

文章编号: 0583-1431(2021)01-0077-10

文献标识码: A

# 涉及导数与差分的亚纯函数的小函数的收敛指数与级

王品玲

上海立信会计金融学院统计与数学学院 上海 201620

E-mail: wangpinling@lixin.edu.cn

杨世伟 方明亮

华南农业大学应用数学研究所 广州 510642

E-mail: yangseawell@foxmail.com; mlfang@scau.edu.cn

**摘 要** 设  $f(z)$  是一个复平面上的亚纯函数,  $c$  是一个非零有穷复数,  $a(z)$  是  $f(z)$  的一个小函数, 本文研究  $f(z) - a(z)$ ,  $f(z + c) - a(z)$  及  $\Delta_c^n f(z) - a(z)$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) 的零点收敛指数与  $f(z)$  的级之间的关系. 由此改进了涉及导数与差分的亚纯函数值分布的一些相关结果.

**关键词** 亚纯函数; 导数; 差分; 值分布

**MR(2010) 主题分类** 30D35

**中图分类号** O174.52

## The Exponents and Order of Convergence of Small Functions of Meromorphic Functions Concerning Derivatives and Differences

Pin Ling WANG

*School of Statistics and Mathematics,*

*Shanghai Lixin University of Accounting and Finance, Shanghai 210620, P. R. China*

*E-mail: wangpinling@lixin.edu.cn*

Shi Wei YANG Ming Liang FANG

*Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University,*

*Guangzhou 510642, P. R. China*

*E-mail: yangseawell@foxmail.com; mlfang@scau.edu.cn*

**Abstract** Let  $f(z)$  be a meromorphic function in the complex plane, let  $c$  be a nonzero finite complex number, and let  $a(z)$  be a small function with respect to  $f(z)$ . It is studied that the relationship between the exponent of convergence of zeros of  $f(z) - a(z)$ ,  $f(z + c) - a(z)$ , and  $\Delta_c^n f(z) - a(z)$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) and the order of  $f(z)$ . This improves

收稿日期: 2019-11-24; 接受日期: 2020-03-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11701188, 11901119)

some results in value distribution of meromorphic functions concerning derivatives and differences.

**Keywords** meromorphic functions; derivatives; differences; value distribution

**MR(2010) Subject Classification** 30D35

**Chinese Library Classification** O174.52

## 1 引言及主要结果

本文中亚纯函数均指整个复平面上的亚纯函数. 以下将使用值分布论中的标准记号  $T(r, f)$ ,  $m(r, f)$ ,  $N(r, f)$ ,  $\overline{N}(r, f)$ ,  $S(r, f)$  (见文 [10, 13, 15]), 其中  $S(r, f)$  表示任一满足以下条件的函数  $S(r, f) = o\{T(r, f)\}$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,  $r \notin E$ , 涉及导数时,  $E$  是一个线性测度有穷的  $r$  值集; 涉及差分,  $E$  是一个对数测度有穷的  $r$  值集.

设  $a(z)$  是复平面上的亚纯函数 (可以恒为  $\infty$ ), 若  $a(z)$  满足  $T(r, a) = S(r, f)$ , 则称  $a(z)$  是  $f(z)$  的小函数. 本文分别用  $\sigma(f(z))$  及  $\lambda(f(z) - a(z))$  表示  $f(z)$  的级及  $f(z) - a(z)$  的零点收敛指数, 分别定义为

$$\sigma(f(z)) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ T(r, f)}{\log r}, \quad \lambda(f(z) - a(z)) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ N(r, \frac{1}{f(z) - a(z)})}{\log r}.$$

$\tau(f(z))$  表示  $f(z)$  不动点的收敛指数, 定义为

$$\tau(f(z)) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ N(r, \frac{1}{f(z) - z})}{\log r}.$$

于是有  $\tau(f(z)) = \lambda(f(z) - z)$ .

