第64卷第1期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.64, No.1
2021年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2021

文章编号: 0583-1431(2021)01-0107-16 **文献标识码: A**

有界域上具有部分耗散和磁扩散的二维磁流体方程的全局适定性

张明玉

潍坊学院数学与信息科学学院 潍坊 261061
E-mail: mingyumath@126.com

摘 要 探究了具有部分耗散和磁扩散的二维不可压缩磁流体 (MHD) 方程的初边值问题. 在有界区域上, 当系统的各个方向上的耗散系数和磁扩散系数都非负时, 我们得到了该模型的强解是整体存在且唯一的. 此外, 对周期域而言, 其解仍是全局适定的.

关键词 不可压缩磁流体; 初边值问题; 部分耗散; 磁扩散; 全局适定性
MR(2010) 主题分类 35B45, 35B65, 76N10
中图分类 O175, O175.2

Global Well-posedness for the 2D MHD System with Partial Dissipation and Magnetic Diffusion in a Bounded Domain

Ming Yu ZHANG

School of Mathematics and Information Sciences, Weifang University,
Weifang 261061*, P. R. China*
E-mail: *mingyumath@126.com*

Abstract We consider the initial boundary value problem of the two-dimensional incompressible magnetohydrodynamic (MHD) equations with partial dissipation and magnetic diffusion. The global and unique strong solution of the model in a bounded domain is justified when the dissipation and magnetic diffusion coefficient in all directions are nonnegative. In addition, the global well-posedness of the system can be extended into the periodic boundary.

Keywords incompressible MHD; initial-boundary value problem; partial dissipation; magnetic diffusion; global well-posedness
MR(2010) Subject Classification 35B45, 35B65, 76N10
Chinese Library Classification O175, O175.2

1 引言

不可压缩磁流体 (MHD) 方程描述了描述了导电流体在电磁场中的运动规律. 在天体物理、

收稿日期: 2019-09-26; 接受日期: 2020-03-26

地球物理、空气动力学以及等离子物理中有着重要的应用背景. 该模型是由 Navier–Stokes 方程和 Maxwell 方程通过洛伦兹力耦合在一起而得到的. 在区间 $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ 上具有完全耗散和磁扩散的二维不可压缩磁流体方程如下 [3, 8]:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + u_1\partial_x u_1 + u_2\partial_y u_1 + \partial_x p - b_1\partial_x b_1 - b_2\partial_y b_1 = \nu_{11}\partial_{xx}u_1 + \nu_{12}\partial_{yy}u_1, \\ \partial_t u_2 + u_1\partial_x u_2 + u_2\partial_y u_2 + \partial_y p - b_1\partial_x b_2 - b_2\partial_y b_2 = \nu_{21}\partial_{xx}u_2 + \nu_{22}\partial_{yy}u_2, \\ \partial_t b_1 + u_1\partial_x b_1 + u_2\partial_y b_1 - b_1\partial_x u_1 - b_2\partial_y u_1 = \eta_{11}\partial_{xx}b_1 + \eta_{12}\partial_{yy}b_1, \\ \partial_t b_2 + u_1\partial_x b_2 + u_2\partial_y b_2 - b_1\partial_x u_2 - b_2\partial_y u_2 = \eta_{21}\partial_{xx}b_2 + \eta_{22}\partial_{yy}b_2, \\ \partial_x u_1 + \partial_y u_1 = 0, \quad \partial_x b_1 + \partial_y b_1 = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

由于磁场与流场之间的强耦合性以及非线性洛伦兹力的影响, 使得不可压缩磁流体方程的全局适定性问题比 Navier–Stokes 方程要复杂得多. 不可压缩磁流体方程 (1.1) 源于物理学上重要的偏微分方程, 它可以解释行星上某些显著的特征. 在天体物理学上, 由于行星的自转, 磁流体通常是各向异性的, 即磁流体在不同方向上的粘性性质是不同的. 由于我们主要探究行星上的磁流体问题, 因此在矩形域中考虑部分粘性的磁流体问题更为方便. 众所周知, 磁流体有多种边界条件, 如绝缘边界条件、零磁边界条件、超导磁边界条件和超导边界条件 [4]. 因此, 为更好地了解具有部分耗散和磁扩散的二维磁流体在有界区域内的全局适定性, 我们考虑下面的初边值条件:

$$\begin{cases} u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad b(x,y,0) = b_0(x,y), \\ u_1 = \partial_x u_2 = 0, \quad b_1 = \partial_x b_2 = 0, \quad x = 0,1, \\ u_2 = \partial_y u_1 = 0, \quad b_2 = \partial_y b_1 = 0, \quad y = 0,1. \end{cases} \tag{1.2}$$

这里 $u(x,y,t) = (u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))$ 表示速度场, $b(x,y,t) = (b_1(x,y,t), b_2(x,y,t))$ 表示磁场, p 表示压力 (包含磁压力); 非负常数 ν_{ij}, η_{ij} $(i,j = 1,2)$ 分别表示耗散系数和磁扩散系数. 为简便起见, 记

$$A \triangleq \begin{pmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{21} & \nu_{22} \end{pmatrix}, \quad B \triangleq \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix}$$

分别表示粘性耗散系数矩阵和磁扩散系数矩阵.

对于不可压缩磁流体方程而言, 其适定性已有很多结果. 对于具有完全耗散和磁扩散的非齐次磁流体方程而言, Desjardins 和 Le Bris [6], Gerbeau 和 Le Bris [9] 分别探究了全空间和圆环中有限能量弱解的整体存在性. 在文 [1] 中, Abidi 和 Paicu 在 Besov 空间中得到了小初值下强解的整体存在性. 当系统含真空时, Chen, Tan 和 Wang [5] 推广了局部存在性. 最近, Huang 和 Wang [10] 证明了含真空的二维空间中强解的整体存在性, 而对于三维的情形, Li 和 Wang [13] 在小初值且不含真空的条件下得到了有界域中的整体强解的存在性.

另一方面, 对于齐次的情形, Duraut 和 Lions [7] 构造了一类具有有限能量的全局弱解和一类局部强解. 对于 $H^s(\mathbb{R}^3)$ $(\forall\, s \geq 3)$ 中任意初值, Sermange 和 Temam [16] 证明了局部解的适定性. 在零磁扩散的情况下, 当初始状态 (u_0, b_0) 接近平衡态 $(0, B_0)$ 时, Bardos 等人 [2] 得到了经典解的全局存在性. Lin, Xu 和 Zhang [14], Xu 和 Zhang [18] 在初始状态充分接近平衡态的条件下分别得到了二维和三维空间整体解的适定性. 当不考虑磁扩散时, Ren 等人 [15] 得到了二维磁流体方程小光滑解的整体存在性和衰减估计. 当初值是轴对称的情形时, Lei [12] 证明了

$H^s(\mathbb{R}^3)$ ($\forall\, s \geq 2$) 中理想磁流体方程光滑解的全局存在性. 最近, Cao 和 Wu [3] 在

$$\text{情形 } 1: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{情形 } 2: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下探究了 Cauchy 问题 (1.1) 和 (1.2) 经典解的全局正则性, 其中

$$(A\,|\,B) = \begin{pmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \eta_{11} & \eta_{12} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix}.$$

对于其它情形, Du 和 Zhou [8] 在如下更一般的情况下研究了方程 (1.1) 和 (1.2) 的 Cauchy 问题, 建立了混合部分耗散和磁扩散下经典解的全局适定性, 其中

$$\text{情形 } 3: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{情形 } 4: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{情形 } 5: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{情形 } 6: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{情形 } 7: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{情形 } 8: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{情形 } 9: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{情形 } 10: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{情形 } 11: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{情形 } 12: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{情形 } 13: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{情形 } 14: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{情形 } 15: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{情形 } 16: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{情形 } 17: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{情形 } 18: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

以及

$$\text{情形 } 19: \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们感兴趣的是当区域有界时, 方程 (1.1) 和 (1.2) 的全局适定性问题. 如果两个常数 ν_{ij}, $\eta_{ij} > 0$ $(i, j = 1, 2)$, 利用文献 [7, 16] 的方法, 就可以得到二维不可压缩磁流体方程组 (1.1) 和 (1.2) 对任意初值 $(u_0, b_0) \in H^k$ $(k \geq 2)$ 都存在全局经典解. 然而, 当变量 $\nu_{ij}, \eta_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, 2)$ 时, 二维不可压缩磁流体方程经典解关于时间的整体存在性仍是一个公开的问题. 关于这个问题有一些结果. Yu [19] 探究了混合部分耗散和磁扩散的二维不可压缩磁流体方程的初边值问题 (即如上情形 1 和情形 2), 并得到了解的全局正则性.

受文献 [3, 8, 19] 的启发, 本文的主要目的是在情形 k $(k = 3, 4, \ldots, 19)$ 下, 研究具有混合部分耗散和磁扩散的初边值问题 (1.1) 和 (1.2) 强解的全局适定性问题. 这里的主要困难在于方程的结构没有完全的粘性项, 并且在有界域内缺少速度场和磁场的某些分量及其导数的信息.

