661–676.

[23] Hardy G. H., Note on a theorem of Hilbert, *Math Z.*, 1920, **6**(3): 314–317.
[24] Harjulehto P., Hasto P., Koskenoja M., Hardy's inequality in a variable exponent Sobolev space, *Georgian Math. J.*, 2005, **12**(3): 431–442.
[25] Huang A., Xu J., Multilinear singular integral and commutators in variable exponent Lebesgue space, *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, 2010, **25**(1): 69–77.
[26] Izuki M., Boundedness of commutators on Herz spaces with variable exponent, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 2010, **59**(2): 199–213.
[27] Izuki M., Boundedness of vector-valued sublinear operators on Herz–Morrey spaces with variable exponent, *Math. Sci. Res. J.*, 2009, **13**(10): 243–253.
[28] Izuki M., Fractional integrals on Herz–Morrey space with variable exponents, *Hiroshima Math. J.*, 2010, **40**(3): 343–355.
[29] Izuki M., Noi T., Boundedness of fractional integrals on weighted Herz spaces with variable exponent, *J. Inequal. Appl.*, 2016, **2016**(1): 199.
[30] Izuki M., Noi T., An intrinsic square function on weighted Herz spaces with variable exponent, *J. Math. Inequal.*, 2016, **11**(3): 799–816.
[31] Izuki M., Noi T., Two weighted Herz spaces with variable exponents, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2020, **43**: 169–200.
[32] Kováčik O., Rákosník J., On space $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, *Czechoslovak Math. J.*, 1991, **41**(4): 592–618.
[33] Li X., Yang D., Boundedness of some sublinear operators on Herz spaces, *Illinois J. Math.*, 1996, **40**(3): 484–501.
[34] Lu S., Yang D., Hu G., Herz Type spaces and Their Applications, Science Press, Beijing, 2008.
[35] Lu Y., Zhu Y., Boundedness of multilinear Calderón–Zygmund singular operators on Morrey–Herz space with variable exponent, *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 2014, **30**(7): 1180–1194.
[36] Muckenhoupt B., Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, **165**: 207–226.
[37] Nakai E., Sawano Y., Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces, *J. Funct. Anal.*, 2012, **262**(9): 3665–3748.
[38] Nekvinda A., Hardy–Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$, *Math. Inequal. Appl.*, 2004, **7**(2): 255–266.
[39] Samko S., Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2003, **6**(4): 355–362.
[40] Sawano Y., Theory of Besov Spaces, Springer, Singapore, 2018.
[41] Shu L., Wang M., Qu M., Commutators of Hardy type operators on Herz spaces with variable exponents, *Acta Math. Sinica, Chinese Series*, 2015, **58**(1): 29–40.
[42] Wu J., Boundedness of multilinear commutators of fractional Hardy operators, *Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed.*, 2011, **31**(4): 1055–1062.
[43] Wu J., Boundedness for fractional Hardy-type operator on Herz–Morrey spaces with variable exponent, *Bull. Korean Math. Soc.*, 2014, **51**(2): 423–435.
[44] Wu J., Liu Q., λ-central BMO estimates for higher order commutators of Hardy operators, *Commun. Math. Res.*, 2014, 30(3): 201–206.
[45] Wu J., Zhang P., Boundedness of multilinear Hardy type operators on the product of Herz–Morrey spaces with variable exponent, *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A*, 2013, **28**(2): 154–164.
[46] Zhang P., Wu J., Boundedness of commutators of fractional Hardy operators on Herz–Morrey spaces with variable exponent (in Chinese), *Adv. Math.*, 2014, **43**(4): 581–589.
[47] Wu J., Zhao W., Boundedness for fractional Hardy-type operator on variable exponent Herz–Morrey spaces, *Kyoto J. Math.*, 2016, **56**(4): 831–845.
[48] Wu S., Yang D., Yuan W., et al., Variable 2-microlocal Besov–Triebel–Lizorkin-type spaces, *Acta Math. Sin. Engl. Ser.,* 2018, **34**(4): 699–748.
[49] Xu J., Variable Besov spaces and Triebel–Lizorkin spaces, *Ann. Acad. Sci. Fen. Math.*, 2008, **33**: 511–522.
[50] Xu J., Yang X., Variable exponent Herz type Besov and Triebel–Lizorkin spaces, *Georgian Math. J.*, 2018, **25**(1): 135–148.
[51] Yang D., Zhuo C., Yuan W., Triebel–Lizorkin type spaces with variable exponents, *Banach J. Math. Anal.*, 2015, **9**(4): 146–202.
[52] Yang D., Zhuo C., Yuan W., Besov-type spaces with variable smoothness and integrability, *J. Funct. Anal.*, 2015, **269**(6): 1840–1898.
[53] Zhuo C., Chang D., Yang D., et al., Characterizations of variable Triebel–Lizorkin-type spaces via ball averages, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 2018, **19**(1): 19–40.