设  $f$  是一个复平面上非常数亚纯函数,  $a$  是任一复数.  $f$  取  $a$  值的 Nevanlinna 亏量与精简亏量分别为

$$\delta(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, \frac{1}{f-a})}{T(r, f)} = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, \frac{1}{f-a})}{T(r, f)}, \quad \Theta(a, f) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, \frac{1}{f-a})}{T(r, f)}.$$

设  $f$  是一个复平面上非常数亚纯函数,  $c$  是一个非零无穷复数. 定义  $f(z)$  的差分为  $\Delta_c f(z) = f(z+c) - f(z)$ ,  $n$  阶差分为  $\Delta_c^n f(z) = \Delta_c(\Delta_c^{n-1} f(z))$ .

近年来, 许多学者使用 Nevanlinna 理论对亚纯函数涉及导数与差分的值分布进行研究, 并取得了许多有意义的结果, 如文 [1-9, 11, 12, 14, 16-18]. 2008 年, Chen 和 Shon<sup>[4]</sup> 指出存在一个复平面的亚纯函数  $f_0(z)$ , 使得  $\sigma(f_0(z)) < 1$ , 且  $\Delta_c(f_0(z))$  只有有限个不动点. 2013 年, Chen<sup>[2]</sup> 研究了  $f(z)$ ,  $f(z+c)$  与  $\Delta_c f(z)$  的不动点与级之间的关系, 证明了

**定理 A** 设  $f$  是一个复平面上满足  $\lambda(\frac{1}{f(z)}) < \sigma(f(z))$  的有穷级亚纯函数,  $c$  是一个非零无穷复数且满足  $f(z+c) \not\equiv f(z)+c$ , 则有

$$\begin{aligned} \max\{\tau(f(z)), \tau(\Delta_c f(z))\} &= \sigma(f(z)), \\ \max\{\tau(f(z)), \tau(f(z+c))\} &= \sigma(f(z)), \\ \max\{\tau(\Delta_c f(z)), \tau(f(z+c))\} &= \sigma(f(z)). \end{aligned}$$

**定理 B** 设  $f$  是一个复平面上满足  $\lambda(\frac{1}{f(z)}) < \sigma(f(z))$  的有穷级亚纯函数,  $c$  是一个非零无穷复数且满足  $f(z+c) \not\equiv f(z)$ . 若  $f$  有一个 Borel 例外值  $b \in \mathbb{C}$ , 则有

$$\tau(f(z)) = \tau(f(z+c)) = \tau(\Delta_c f(z)) = \sigma(f(z)).$$

**定理 C** 设  $f$  是一个复平面上满足  $\lambda(\frac{1}{f(z)}) < \sigma(f(z))$  的有穷级亚纯函数,  $c$  是一个非零有穷复数且满足  $f(z+c) \neq f(z)$ . 若  $f$  除去至多有穷个零点外, 零点的重级均  $\geq 2$ , 则有

$$\tau(f(z)) = \tau(f(z+c)) = \sigma(f(z)).$$

2016 年, Zhang 和 Chen<sup>[17]</sup> 给出了例子说明定理 A 和定理 B 中的条件  $\lambda(\frac{1}{f(z)}) < \sigma(f(z))$  是不能去掉的, 并将此条件改为  $\lambda(f(z)-a) < \sigma(f(z))$ , 定理 A 仍然成立. 最近, Lan 和 Chen<sup>[12]</sup> 推广了以上结果, 证明了

**定理 D** 设  $f$  是一个复平面上满足  $\delta(\infty, f) > \frac{1}{2}$  的有穷级亚纯函数,  $c$  是一个非零有穷复数且满足  $\Delta_c(f(z)-z) \neq 0$ , 则有

$$\max\{\tau(f(z)), \tau(\Delta_c f(z))\} = \sigma(f(z)), \quad \max\{\tau(f(z+c)), \tau(\Delta_c f(z))\} = \sigma(f(z)).$$