在说明主要结果之前, 首先解释本文中使用的符号. 记

$$\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega f dxdy=\int_0^1\int_0^1 f dxdy, \quad \|f\|_{L_x^2}^2=\int_0^1|f|^2dx, \quad \|f\|_{L_y^2}^2=\int_0^1|f|^2dy,\\ \|f\|_0=\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \omega=\nabla\times u, \quad j=\nabla\times b.\end{cases}$$

本文的主要结果如下:

定理 1.1 令 $\Omega\triangleq[0,1]\times[0,1]$. 假设初值 $(u_0,b_0)\in H^2(\Omega)$ 并且满足 $\nabla\cdot u_0=\nabla\cdot b_0=0$, 则在情形 k $(k=3,4,\ldots,19)$ 下, 问题 (1.1) 和 (1.2) 存在唯一全局强解 (u,b), 并且对任意给定的 $T>0$ 满足

$$(u,b)\in L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)\right).$$

注 1.2 边界条件 (1.2) 可由条件

$$v\cdot n=0, \quad \operatorname{curl} v=0, \quad 在\ \partial\tilde{\Omega}\ 上 \tag{1.3}$$

导出, 这里 $\tilde{\Omega}$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的有界光滑区域, $n=(n_1,n_2)$ 表示 $\partial\tilde{\Omega}$ 的单位外法向量 [19]. 上述 (1.3) 式的第一个条件是非渗透边界条件, 第二个条件是由已知形式

$$(\mathscr{D}(v)\cdot n)_\iota=\kappa_\iota v_\iota \tag{1.4}$$

导出的, 其中 κ_ι 是 $\partial\tilde{\Omega}$ 对应的主曲率, $v_\iota=v-(v\cdot n)n$, $\mathscr{D}(v)$ 表示形变张量:

$$\mathscr{D}(v)=\frac{1}{2}\left(\nabla v+\nabla^t v\right).$$

条件 (1.4) 隐含着 $\mathscr{D}(v)\cdot n$ 的切向分量消失在边界 $\partial\tilde{\Omega}$ 的平坦部分上. 值得注意的是, ∇v 可以分解为

$$\nabla v=\mathscr{D}(v)+\mathscr{S}(v), \quad \mathscr{S}(v)=\frac{1}{2}(\nabla v-\nabla^t v),$$

其中 $\mathscr{S}(v)$ 称为刚体旋转张量. 张量 $\mathscr{D}(v)$ 和 $\mathscr{S}(v)$ 分别是 ∇v 的对称部分和斜对称部分. 事实上, 由于单位外法向量 n 到 $\partial\tilde{\Omega}$ 不能很好地定义, 我们需要修正 (1.3) 式. 直接由 (1.3) 式可知

$$\begin{aligned} &v_1=0, \quad \partial_x v_2=0, \quad 当\ x=0,1\ 时,\\ &v_2=0, \quad \partial_y v_1=0, \quad 当\ y=0,1\ 时. \end{aligned}$$

于是令 $v=u$, $v=b$, 便可得到 (1.2) 式.

注 1.3 定理 1.1 中的结论也可以推广到周期边界.

本文第 2 节介绍预备知识. 第 3 节将建立 $\nabla\omega$ 和 ∇j 的 L^2 范数估计, 然后得到 $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ 和 $\|b\|_{H^2(\Omega)}$ 的全局一致估计, 这将通过充分利用 Stokes 方程的估计来实现, 其方法类似于标准的不可压缩 Navier–Stokes 方程或者磁流体方程 [11, 16, 17]. 于是我们可以证明具有情形 3–19 的磁流体方程 (1.1) 和 (1.2) 在有界域中的整体适定性.

2 预备知识

下面将给出一些基本的不等式和常用的事实.

首先, 类似于文 [3, 引理 1], 我们有如下结论.

引理 2.1 假设 f, g, h, f_x, $g_y \in L^2(\Omega)$, 则当 $f|_{x=0,1}$ 和 $g|_{y=0,1}$ 的值未知时, 有

$$\int_\Omega |fgh|dxdy \le (\|f\|_0 + \|f\|_0^{1/2}\|f_x\|_0^{1/2})(\|g\|_0 + \|g\|_0^{1/2}\|g_y\|_0^{1/2})\|h\|_0; \tag{2.1}$$

当 $f|_{x=0,1} = 0$, 并且 $g|_{y=0,1}$ 的值未知时, 有

$$\int_\Omega |fgh|dxdy \le \|f\|_0^{1/2}\|f_x\|_0^{1/2}(\|g\|_0 + \|g\|_0^{1/2}\|g_y\|_0^{1/2})\|h\|_0; \tag{2.2}$$

当 $f|_{x=0,1}$ 的值未知, 且 $g|_{y=0,1} = 0$ 时, 有

$$\int_\Omega |fgh|dxdy \le (\|f\|_0 + \|f\|_0^{1/2}\|f_x\|_0^{1/2})\|g\|_0^{1/2}\|g_y\|_0^{1/2}\|h\|_0; \tag{2.3}$$

当 $f|_{x=0,1} = g|_{y=0,1} = 0$ 时, 有

$$\int_\Omega |fgh|dxdy \le \|f\|_0^{1/2}\|f_x\|_0^{1/2}\|g\|_0^{1/2}\|g_y\|_0^{1/2}\|h\|_0. \tag{2.4}$$

证明 直接计算可知

$$\int_\Omega |fgh|dxdy \le \|fg\|_0\|h\|_0 \le \left(\int_0^1 \sup_{0\le x\le 1} f^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \sup_{0\le y\le 1} g^2 dx\right)^{1/2} \|h\|_0. \tag{2.5}$$

当 $f|_{x=0,1}$ 和 $g|_{y=0,1}$ 的值未知时, 由中值定理, 存在一个常数 $0 < \xi < 1$ 满足

$$f^2(x,y) = 2\int_\xi^x f\partial_x f(s,y)ds + \int_0^1 f^2(x,y)dx, \tag{2.6}$$

于是

$$\sup_{0\le x\le 1} f^2 \le 2\|f\|_{L_x^2}\|f_x\|_{L_x^2} + \|f\|_{L_x^2}^2. \tag{2.7}$$

同理

$$\sup_{0\le y\le 1} g^2 \le 2\|g\|_{L_y^2}\|g_y\|_{L_y^2} + \|g\|_{L_y^2}^2. \tag{2.8}$$

将 (2.7) 和 (2.8) 式代入 (2.5) 式, 由 Hölder 不等式可得 (2.1) 式成立.

当 $f|_{x=0,1} = 0$, 并且 $g|_{y=0,1}$ 的值未知时, 由 $f|_{x=0,1} = 0$ 可得

$$f^2(x,y) = 2\int_0^x f\partial_x f(s,y)ds \le 2\|f\|_{L_x^2}\|f_x\|_{L_x^2}. \tag{2.9}$$

将 (2.8) 和 (2.9) 式代入 (2.5) 式, 由 Hölder 不等式可得 (2.2) 式成立.

当 $f|_{x=0,1}$ 的值未知, 且 $g|_{y=0,1} = 0$ 时, 同理于 (2.9) 式, 由 $g|_{y=0,1} = 0$ 可知

$$g^2(x,y) = 2\int_0^y f\partial_y f(x,s)ds \le 2\|f\|_{L_y^2}\|f_x\|_{L_y^2}. \tag{2.10}$$

将 (2.7) 和 (2.10) 式代入 (2.5) 式, 由 Hölder 不等式可得 (2.3) 式成立.

当 $f|_{x=0,1} = g|_{y=0,1} = 0$ 时, 将 (2.9) 和 (2.10) 代入 (2.5) 式, 由 Hölder 不等式可得 (2.4) 式成立. 综上便知引理 2.1 成立. 证毕.

其次, 对于任意给定的 $T > 0$, 如果估计式 $\|(u,b)\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}$ 成立, 那么下面的命题便蕴含了二维磁流体方程 (1.1) 和 (1.2) 解的全局适定性.

命题 2.2 假设 $(u_0,b_0) \in H^2(\Omega)$, 并且对于任意给定的 $t > 0$, $\|(u(\cdot,t),b(\cdot,t))\|_{H^2(\Omega)}$ 是一致有界的, 则初边值问题 (1.1) 和 (1.2) 在情形 k $(k = 1,2,\ldots,19)$ 下存在唯一的全局强解 (u,b).

该命题的证明可由消失的粘性极限理论 [3] 得到, 这里我们就不再证明.

3 定理 1.1 的证明

本节将证明在情形 3–19 下磁流体方程 (1.1) 和 (1.2) 解的全局正则性, 并给出定理 1.1 的证明. 由命题 2.2 可知, 为了获得具有部分混合耗散和磁扩散的二维磁流体方程解的全局适定性, 只需得到 $\|u(\cdot,t),b(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}$ 的一致估计就足够了. 此外, 由于估计值 $\|(\nabla u,\nabla b)\|_{H^1(\Omega)}$ 与估计值 $\|(\omega,j)\|_{H^1(\Omega)}$ 等价, 于是我们只需得到速度场的旋度和电流密度的 H^1 范数估计即可.

3.1 情形 3–8 下定理 1.1 的证明

由 (1.2) 式可知

$$\int_\Omega \partial_x^2 u_1 u_1 dxdy = \int_\Omega \partial_x(\partial_x u_1 u_1)dxdy - \|\partial_x u_1\|_0^2 = -\|\partial_x u_1\|_0^2, \tag{3.1}$$

$$\int_\Omega \partial_y^2 u_2 u_2 dxdy = \int_\Omega \partial_y(\partial_y u_2 u_2)dxdy - \|\partial_y u_2\|_0^2 = -\|\partial_y u_2\|_0^2, \tag{3.2}$$

$$\int_\Omega \partial_x^2 u_2 u_2 dxdy = \int_\Omega \partial_x(\partial_x u_2 u_2)dxdy - \|\partial_x u_2\|_0^2 = -\|\partial_x u_2\|_0^2, \tag{3.3}$$

$$\int_\Omega \partial_y^2 u_2 u_2 dxdy = \int_\Omega \partial_y(\partial_y u_1 u_1)dxdy - \|\partial_y u_1\|_0^2 = -\|\partial_y u_1\|_0^2. \tag{3.4}$$

另一方面, 由观察可知, 情形 3 丢失的有效信息比情形 4–6 还要多. 例如在情形 3 中, 除了能量中关于 $\partial_x u_1$ 的估计

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u,b)\|_0^2 + (\nu_{11}+\nu_{22})\|\partial_x u_1\|_0^2 + \nu_{12}\|\partial_y u_1\|_0^2 + \nu_{21}\|\partial_x u_2\|_0^2\\&\quad + (\eta_{11}+\eta_{22})\|\partial_x b_1\|_0^2 + \eta_{12}\|\partial_y b_1\|_0^2 + \eta_{21}\|\partial_x b_2\|_0^2 = 0\end{aligned} \tag{3.5}$$

之外, 我们无法获得速度场导数的任何估计. 因此, 首先考虑磁流体方程 (1.1) 和 (1.2) 在情形 3 下的情况 (等式 (3.5) 可由方程组 (1.1) 分别乘以 u_1,u_2,b_1 和 b_2, 然后在 Ω 上积分后相加得到). 此外, 在情形 4–6 中, 速度梯度张量的两个独立分量的估计可由能量估计直接推导出来. 这就是为什么我们首先考虑情形 3 的情况, 它是全局适定性证明中最关键的部分.

情形 3 下的全局正则性 控制旋度 $\omega=\nabla\times\mathbf{u}=\partial_x u_2-\partial_y u_1$ 和电流密度 $j=\nabla\times\mathbf{b}=\partial_x b_2-\partial_y b_1$ 的方程为

$$\omega_t + u\cdot\nabla\omega - b\cdot\nabla j = \nu_{21}\partial_{xxx}u_2 - \nu_{11}\partial_{xxy}u_1 + \nu_{22}\partial_{xyy}u_2 - \nu_{12}\partial_{yyy}u_1 \tag{3.6}$$

和

$$\begin{aligned}j_t + u\cdot\nabla j - b\cdot\nabla\omega &= \eta_{21}\partial_{xxx}b_2 - \eta_{11}\partial_{xxy}b_1 + \eta_{22}\partial_{xyy}b_2 - \eta_{12}\partial_{yyy}b_1\\&\quad + 2\partial_x b_1(\partial_x u_2+\partial_y u_1) - 2\partial_x u_1(\partial_x b_2+\partial_y b_1).\end{aligned} \tag{3.7}$$

由 (1.2) 式可知

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \partial_{xxy}u_1\omega dxdy &= \int_\Omega \partial_{xyy}u_2\partial_x u_2 dxdy + \int_\Omega \partial_{xxy}u_1\partial_y u_1 dxdy\\&= \int_\Omega \partial_y(\partial_{xy}u_2\partial_x u_2)dxdy - \|\partial_{xy}u_2\|_0^2 + \int_\Omega \partial_x(\partial_{xy}u_1\partial_y u_1)dxdy - \|\partial_{xy}u_1\|_0^2\\&= -\|\partial_{xy}u_2\|_0^2 - \|\partial_{xy}u_1\|_0^2,\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_{xyy}u_2\omega dxdy &= \int_\Omega \partial_{xyy}u_2\partial_x u_2 dxdy + \int_\Omega \partial_{xxy}u_1\partial_y u_1 dxdy \\
&= -\|\partial_{xy}u_2\|_0^2 - \|\partial_{xy}u_1\|_0^2,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_{xxx}u_2\omega dxdy &= \int_\Omega \partial_{xxx}u_2(\partial_x u_2 - \partial_y u_1) dxdy \\
&= \int_\Omega \partial_x(\partial_{xx}u_2\partial_x u_2)dxdy - \|\partial_{xx}u_2\|_0^2 - \int_\Omega \partial_x(\partial_{xx}u_2\partial_y u_1)dxdy \\
&\quad + \int_\Omega \partial_{xx}u_2\partial_{xy}u_1 dxdy \\
&= -\|\partial_{xx}u_2\|_0^2 + \int_\Omega \partial_x(\partial_x u_2\partial_{xy}u_1)dxdy - \int_\Omega \partial_x u_2\partial_{xxy}u_1 dxdy \\
&= -\|\partial_{xx}u_2\|_0^2 + \int_\Omega \partial_y(\partial_x u_2\partial_{xx}u_1)dxdy + \int_\Omega \partial_{xy}u_2\partial_{xx}u_1 dxdy \\
&= -\|\partial_{xx}u_2\|_0^2 - \|\partial_{xx}u_1\|_0^2,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

以及

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \partial_{yyy}u_1\omega dxdy &= -\int_\Omega \partial_y(\partial_{yy}u_1\partial_x u_2)dxdy + \int_\Omega \partial_{yy}u_1\partial_{xy}u_2 dxdy \\
&\quad + \int_\Omega \partial_y(\partial_{yy}u_1\partial_y u_1)dxdy - \|\partial_{yy}u_1\|_0^2 \\
&= \int -\Omega\partial_y(\partial_y u_1\partial_{xy}u_2)dxdy - \int_\Omega \partial_y u_1\partial_{xyy}u_2 dxdy - \|\partial_{yy}u_1\|_0^2 \\
&= -\int_\Omega \partial_x(\partial_y u_1\partial_{yy}u_2)dxdy + \int \partial_{xy}u_1\partial_{yy}u_2 dxdy - \|\partial_{yy}u_1\|_0^2 \\
&= -\|\partial_{yy}u_1\|_0^2 - \|\partial_{yy}u_2\|_0^2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

同理

$$-\int_\Omega \partial_{xxy}b_1 j dxdy = -\|\partial_{xy}b\|_0^2, \tag{3.12}$$

$$-\int_\Omega \partial_{xyy}b_2 j dxdy = -\|\partial_{xy}b\|_0^2, \tag{3.13}$$

$$\int_\Omega \partial_{xxx}b_2 j dxdy = -\|\partial_{xx}b\|_0^2, \tag{3.14}$$

$$\int_\Omega \partial_{xyy}b_1 j dxdy = -\|\partial_{yy}b\|_0^2. \tag{3.15}$$

因此, 将旋度方程 (3.6) 乘以 ω, 将密度方程 (3.7) 乘以 j, 然后相加, 并在 Ω 上积分, 由 (3.8)–(3.15) 式, 可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\omega,j)\|_0^2 + (\nu_{11}+\nu_{22}+\nu_{21})\|\partial_{xx}u_1\|_0^2 + \nu_{21}\|\partial_{xx}u_2\|_0^2 + \nu_{12}\|\partial_{yy}u_1\|_0^2 \\
&\quad + (\nu_{11}+\nu_{12}+\nu_{22})\|\partial_{yy}u_2\|_0^2 + (\eta_{11}+\eta_{22}+\eta_{21})\|\partial_{xx}b_1\|_0^2 \\
&\quad + \eta_{21}\|\partial_{xx}b_2\|_0^2 + \eta_{12}\|\partial_{yy}b_1\|_0^2 + (\eta_{11}+\eta_{12}+\eta_{22})\|\partial_{yy}b_2\|_0^2 \\
&= \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中

$$\mathrm{I}_1 = 2\int_\Omega \partial_x b_1 \partial_x u_2 j dxdy, \tag{3.17}$$

$$\mathrm{I}_2 = 2\int_\Omega \partial_x b_1 \partial_y u_1 j dxdy, \tag{3.18}$$

$$\mathrm{I}_3 = -2\int_\Omega \partial_x u_1 \partial_x b_2 j dxdy, \tag{3.19}$$

$$\mathrm{I}_4 = -2\int_\Omega \partial_x u_1 \partial_y b_1 j dxdy. \tag{3.20}$$