**定理 E** 设  $f$  是一个复平面上满足  $\overline{N}(r, f) = S(r, f)$  的有穷级亚纯函数,  $n \geq 2$  是一个正整数,  $c$  是一个非零有穷复数且满足  $\Delta_c^n(f(z)-z) \neq 0$ , 则有

$$\max\{\tau(f(z)), \tau(\Delta_c^n f(z))\} = \sigma(f(z)), \quad \max\{\tau(f(z+c)), \tau(\Delta_c^n f(z))\} = \sigma(f(z)).$$

**定理 F** 设  $f$  是一个有穷级超越亚纯函数,  $c$  是一个非零有穷复数,  $a$  是一个扩充复平面上的复数且满足  $\delta(a, f) > 0$  或  $\overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) = S(r, f)$ , 则有

$$\max\{\tau(f(z)), \tau(f(z+c))\} = \sigma(f(z)).$$

**定理 G** 设  $f$  是一个有穷级超越亚纯函数, 且除去至多有限个零点及极点外,  $f$  的零点及极点的重级均  $\geq 2$ . 若  $f$  只有有限个不动点, 则有  $\delta(\infty, f) = 0$ , 且有

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = N(r, f) + O(\log r), \quad \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(\log r).$$

文 [12] 指出定理 F 中将不动点  $z$  换为  $f$  的一个非零小函数, 结论仍成立, 定理 G 中将不动点  $z$  换为非零有理函数结论仍成立. 本文研究将上述结果中的不动点都换为  $f$  的非零小函数, 推广并改进了上述结果, 证明了

**定理 1** 设  $f$  是一个复平面上满足  $\Theta(\infty, f) > \frac{n}{n+1}$  的有穷级亚纯函数, 其中  $n$  是一个正整数,  $c$  是一个非零有穷复数,  $a(z) (\neq 0, \infty)$  是  $f(z)$  的一个小函数满足  $\Delta_c^n a(z) \neq a(z)$ ,  $\Delta_c^n a(z-c) \neq a(z)$ , 且  $a(z)$  仍是  $\Delta_c^n f(z)$  的一个小函数, 则有

$$\begin{aligned} \max\{\lambda(f(z)-a(z)), \lambda(\Delta_c^n f(z)-a(z))\} &= \sigma(f(z)), \\ \max\{\lambda(f(z)-a(z-c)), \lambda(\Delta_c^n f(z)-a(z))\} &= \sigma(f(z)). \end{aligned}$$

**注 1.1** 若  $\Delta_c^n a(z) \equiv a(z)$ , 定理 1 不再成立.

**例 1** 设  $f(z) = e^{z^2} + e^z$ ,  $c$  是一个非零有穷复数满足  $e^c = 2$ ,  $a(z) = e^z$ , 则  $a(z)$  是  $f$  的一个小函数, 且  $\Delta_c a(z) = a(z+c) - a(z) = e^{z+c} - e^z = e^z \equiv a(z)$ . 显然我们有

$$\lambda(f(z)-a(z)) = \lambda(e^{z^2}) = 0, \quad \lambda(\Delta_c f(z)-a(z)) = \lambda(e^{2cz+c^2} - 1) = 1,$$

而  $\sigma(f(z)) = 2$ , 于是有

$$\max\{\lambda(f(z)-a(z)), \lambda(\Delta_c f(z)-a(z))\} \neq \sigma(f(z)).$$

显然,  $a(z)$  是  $\Delta_c f(z)$  的一个非零小函数, 所以定理 1 中的条件  $\Delta_c^n a(z) \neq a(z)$  是不能去掉的.