由 $\operatorname{div} u|_{\partial\Omega} = 0$ 以及 $\partial_x u_2|_{\partial\Omega} = j|_{\partial\Omega} = 0$, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &\le C\|\partial_x b_1\|_0 \|\partial_x u_2\|_0^{1/2} \|\partial_{xy} u_2\|_0^{1/2} \|j\|_0^{1/2} \|\partial_x j\|_0^{1/2} \\
&\le C_\varepsilon \|\partial_x b_1\|_0^2 \|\partial_x u_2\|_0^2 \|j\|_0^2 + \varepsilon \|\partial_{xy} u_2\|_0 \|\partial_x j\|_0 \\
&\le C_\varepsilon \|\partial_x b_1\|_0^2 \|(\omega, j)\|_0^2 + \varepsilon \|(\partial_{xx} u_1, \partial_{xx} b_2, \partial_{yy} b_1)\|_0^2, & (3.21)\\
\mathrm{I}_2 &\le C\|\partial_x b_1\|_0 \|\partial_y u_1\|_0^{1/2} \|\partial_{xy} u_1\|_0^{1/2} \|j\|_0^{1/2} \|\partial_y j\|_0^{1/2} \\
&\le C_\varepsilon \|\partial_x b_1\|_0^2 \|\partial_y u_1\|_0 \|j\|_0 + \varepsilon \|(\partial_{xy} u_1, \partial_y j)\|_0^2 \\
&\le C_\varepsilon \|\partial_x b_1\|_0^2 \|(\omega, j)\|_0^2 + \varepsilon \|(\partial_{xy} u, \partial_{xx} b, \partial_{yy} b)\|_0^2, & (3.22)\\
\mathrm{I}_3 &\le C\|\partial_x u_1\|_0 \|\partial_x b_2\|_0^{1/2} \|\partial_{xx} b_2\|_0^{1/2} \|j\|_0^{1/2} \|\partial_y j\|_0^{1/2} \\
&\le C_\varepsilon \|\partial_x u_1\|_0^2 \|\partial_x b_2\|_0 \|j\|_0 + \varepsilon \|(\partial_{xx} b_2, \partial_y j)\|_0^2 \\
&\le C_\varepsilon \|\partial_x u_1\|_0^2 \|j\|_0^2 + \varepsilon \|(\partial_{xx} b, \partial_{yy} b_1)\|_0^2, & (3.23)\\
\mathrm{I}_4 &\le C\|\partial_x u_1\|_0 \|\partial_y b_1\|_0^{1/2} \|\partial_{xy} b_1\|_0^{1/2} \|j\|_0^{1/2} \|\partial_y j\|_0^{1/2} \\
&\le C_\varepsilon \|\partial_x u_1\|_0^2 \|\partial_y b_1\|_0 \|j\|_0 + \varepsilon \|(\partial_{xy} b_1, \partial_y j)\|_0^2 \\
&\le C_\varepsilon \|\partial_x u_1\|_0^2 \|j\|_0^2 + \varepsilon \|(\partial_{xx} b, \partial_{yy} b)\|_0^2. & (3.24)
\end{aligned}$$

将 (3.21)–(3.24) 式代入 (3.16) 式, 由 Gronwall 不等式知, 在情形 3 下

$$\sup_{0\le t\le T} \|(\omega, j)(t)\|_0^2 + \int_0^T \|(\partial_{xx} u_1, \partial_{yy} u_2, \partial_{xx} b, \partial_{yy} b)(t)\|_0^2 dt \le C. \tag{3.25}$$

(3.6) 和 (3.7) 式分别乘以 $\Delta\omega$ 和 Δj, 然后相加在一起, 并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\nabla\omega, \nabla j)\|_0^2 + \nu_{21}\int_\Omega \partial_{xxx} u_2 \Delta\omega dxdy - \nu_{11}\int_\Omega \partial_{xxy} u_1 \Delta\omega dxdy \\
&\quad + \nu_{22}\int_\Omega \partial_{xyy} u_2 \Delta\omega dxdy - \nu_{12}\int_\Omega \partial_{yyy} u_1 \Delta\omega dxdy + \eta_{21}\int_\Omega \partial_{xxx} b_2 \Delta\omega dxdy \\
&\quad - \eta_{11}\int_\Omega \partial_{xxy} b_1 \Delta\omega dxdy + \eta_{22}\int_\Omega \partial_{xyy} b_2 \Delta\omega dxdy - \eta_{12}\int_\Omega \partial_{yyy} b_1 \Delta\omega dxdy \\
&= \mathrm{J} = \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2 + \mathrm{J}_3 + \mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_6, & (3.26)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_1 = \int_\Omega u\cdot\nabla\omega\Delta\omega dxdy &= \int_\Omega u_1 \partial_x\omega \partial_{xx}\omega dxdy + \int_\Omega u_2 \partial_y\omega \partial_{xx}\omega dxdy \\
&\quad + \int_\Omega u_1 \partial_x\omega \partial_{yy}\omega dxdy + \int_\Omega u_2 \partial_y\omega \partial_{yy}\omega dxdy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_\Omega \partial_x u_1 \partial_x \omega \partial_x \omega dxdy - \int_\Omega \partial_x u_2 \partial_y \omega \partial_x \omega dxdy - \int_\Omega \partial_y u_1 \partial_x \omega \partial_y \omega dxdy \\
&\quad - \int_\Omega \partial_y u_2 \partial_y \omega \partial_y \omega dxdy - \int_\Omega u_1 \partial_x |\partial_x \omega|^2 dxdy - \int_\Omega u_2 \partial_y |\partial_x \omega|^2 dxdy \\
&\quad - \int_\Omega u_1 \partial_x |\partial_y \omega|^2 dxdy - \int_\Omega u_2 \partial_y |\partial_y \omega|^2 dxdy \\
&= -\int \nabla\omega \cdot \nabla u \cdot \nabla \omega dxdy, \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{J}_2 = \int_\Omega u \cdot \nabla j \Delta j dxdy = -\int \nabla j \cdot \nabla u \cdot \nabla j dxdy, \qquad (3.28)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_3 + \mathrm{J}_4 &= -\int_\Omega b \cdot \nabla j \Delta \omega dxdy - \int_\Omega b \cdot \nabla \omega \Delta j dxdy \\
&= \int_\Omega \nabla\omega \cdot \nabla b \cdot \nabla j dxdy + \int_\Omega b \cdot \nabla\nabla j \nabla \omega dxdy \\
&\quad + \int_\Omega \nabla j \cdot \nabla b \cdot \nabla \omega dxdy + \int_\Omega b \cdot \nabla\nabla\omega \nabla j dxdy \\
&= \int_\Omega \nabla\omega \cdot \nabla b \cdot \nabla j dxdy + \int_\Omega \nabla j \cdot \nabla b \cdot \nabla \omega dxdy, \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{J}_5 = -2\int_\Omega \partial_x b_1 (\partial_x u_2 + \partial_y u_1) \Delta j dxdy, \qquad (3.30)
$$

$$
\mathrm{J}_6 = 2\int_\Omega \partial_x u_1 (\partial_x b_2 + \partial_y b_1) \Delta j dxdy. \qquad (3.31)
$$

由边界条件 (1.2) 可知

$$
\begin{cases}
\partial_x^3 u_2 = \partial_x^3 b_2 = 0, \quad \partial_{xyy} u_2 = -\partial_{xxy} u_1 = 0, \quad \partial_{xyy} b_2 = -\partial_{xxy} b_1 = 0, \quad \text{当 } y = 0, 1 \text{ 时}, \\
\partial_{xx} u_1 = -\partial_{xy} u_2 = 0, \quad \partial_{xx} b_1 = -\partial_{xy} b_2 = 0, \quad \partial_{yy} u_1 = \partial_{yy} b_1 = 0, \quad \text{当 } x = 0, 1 \text{ 时}.
\end{cases} \qquad (3.32)
$$

于是, 由 (3.32) 式可知

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_x^3 u_2 \Delta \omega dxdy &= \int_\Omega \partial_x^3 u_2 \partial_x^2 (\partial_x u_2 - \partial_y u_1) dxdy + \int_\Omega \partial_x^3 u_2 \partial_y^2 (\partial_x u_2 - \partial_y u_1) dxdy \\
&= \|\partial_x^3 u_2\|_0^2 - \int_\Omega \partial_x^3 u_2 \partial_{xxy} u_1 dxdy + \int_\Omega \partial_x^3 u_2 \partial_{xyy} u_2 dxdy - \int_\Omega \partial_x^3 u_2 \partial_y^3 u_1 dxdy \\
&= \|\partial_x^3 u_2\|_0^2 + \int_\Omega \partial_y \partial_x^3 u_2 \partial_x^2 u_1 dxdy - \int_\Omega \partial_y \partial_x^3 u_2 \partial_{xy} u_2 dxdy + \int_\Omega \partial_y \partial_x^3 u_2 \partial_y^2 u_1 dxdy \\
&= \|\partial_x^3 u_2\|_0^2 - \int_\Omega \partial_x^4 u_1 \partial_x^2 u_1 dxdy + \int_\Omega \partial_y \partial_x^2 u_2 \partial_{xxy} u_2 dxdy - \int_\Omega \partial_{xxy} u_2 \partial_{xyy} u_1 dxdy \\
&= \|\partial_x^3 u_2\|_0^2 + \|\partial_x^3 u_1\|_0^2 + \|\partial_{xxy} u_2\|_0^2 + \int_\Omega \partial_{xxy} u_2 \partial_y^3 u_2 dxdy \\
&= \|\partial_x^3 u_2\|_0^2 + \|\partial_x^3 u_1\|_0^2 + \|\partial_{xxy} u_2\|_0^2 - \int_\Omega \partial_{xy} u_2 \partial_x \partial_y^3 u_2 dxdy \\
&= \|\partial_x^3 u_2\|_0^2 + \|\partial_x^3 u_1\|_0^2 + \|\partial_{xxy} u_2\|_0^2 + \|\partial_{xyy} u_2\|_0^2, \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \partial_{xxy} u_1 \Delta \omega dxdy &= -\int_\Omega \partial_{xxy} u_1 \partial_x^2 (\partial_x u_2 - \partial_y u_1) dxdy - \int_\Omega \partial_{xxy} u_1 \partial_y^2 (\partial_x u_2 - \partial_y u_1) dxdy \\
&= -\int_\Omega \partial_{xxy} u_1 \partial_x^3 u_2 dxdy + \|\partial_{xxy} u_1\|_0^2 - \int_\Omega \partial_{xxy} u_1 \partial_{xyy} u_2 dxdy + \int_\Omega \partial_{xxy} u_1 \partial_y^3 u_1 dxdy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\partial_{xxx}u_1\|_0^2 + \|\partial_{xxy}u_1\|_0^2 + \|\partial_{xyy}u_2\|_0^2 - \int_\Omega \partial_{xxyy}u_1\partial_y^2 u_1 dxdy \\
&= \|\partial_{xxx}u_1\|_0^2 + \|\partial_{xxy}u_1\|_0^2 + \|\partial_{xyy}u_2\|_0^2 + \|\partial_{xyy}u_1\|_0^2, \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_{xyy}u_2\Delta\omega dxdy &= \int_\Omega \partial_{xyy}u_2\partial_x^3 u_2 dxdy - \int_\Omega \partial_{xyy}u_2\partial_{xxy}u_1 dxdy \\
&\quad + \int_\Omega \partial_{xyy}u_2\partial_{yyx}u_2 dxdy - \int_\Omega \partial_{xyy}u_2\partial_y^3 u_1 dxdy \\
&= -\int_\Omega \partial_{xy}u_2\partial_x^3\partial_y u_2 dxdy + 2\|\partial_{xyy}u_2\|_0^2 + \int_\Omega \partial_{xxy}u_1\partial_y^3 u_1 dxdy \\
&= \|\partial_{xxy}u_2\|_0^2 + 2\|\partial_{xyy}u_2\|_0^2 + \|\partial_{xyy}u_1\|_0^2, \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \partial_y^3 u_1\Delta\omega dxdy &= -\int_\Omega \partial_y^3 u - 1\partial_x^3 u_2 dxdy + \int_\Omega \partial_y^3 u_1\partial_x^2\partial_y u_1 dxdy - \int_\Omega \partial_y^3 u_1\partial_y^2\partial_x u_2 dxdy \\
&\quad + \int_\Omega \partial_y^3 u_1\partial_y^3 u_1 dxdy \\
&= \|\partial_{xyy}u_2\|_0^2 + 2\|\partial_{xyy}u_1\|_0^2 + \|\partial_y^3 u_1\|_0^2. \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

同理

$$
\int_\Omega \partial_x^3 b_2\Delta j dxdy = \|\partial_x^3 b_2\|_0^2 + \|\partial_x^3 b_1\|_0^2 + \|\partial_{xxy}b_2\|_0^2 + \|\partial_{xyy}b_2\|_0^2, \qquad (3.37)
$$

$$
-\int_\Omega \partial_{xxy}b_1\Delta j dxdy = \|\partial_{xxx}b_1\|_0^2 + \|\partial_{xxy}b_1\|_0^2 + \|\partial_{xyy}b_2\|_0^2 + \|\partial_{xyy}b_1\|_0^2, \qquad (3.38)
$$

$$
\int_\Omega \partial_{xyy}b_2\Delta j dxdy = \|\partial_{xxy}b_2\|_0^2 + 2\|\partial_{xyy}b_2\|_0^2 + \|\partial_{xyy}b_1\|_0^2, \qquad (3.39)
$$

$$
-\int_\Omega \partial_y^3 b_1\Delta j dxdy = \|\partial_{xyy}b_2\|_0^2 + 2\|\partial_{xyy}b_1\|_0^2 + \|\partial_y^3 b_1\|_0^2. \qquad (3.40)
$$

又由

$$
\omega_x = \Delta u_2, \quad \omega_y = -\Delta u_1, \quad j_x = \Delta b_2 \quad 和 \quad j_y = -\Delta b_1, \qquad (3.41)
$$

以及 (3.26), (3.33)–(3.40) 式, 可知

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla(\omega,j)\|_0^2 + (\nu_{11}+\nu_{22})\|j_{xy}\|_0^2 + \nu_{12}\|j_{yy}\|_0^2 + \nu_{21}\|j_{xx}\|_0^2 \\
&\quad + (\eta_{11}+\eta_{22})\|j_{xy}\|_0^2 + \eta_{12}\|j_{yy}\|_0^2 + \eta_{21}\|j_{xx}\|_0^2 = \mathrm{J}. \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

因此, 由情形 3 可以推知

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla(\omega,j)\|_0^2 + 2\|\omega_{xy}\|_0^2 + \|(j_{xx},j_{yy})\|_0^2 = \mathrm{J}. \qquad (3.43)
$$

接下来估计 J_1–J_6. 首先

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_1 &= -\int_\Omega \partial_x u_1\omega_x^2 dxdy - \int_\Omega \partial_x u_2\omega_x\omega_y dxdy - \int_\Omega \partial_y u_1\omega_x\omega_y dxdy - \int_\Omega \partial_y u_2\omega_x^2 dxdy \\
&= \mathrm{J}_{11} + \mathrm{J}_{12} + \mathrm{J}_{13} + \mathrm{J}_{14}. \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

由于 $\partial_x u_1|_{\partial\Omega}$ 未知, 于是

$$
\mathrm{J}_{11} = -\int_\Omega \partial_x u_1\omega_x^2 \le \|\omega_x\|_0(\|\partial_x u_1\|_0 + \|\partial_x u_1\|_0^{1/2}\|\partial_{xx}u_1\|_0^{1/2})\|\omega_x\|_0^{1/2}\|\omega_{xy}\|_0^{1/2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^2 + C_\varepsilon\|\omega_x\|_0^2(\|\partial_x u_1\|_0^{4/3} + \|\partial_x u_1\|_0^{2/3}\|\partial_{xx}u_1\|_0^{2/3}) \\
&\leq \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^2 + C_\varepsilon\|\omega_x\|_0^2(\|\partial_x u_1\|_0^2 + \|\partial_{xx}u_1\|_0^2 + 1).
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

根据 $\omega_y|_{x=0,1} = 0$ 知

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{12} = -\int_\Omega \partial_x u_2\omega_x\omega_y dxdy &\leq \|\omega_x\|_0\|\partial_x u_2\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}u_2\|_0^{1/2}\|\omega_y\|_0^{1/2}\|\omega_{xy}\|_0^{1/2} \\
&\leq \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^2 + C_\varepsilon\|\nabla\omega\|_0^2\|\partial_x u_2\|_0^{2/3}\|\partial_{xy}u_2\|_0^{2/3} \\
&\leq \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^2 + C_\varepsilon\|\nabla\omega\|_0^2(\|\partial_{xx}u_1\|_0^2 + 1).
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

又由于 $\omega_x|_{y=0,1} = 0$, 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{13} = -\int_\Omega \partial_y u_1\omega_x\omega_y &\leq \|\partial_y u_1\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}u_1\|_0^{1/2}\|\omega_x\|_0^{1/2}\|\omega_{xy}\|_0^{1/2}\|\omega_y\|_0 \\
&\leq \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^2 + C_\varepsilon\|\nabla\omega\|_0^2\|\partial_y u_1\|_0^{2/3}\|\partial_{xy}u_1\|_0^{2/3} \\
&\leq \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^2 + C_\varepsilon\|\nabla\omega\|_0^2(1 + \|\partial_{yy}u_2\|_2^2).
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

而 $\partial_y u_2|_{\partial\Omega}$ 未知, 那么

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{14} = -\int_\Omega \partial_y u_2\omega_y^2 dxdy &\leq (\|\partial_y u_2\|_0 + \|\partial_y u_2\|_0^{1/2}\|\partial_{yy}u_2\|_0^{1/2})\|\omega_y\|_0^{1/2}\|\omega_{xy}\|_0^{1/2}\|\omega_y\|_0 \\
&\leq \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^2 + C_\varepsilon\|\nabla\omega\|_0^2(1 + \|\partial_{yy}u_2\|_0^2).
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

因此

$$
\mathrm{J}_1 \leq \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^2 + C_\varepsilon(\|\partial_{xy}u_2\|_0^2 + \|\partial_{xx}u_1\|_0^2 + 1)\|\nabla\omega\|_0^2. \tag{3.49}
$$

由 (1.2) 式得

$$
\begin{cases}
j_x = 0, & \text{当 } y = 0,1 \text{ 时}, \\
j_y = 0, & \text{当 } x = 0,1 \text{ 时}.
\end{cases} \tag{3.50}
$$

又由分部积分可知

$$
\|j_{xy}\|_0^2 \leq C\|j_{xx}\|_0^2 + C\|j_{yy}\|_0^2. \tag{3.51}
$$

类似于 J_1 的估计, 由 (3.51) 式得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_2 = -\int_\Omega \nabla j\cdot\nabla u\cdot\nabla j dxdy &\leq \varepsilon\|j_{xy}\|_0^2 + C_\varepsilon(\|\partial_{yy}u_2\|_0^2 + \|\partial_{xx}u_1\|_0^2 + 1)\|\nabla j\|_0^2 \\
&\leq \varepsilon\|(j_{xx}, j_{yy})\|_0^2 + C_\varepsilon(\|\partial_{yy}u_2\|_0^2 + \|\partial_{xx}u_1\|_0^2 + 1)\|\nabla j\|_0^2.
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