**例 2** 设  $n \geq 2$  是一个正整数,  $c$  是一个非零有穷复数满足  $(e^c - 1)^n = e^c$ . 取  $f(z) = e^{z^2} + e^{z-c}$ ,  $a(z) = e^z$ , 则有  $\Delta_c^n a(z-c) - a(z) \equiv 0$ , 且

$$\begin{aligned}\Delta_c^n f(z) &= \Delta_c^n (e^{z^2}) + \Delta_c^n (e^{z-c}) \\ &= e^{z^2} [e^{2ncz+n^2c^2} - C_n^1 e^{2(n-1)cz+(n-1)^2c^2} + \cdots + (-1)^n] + \frac{1}{e^c} \Delta_c^n e^z \\ &= e^{z^2} [e^{n^2c^2} (e^{2cz})^n - C_n^1 e^{(n-1)^2c^2} (e^{2cz})^{n-1} + \cdots + (-1)^n] + e^z.\end{aligned}$$

于是有

$$\lambda(\Delta_c^n f(z) - a(z)) = \lambda(e^{n^2c^2} (e^{2cz})^n - C_n^1 e^{(n-1)^2c^2} (e^{2cz})^{n-1} + \cdots + (-1)^n) = 1,$$

而  $\lambda(f(z) - a(z-c)) = \lambda(e^{z^2}) = 0$ ,  $\sigma(f(z)) = 2$ , 于是有

$$\max\{\lambda(f(z) - a(z-c)), \lambda(\Delta_c^n f(z) - a(z))\} \neq \sigma(f(z)).$$

此例说明: 当  $n \geq 2$  时, 定理 1 中的条件  $\Delta_c^n a(z-c) \neq a(z)$  是不能去掉的. 当  $n = 1$  时, 由于  $a(z) \neq 0$ ,  $\Delta_c a(z-c) \neq a(z)$  自然成立.

**例 3** 设  $f(z) = e^z + \frac{z^2}{2c} - \frac{z}{2}$ , 其中  $c$  满足  $c \neq 0$ ,  $e^c = 1$ , 取  $a(z) \equiv z$ , 则有  $\sigma(f(z)) = 1$ ,  $\Delta_c f(z) \equiv z$ , 于是  $\tau(\Delta_c f(z))$  没有意义, 但  $\Delta_c(f(z) - z) \equiv z - c \neq 0$ . 此例说明定理 D 不成立. 若  $\Delta_c^n f(z)$  是超越亚纯函数, 定理 D 成立.

**例 4** 设  $a(z)$  是一个复平面上非零且级小于 1 的亚纯函数,  $f(z) = e^z + a(z)$ , 则  $a(z)$  是  $f(z)$  的一个小函数. 令  $c \neq 0$ ,  $e^c = 1$ ,  $a(z+c) - 2a(z) \neq 0$ , 则有  $\Delta_c f(z) = f(z+c) - f(z) = a(z+c) - a(z)$ . 显然  $\sigma(f(z)) = 1$ ,

$$\lambda(f(z) - a(z)) = \lambda(e^z) = 0, \quad \lambda(\Delta_c f(z) - a(z)) = \lambda(a(z+c) - 2a(z)) \leq \sigma(a(z)) < 1,$$

于是有

$$\max\{\lambda(f(z) - a(z)), \lambda(\Delta_c f(z) - a(z))\} \neq \sigma(f(z)).$$

这里  $a(z)$  不是  $\Delta_c f(z)$  的小函数. 如, 取  $a(z) = z^2 + z$ , 则有

$$\lambda(f(z) - a(z)) = \lambda(\Delta_c f(z) - a(z)) = 0, \quad \sigma(f(z)) = 1,$$

于是

$$\max\{\lambda(f(z) - a(z)), \lambda(\Delta_c f(z) - a(z))\} = 0 < 1 = \sigma(f(z)).$$

此例说明定理 1 中的条件  $a(z)$  是  $\Delta_c f(z)$  的小函数 (非零) 是不能去掉的.