另一方面, 直接计算得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_3 + \mathrm{J}_4 = 2\int_\Omega \partial_x b_1\omega_x j_x + 2\int_\Omega \partial_y b_2\omega_y j_y + \int_\Omega \partial_y b_1\omega_y j_x \\
+ \int_\Omega \partial_y b_1\omega_x j_y + \int_\Omega \partial_x b_2\omega_x j_y + \int_\Omega \partial_x b_2\omega_y j_x.
\end{aligned} \tag{3.53}
$$

注意到 $b_2|_{x=0,1}$ 未知, 因此由分部积分以及 $\partial_x b_1 + \partial_y b_2 = 0$, $j_x|_{y=0,1} = \omega_x|_{y=0,1} = 0$ 知

$$
\begin{aligned}
2\int_\Omega \partial_x b_1\omega_x j_x = -2\int_\Omega \partial_y b_2\omega_x j_x &= 2\int_\Omega b_2\omega_{xy}j_x + 2\int_\Omega b_2\omega_x j_{xy} \\
&\leq C(\|b_2\|_0 + \|b_2\|_0^{1/2}\|\partial_x b_2\|_0^{1/2})\|\omega_{xy}\|_0\|j_x\|_0^{1/2}\|j_{xy}\|_0^{1/2} \\
&\quad + C(\|b_2\|_0 + \|b_2\|_0^{1/2}\|\partial_x b_2\|_0^{1/2})\|j_{xy}\|_0\|\omega_x\|_0^{1/2}\|\omega_{xy}\|_0^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$\leq \varepsilon\|(\omega_{xy},j_{xy})\|_0^2+C_\varepsilon(\|b_2\|_0^4+\|b_2\|_0^2\|\partial_x b_2\|_0^2)\|(j_x,\omega_x)\|_0^2$$
$$\leq \varepsilon\|(\omega_{xy},j_{xy})\|_0^2+C_\varepsilon\|j\|_0^2\|(j_x,\omega_x)\|_0^2. \tag{3.54}$$

这里, 我们用到了 Poincaré 不等式, $b_2|_{y=0,1}=0$ 及下面的不等式

$$\|b_2\|_0=\|\,\|b_2\|_{L_y^2}\|_{L_x^2}\leq C\|\,\|\partial_y b_2\|_{L_y^2}\|_{L_x^2}\leq\|\partial_y b_2\|_0. \tag{3.55}$$

注意到 $j_y|_{x=0,1}=\omega_y|_{x=0,1}=0$, 但 $b_1|_{y=0,1}$ 的值未知, 则由分部积分及 $\partial_x b_1+\partial_y b_2=0$, 得

$$\begin{aligned}2\int_\Omega\partial_y b_2\omega_y j_y&=-2\int_\Omega\partial_x b_1\omega_y j_y=2\int_\Omega b_1\omega_{xy}j_y+2\int_\Omega b_1\omega_y j_{xy}\\&\leq C(\|b_1\|_0+\|b_1\|_0^{1/2}\|\partial_y b_1\|_0^{1/2})\|\omega_{xy}\|_0\|j_y\|_0^{1/2}\|j_{xy}\|_0^{1/2}\\&\quad+C(\|b_1\|_0+\|b_1\|_0^{1/2}\|\partial_y b_1\|_0^{1/2})\|j_{xy}\|_0\|\omega_y\|_0^{1/2}\|\omega_{xy}\|_0^{1/2}\\&\leq\varepsilon\|(\omega_{xy},j_{xy})\|_0^2+C_\varepsilon\|j\|_0^2\|(j_x,\omega_x)\|_0^2,\end{aligned} \tag{3.56}$$

其中用到了 Poincaré 不等式, $b_1|_{x=0,1}=0$ 及下面不等式

$$\|b_1\|_0=\|\,\|b_1\|_{L_x^2}\|_{L_y^2}\leq C\|\,\|\partial_x b_1\|_{L_x^2}\|_{L_y^2}\leq\|\partial_x b_1\|_0. \tag{3.57}$$

注意到 $j_x|_{y=0,1}=\omega_y|_{x=0,1}=\omega_x|_{y=0,1}=j_y|_{x=0,1}=0$, 则

$$\begin{aligned}\int_\Omega\partial_y b_1\omega_y j_x dxdx&\leq C\|\partial_y b_1\|_0\|\omega_y\|_0^{1/2}\|\omega_{xy}\|_0^{1/2}\|j_x\|_0^{1/2}\|j_{xy}\|_0^{1/2}\\&\leq\varepsilon\|(\omega_{xy},j_{xy})\|_0^2+C_\varepsilon\|j\|_0^2\|\nabla(\omega,j)\|_0^2,\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega\partial_x b_2\omega_x j_y&\leq C\|\partial_x b_2\|_0\|\omega_x\|_0^{1/2}\|\omega_{xy}\|_0^{1/2}\|j_y\|_0^{1/2}\|j_{xy}\|_0^{1/2}\\&\leq\varepsilon\|(\omega_{xy},j_{xy})\|_0^2+C_\varepsilon\|j\|_0^2\|\nabla(\omega,j)\|_0^2.\end{aligned} \tag{3.59}$$

同理

$$\int_\Omega\partial_y b_1\omega_x j_y+\int_\Omega\partial_x b_2\omega_y j_x\leq\varepsilon\|(\omega_{xy},j_{xy})\|_0^2+C_\varepsilon\|j\|_0^2\|\nabla(\omega,j)\|_0^2. \tag{3.60}$$

将 (3.54) 和 (3.60) 式代入 (3.53), 得

$$\mathrm{J}_3+\mathrm{J}_4\leq\varepsilon\|(\omega_{xy},j_{xy})\|_0^2+C_\varepsilon\|j\|_0^2\|\nabla(\omega,j)\|_0^2. \tag{3.61}$$

接下来估计 J_5 和 J_6.

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_5&=-2\int_\Omega\partial_x b_1\omega\Delta j dxdy\\&=2\int_\Omega\omega\nabla\partial_x b_1\cdot\nabla j dxdy+2\int_\Omega\partial_x b_1\nabla\partial_x u_2\cdot\nabla j dxdy+2\int_\Omega\partial_x b_1\nabla\partial_y u_1\cdot\nabla j dxdy\\&\leq\|\omega\|_0^{1/2}\|\partial_x\omega\|_0^{1/2}(\|\nabla\partial_x b_1\|_0+\|\nabla\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|\nabla\partial_{xy}b_1\|_0^{1/2})\|\nabla j\|_0\\&\quad+(\|\partial_x b_1\|_0+\|\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|\partial_{xx}b_1\|_0^{1/2})(\|\nabla\partial_x u_2\|_0+\|\nabla\partial_x u_2\|_0^{1/2}\|\nabla\partial_{xy}u_2\|_0^{1/2})\|\nabla j\|_0\\&\quad+(\|\partial_x b_1\|_0+\|\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}b_1\|_0^{1/2})(\|\nabla\partial_y u_1\|_0+\|\nabla\partial_y u_1\|_0^{1/2}\|\nabla\partial_{xy}u_1\|_0^{1/2})\|\nabla j\|_0\\&\leq\|\omega\|_0^{1/2}\|\omega_x\|_0^{1/2}\|b_{xy}\|_0\|\nabla j\|_0+\|\omega\|_0^{1/2}\|\omega_x\|_0^{1/2}\|\nabla\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|j_{xy}\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0\\&\quad+\|\partial_x b_1\|_0\|\nabla\omega\|_0\|\nabla j\|_0+\|\partial_x b_1\|_0\|\nabla^2 u_2\|_0^{1/2}\|\nabla\partial_{xy}u_2\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0\\&\quad+\|\nabla\omega\|_0\|\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|\partial_x\nabla b_1\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0\\&\quad+\|\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|\partial_x\nabla b_1\|_0^{1/2}\|\nabla\omega\|_0^{1/2}\|\nabla\partial_{xy}u_2\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0.\end{aligned} \tag{3.62}$$

直接计算可知

$$
\begin{aligned}
&\|\omega\|_2^{1/2}\|\nabla\omega\|_2^{1/2}\|b_{xy}\|_0\|\nabla j\|_0 \lesssim 1+(1+\|b_{xy}\|_0^2)(\|\nabla j\|_0^2+\|\nabla\omega\|_0^2), && (3.63)\\
&\|\partial_x b_1\|_0\|\nabla\omega\|_0\|\nabla j\|_0^2 \lesssim (1+\|\partial_x b_1\|_0^2)(\|\nabla\omega\|_0^2+\|\nabla j\|_0^2), && (3.64)\\
&\|\nabla\omega\|_0\|\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|\partial_x\nabla b_1\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0 \lesssim (1+\|j_x\|_0^2)(\|\nabla\omega\|_0^2+\|\nabla j\|_0^2), && (3.65)\\
&\|\partial_x b_1\|_0\|\nabla^2 u_2\|_0^{1/2}\|\nabla\partial_{xy}u_2\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0^2 \lesssim \|\nabla\omega\|_0^{1/2}\|\omega_{xy}\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0\\
&\quad\lesssim \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^2+C_\varepsilon\|\nabla\omega\|_0^{2/3}\|\nabla j\|_0^{4/3} \lesssim \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^2+C_\varepsilon\|\nabla(\omega,j)\|_0^2, && (3.66)\\
&\|\omega\|_0^{1/2}\|\omega_x\|_0^{1/2}\|\nabla\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|j_{xy}\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0 \lesssim \|\nabla j\|_0^{3/2}\|\nabla\omega\|_2^{1/2}\|j_{xy}\|_0^{1/2}\\
&\quad\lesssim \varepsilon\|j_{xy}\|_0^2+C_\varepsilon\|\nabla j\|_0^2\|\nabla\omega\|_0^{2/3} \lesssim \varepsilon\|j_{xy}\|_0^2+C_\varepsilon(1+\|\nabla j\|_0^2)\|\nabla(\omega,j)\|_0^2, && (3.67)\\
&\|\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|\partial_x\nabla b_1\|_0^{1/2}\|\nabla\omega\|_0^{1/2}\|\nabla\partial_{xy}\omega\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0\\
&\quad\lesssim \|\nabla j\|_0^{3/2}\|\nabla\omega\|_0^{1/2}\|\omega_{xy}\|_2^{1/2} \lesssim \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^{3/2}+C_\varepsilon\|\nabla j\|_0^2\|\nabla\omega\|_0^{2/3}\\
&\quad\lesssim \varepsilon\|\omega_{xy}\|_0^2+C_\varepsilon(1+\|\nabla j\|_0^2)(1+\|\nabla(j,\omega)\|_0^2). && (3.68)
\end{aligned}
$$

因此, 将 (3.63) 和 (3.68) 代入 (3.62) 可知

$$
\mathrm{J}_5 \le C_\varepsilon\big[\big(1+\|(\partial_{xy}b,\partial_x b_1)\|_0^2\big)\|\nabla(\omega,j)\|_0^2+\|\nabla\omega\|_0^2\|\nabla j\|_0^2\big]+\varepsilon\|(w_{xy},j_{xy})\|_0^2. \tag{3.69}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_6 &= -2\int_\Omega \nabla\partial_x u_1(\partial_x b_2+\partial_y b_1)\nabla j dxdy-2\int_\Omega \partial_x u_1\partial_x\nabla b_2\nabla j dxdy\\
&\quad -2\int_\Omega \partial_x u_1\partial_y\nabla b_1\nabla j dxdy\\
&\le \|\nabla\omega\|_0^{1/2}(\|\partial_x^3 u_1\|_0^{1/2}+\|\partial_{xyy}u_1\|_0^{1/2})\|j\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0\\
&\quad +(\|\omega\|_0+\|\omega\|_0^{1/2}\|\nabla\omega\|_0^{1/2})(\|\nabla j\|_0+\|\nabla j\|_0^{1/2}\|\nabla^2 j\|_0^{1/2})\|\nabla j\|_0\\
&\le C(1+\|(j,\nabla j)\|_0^2)\|\nabla(j,\omega)\|_0^2+C\|\nabla j\|_0^{1/2}\|\nabla^2 j\|_0^{1/2}\|\nabla j\|_0\\
&\le C_\varepsilon(1+\|(j,\nabla j)\|_0^2)\|\nabla(j,\omega)\|_0^2+\varepsilon\|\nabla^2 j\|_0^2.
\end{aligned} \tag{3.70}
$$

因此, 由 Gronwall 不等式得

$$
\sup_{0\le t\le T}\|\nabla(\omega,j)(t)\|_0^2+\int_0^T\|(\omega_{xy},j_{xy})(t)\|_0^2dt \le C. \tag{3.71}
$$

由 (3.5), (3.25) 和 (3.71) 式便可知 $\|u(\cdot,t),b(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}$ 是一致有界的. 在情形 3 下, 又由命题 2.2 可知初边值问题 (1.1) 和 (1.2) 的古典解是整体存在的.

情形 4–8 下的全局正则性　正如我们在本小节开头提到的, 磁流体方程 (1.1) 和 (1.2) 在情形 4–8 下比在情形 3 下具有更多的良好信息和估计. 借助于在情形 3 中建立的估计, 我们可以很容易地获得在情形 4–8 下方程的全局适定性, 这里我们就不再证明.

3.2　情形 9–19 下定理 1.1 的证明

本节将讨论在情形 9–19 下磁流体方程 (1.1) 和 (1.2) 的全局适定性. 其方法与第 3.1 小节类似, 但值得注意的是, 在情形 9 下的磁流体方程 (1.1) 和 (1.2) 蕴含的有用信息比在情形 10–13 中的还少. 因此, 我们将首先考虑情形 9 的情况.

情形 9 下的全局正则性 对情形 9 而言, 由 (3.5) 式可知

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u,b)\|_0^2+\|\partial_y u_1\|_0^2+\|\partial_x u_2\|_0^2+2\|\partial_x b_1\|_0^2=0, \tag{3.72}$$

于是

$$\sup_{0\le t\le T}\|(u,b)(t)\|_0^2+\int_0^T\|(\partial_y u_1,\partial_x u_2,\partial_x b_1)(t)\|_0^2dt\le C. \tag{3.73}$$

又根据 (3.16) 式知

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\omega,j)\|_0^2+\|\Delta u\|_0^2+2\|\partial_{xx}b_1\|_0^2+2\|\partial_{yy}b_2\|_0^2=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4. \tag{3.74}$$

接下来我们估计 I_1–I_4.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1&=2\int_\Omega\partial_x b_1\partial_x u_2 j dxdy\\&\le C(\|\partial_x b_1\|_0+\|\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}b_1\|_0^{1/2})\|\partial_x u_2\|_0^{1/2}\|\partial_{xx}u_2\|_0^{1/2}\|j\|_0\\&\le\varepsilon\|(\partial_{xx}u_2,\partial_x u_2)\|_0^2+C_\varepsilon\|\partial_x b_1\|_0^2\|j\|_0^2+\varepsilon\|(\partial_{xy}b_1,\partial_{xx}u_2)\|_0^2\\&\quad+C_\varepsilon\|(\partial_x b_1,\partial_x u_2)\|_0^2\|j\|_0,\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_2&=2\int_\Omega\partial_x b_1\partial_y u_1 j dxdy\\&\le C(\|\partial_x b_1\|_0+\|\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}b_1\|_0^{1/2})\|\partial_y u_1\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}u_1\|_0^{1/2}\|j\|_0\\&\le\varepsilon\|(\partial_{xy}u_1,\partial_y u_1)\|_0^2+C_\varepsilon\|\partial_x b_1\|_0^2\|j\|_0^2+\varepsilon\|(\partial_{xy}b_1,\partial_{xy}u_1)\|_0^2\\&\quad+C_\varepsilon\|(\partial_x b_1,\partial_y u_1)\|_0^2\|j\|_0^2.\end{aligned} \tag{3.76}$$

又由分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3&=-2\int_\Omega\partial_x u_1\partial_x b_2 j dxdy=-2\int_\Omega\partial_x u_1\partial_x b_2(\partial_x b_2-\partial_y b_1)dxdy\\&=2\int_\Omega(\partial_y u_2(\partial_x b_2)^2-\partial_y u_2\partial_x b_2\partial_y b_1)dxdy\\&=-4\int_\Omega u_2\partial_{xy}b_2\partial_x b_2 dxdy+2\int_\Omega\partial_{xy}u_2 b_2\partial_y b_1 dxdy+2\int_\Omega\partial_y u_2 b_2\partial_{xy}b_1 dxdy\\&=\mathrm{I}_{31}+\mathrm{I}_{32}+\mathrm{I}_{33},\end{aligned} \tag{3.77}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{31}&=-4\int_\Omega u_2\partial_{xy}b_2\partial_x b_2 dxdy\\&\le C(\|u_2\|_0+\|u_2\|_0^{1/2}\|\partial_x u_2\|_0^{1/2})\|\partial_x b_2\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}b_2\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}b_2\|_0\\&\le\varepsilon\|\partial_{xy}b_2\|_0^2+C_\varepsilon(1+\|\partial_x u_2\|_0^2)\|j\|_0^2,\end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{32}&=2\int_\Omega\partial_{xy}u_2 b_2\partial_y b_1 dxdy\le C\|\partial_{xy}u_2\|_0\|b_2\|_0^{1/2}\|\partial_y b_2\|_0^{1/2}\|\partial_y b_1\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}b_1\|_0^{1/2}\\&\le\varepsilon\|(\partial_{xy}u_2,\partial_{xy}b_1)\|_0^2+C_\varepsilon\|b_2\|_0^2\|\partial_y b_2\|_0^2\|\partial_y b_1\|_0^2\\&\le\varepsilon\|(\partial_{xy}u_2,\partial_{xy}b_1)\|_0^2+C_\varepsilon\|b_2\|_0^2\|\partial_x b_1\|_0^2\|j\|_0^2,\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{33}&=2\int_\Omega\partial_y u_2 b_2\partial_{xy}b_1 dxdy\\&\le C(\|\partial_y u_2\|_0+\|\partial_y u_2\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}u_2\|_0^{1/2})\|b_2\|_0^{1/2}\|\partial_y b_2\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}b_1\|_0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \varepsilon\|\partial_{xy}b_1\|_0^2 + C_\varepsilon\|\partial_y u_2\|_0^2\|\partial_y b_2\|_0 + \varepsilon\|\partial_{xy}u_2\|_0^2 + C_\varepsilon\|b_2\|_0^2\|\partial_y u_2\|_0^2\|\partial_y b_2\|_0^2 \\
&\le \varepsilon\|(\partial_{xx}u_1, \partial_{yy}b_2)\|_0^2 + C_\varepsilon(\|\partial_x b_1\|_0^2\|\omega\|_0^2 + \|\partial_y u_2\|_0^2\|j\|_0^2). \qquad (3.80)
\end{aligned}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_4 &= -2\int_\Omega \partial_x u_1\partial_y b_1 j dxdy = -2\int_\Omega \partial_x u_1\partial_y b_1(\partial_x b_2 - \partial_u b_1)dxdy \\
&= 2\int_\Omega \partial_y u_2\partial_y b_1\partial_x b_2 + \partial_x u_1(\partial_y b_1)^2 \\
&= -2\int_\Omega \partial_{yy}u_2 b_1\partial_x b_2 - 2\int_\Omega \partial_y u_2 b_1\partial_{xy}b_2 - 4\int_\Omega u_1\partial_y b_1\partial_{xy}b_1 \\
&\le C\|\partial_{yy}u_2\|_0\|b_1\|_0^{1/2}\|\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|\partial_x b_2\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}b_2\|_0^{1/2} \\
&\quad + C(\|\partial_y u_2\|_0 + \|\partial_y u_2\|_0^{1/2}\|\partial_{yy}u_2^{1/2})\|b_1\|_0^{1/2}\|\partial_x b_1\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}b_2\|_0 \\
&\quad + C(\|u_1\|_0 + \|u_1\|_0^{1/2}\|\partial_y u_1\|_0^{1/2})\|\partial_y b_1\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}b_1\|_0^{1/2}\|\partial_{xy}b_1\|_0 \\
&\le \varepsilon\|(\partial_{yy}u_2, \partial_{yy}b_2)\|_0^2 + C_\varepsilon\|b_1\|_0^2\|\partial_x b_1\|_0^2\|\partial_x b_2\|_0^2 + C_\varepsilon\|\partial_y u_2\|_0^2\|b\|_0\|\partial_x b_1\|_0 \\
&\quad + C_\varepsilon\|b_1\|_0^2\|\partial_x b_1\|_0^2\|\partial_y u_2\|_0^2 + \varepsilon\|\partial_{xy}b_1\|_0^2 + C_\varepsilon(1 + \|\partial_y u_1\|_0^2)\|\partial_y b_1\|_0^2 \\
&\le \varepsilon\|(\partial_{yy}u_2, \partial_{xx}b_1, \partial_{yy}b_2)\|_0^2 + C_\varepsilon\|(\partial_x b_1, \partial_y u_2)\|_0^2\|(\omega, j)\|_0^2. \qquad (3.81)
\end{aligned}
$$

于是, 由 Gronwall 不等式得

$$
\sup_{0\le t\le T}\|(\omega, j)(t)\|_0^2 + \int_0^T \|(\Delta u, \partial_{xx}b_1, \partial_{yy}b_2)(t)\|_0^2 dt \le C. \qquad (3.82)
$$

又由 (3.42) 式可知

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla(\omega, j)\|_0^2 + \|\omega_{yy}\|_0^2 + \|\omega_{xx}\|_0^2 + 2\|j_{xy}\|_0^2 = \mathrm{J}. \qquad (3.83)
$$

将 (3.49), $(3.52)_2$, (3.53), (3.69) 和 (3.70) 代入上式, 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla(\omega, j)\|_0^2 + \|\omega_{yy}\|_0^2 + \|\omega_{xx}\|_0^2 + 2\|j_{xy}\|_0^2 \le \varepsilon\|(\omega_{xy}, j_{xy})\|_0^2 \\
&\quad + C_\varepsilon(\|(\partial_{xy}u_2, \partial_{xx}u_1, \partial_{yy}u_2, \partial_x b_1, \partial_{xy}b, \nabla\omega, \partial_x u_1)\|_0^2 + 1)(1 + \|\nabla(\omega, j)\|_0^2). \qquad (3.84)
\end{aligned}
$$

注意到 $\omega_x|_{y=0,1} = 0$, $\omega_y|_{x=0,1} = 0$, 则

$$
\|\omega_{xy}\|_0^2 = \int_\Omega \omega_{xx}\omega_{yy}dxdy \le \|\omega_{yy}\|_0^2 + \|\omega_{xx}\|_0^2. \qquad (3.85)
$$

因此, 由 Gronwall 不等式得

$$
\sup_{0\le t\le T}\|\nabla(\omega, j)(t)\|_0^2 + \int_0^T \|(\omega_{yy}, \omega_{xx}, j_{xy})(t)\|_0^2 dt \le C. \qquad (3.86)
$$

由 (3.72), (3.82) 和 (3.86) 式可得 $\|u(\cdot,t), b(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}$ 是一致有界的. 又根据命题 2.2 可知, 在情形 9 下, 初边值问题 (1.1) 和 (1.2) 的解是全局适定的.

情形 10–13 下的全局正则性 类似于在情形 4–7 下的全局正则性, 这里我们就不再证明.

情形 14–19 下的全局正则性 情形 14–19 的全局正则性的证明与情形 1 和情形 2 的证明类似, 具体可参考文 [3, 8]. 通过观察情形 17–19 与情形 14–16 可知它们是分别对称的, 而且由完全耗散和磁扩散的能量估计可知情形 14–16 的能量估计是完全一样的, 于是在情形 14–19 下系统的全局适定性便可以得到.

综合以上情况可知, 磁流体方程 (1.1) 和 (1.2) 的强解在情形 3–19 下是全局存在且唯一的. 因此, 我们便完成了定理 1.1 的证明.

致谢 非常感谢匿名审稿人给出的有价值的审稿意见,同时也十分感谢潍坊学院李梅霞教授给予的指导意见.

参 考 文 献

[1] Abidi H., Paicu M., Global existence for the magnetohydrodynamic system in critical spaces, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A.*, 2008, **148**: 447–476.

[2] Bardos C., Sulem C., Sulem P. L., Longtime dynamics of a conductive fluid in the presence of a strong magnetic field, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1988, **305**: 175–191.

[3] Cao C. S., Wu J. H., Global regularity for the 2D MHD equations with mixed partial dissipation and magnetic diffusion, *Adv. Math.*, 2011, **226**(2): 1803–1822.

[4] Chandrasekhar S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon, Oxford, 1961.

[5] Chen Q., Tan Z., Wang Y., Strong solutions to the incompressible magnetohydrodynamic equations, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2011, **34**: 94–107.

[6] Desjardins B., Le Bris C., Remarks on a nonhomogeneous model of magnetohydrodynamics, *Differential Integral Equations*, 1998, **11**: 377–394.

[7] Duvaut G., Lions J. L., Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1972, **46**: 241–279.

[8] Du L. L., Zhou D. Q., Global well-posedness of two-dimensional magnetohydrodynamic flows with partial dissipation and magnetic diffusion, *SIAM J. Math. Anal.*, 2015, **47**(2): 1562–1589.

[9] Gerbeau J. F., Le Bris C., Existence of solution for a density-dependent magnetohydrodynamic equation, *Adv. Differential Equations*, 1997, **2**: 427–452.

[10] Huang X., Wang Y., Global strong solution to the 2D nonhomogeneous incompressible MHD system, *J. Differential Equations*, 2013, **254**: 511–527.

[11] Ladyzhenskaya O. A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Silverman Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1963.

[12] Lei Z., On axially symmetric incompressible magnetohydrodynamics in three dimensions, *J. Differential Equations*, 2015, **259**: 3202–3215.

[13] Li X. L., Wang D. H., Global strong solution to the three-dimensional density-dependent incompressible magnetohydrodynamic flows, *J. Differential Equations*, 2011, **251**: 1580–1615.

[14] Lin F. H., Xu L., Zhang P., Global small solutions to 2-D incompressible MHD system, *J. Differential Equations*, 2015, **259**: 5440–5485.

[15] Ren X. X., Wu J. H., Xiang Z. Y., et al., Global existence and decay of smooth solution for the 2-D MHD equations without magnetic diffusion, *J. Funct. Anal.*, 2014, **267**(2): 503–541.

[16] Sermange M., Temam R., Some mathematical questions related to the MHD equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, 1983, **36**: 635–64.

[17] Temam R., Navier–Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, AMS, Providence, R. I., 2001.

[18] Xu L., Zhang P., Global small solutions to three-dimensional incompressible magnetohydrodynamical system, *SIAM J. Math. Anal.*, 2015, **47**: 26–65.

[19] Yu H. B., Global regularity to the 2D incompressible MHD with mixed partial dissipation and magnetic diffusion in a bounded domain, *Acta Math. Sci. Ser. B, Engl. Ed.*, 2017, **37**(2): 395–404.