**定理 2** 设  $f$  是一个复平面上有穷级超越亚纯函数,  $c$  是一个非零有穷复数,  $a(z)$  是一个满足  $a(z+c) \neq a(z)$  的  $f$  的小函数. 若存在  $b \in \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , 使得  $\Theta(b, f) > 0$ , 且有  $b \neq a(z)$ ,  $b \neq a(z+c)$ , 则有

$$\max\{\lambda(f(z) - a(z)), \lambda(f(z+c) - a(z))\} = \sigma(f(z)).$$

**注 1.2** 定理 2 中取  $a(z) \equiv z$  即得

**推论 1** 设  $f$  是一个复平面上有穷级超越亚纯函数,  $c$  是一个非零有穷复数,  $a$  是一个扩充复平面上的复数且满足  $\Theta(a, f) > 0$ , 则有

$$\max\{\tau(f(z)), \tau(f(z+c))\} = \sigma(f(z)).$$

由推论 1 即得定理 F.

**例 5** 设  $f(z) = e^{z^2} + e^z$ ,  $c \neq 0$ ,  $e^c = 1$ ,  $a(z) = e^z$ , 则  $a(z)$  是  $f(z)$  的一个非零小函数满足  $a(z+c) \equiv a(z)$ ,  $\sigma(f(z)) = 2$ . 但是  $\lambda(f(z)-a(z)) = \lambda(e^{z^2}) = 0$ ,  $\lambda(f(z+c)-a(z)) = \lambda(e^{(z+c)^2}) = 0$ , 于是有

$$\max\{\lambda(f(z) - a(z)), \lambda(f(z+c) - a(z))\} \neq \sigma(f(z)).$$

此例说明定理 2 中的条件  $a(z+c) \not\equiv a(z)$  是不能去掉的.

**例 6** 设  $f(z) = \frac{z-(z-c)e^z}{1-e^z}$ , 其中  $c \neq 0$ ,  $a(z) \equiv z$ , 则有  $\tau(f(z)) = 0$ ,  $\tau(f(z+c)) = 0$ , 而  $\sigma(f(z)) = 1$ . 于是有

$$\max\{\tau(f(z)), \tau(f(z+c))\} < \sigma(f(z)).$$

此例说明定理 2 中的条件存在  $b \in \widehat{\mathbb{C}}$ , 使得  $\Theta(b, f) > 0$ ,  $b \not\equiv a(z)$ ,  $b \not\equiv a(z+c)$  是不能去掉的.

**定理 3** 设  $f$  是一个复平面上的超越亚纯函数, 除去至多有无穷个零点及极点外,  $f$  的零点及极点的重级均  $\geq 2$ .  $a(z) (\neq 0, \infty)$  是  $f(z)$  的一个小函数, 若  $\overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) = S(r, f)$ , 则  $\delta(\infty, f) = 0$ , 且有

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f}\right) &= N(r, f) + S(r, f), \\ \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) &= \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f), \\ \overline{N}(r, f) &= \frac{1}{2}N(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

当  $f$  是有穷级时,  $S(r, f) = O(\log r)$ , 于是定理 G 将不动点换为非零小函数仍成立.

最近, Yang, Liao 和 Chen<sup>[14]</sup> 主要证明了:

**定理 H** 设  $P(z)$  是一个非常数多项式,  $f$  是一个整函数且它的零点除去有限个之外重级均  $\geq 3$ . 若  $\sin z$  是  $f$  的一个小函数, 则  $f'(z) - P(z)\sin z$  在复平面上有无穷多个零点.

本文给定理 H 一个非常简洁的证明并改进了定理 H, 证明了

**定理 4** 设  $f$  是一个复平面上超越亚纯函数, 且它的零点除去有限个外重级均  $\geq k+2$ , 极点除去有限个外重级均  $\geq k+3$ ,  $k$  是一个正整数,  $a(z) (\neq 0, \infty)$  是  $f(z)$  的一个小函数, 则有

$$T(r, f) \leq (k^2 + 5k + 6)\overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - a(z)}\right) + S(r, f).$$

因此,  $f^{(k)}(z) - a(z)$  在复平面上有无穷多个零点.

由此即得:

**推论 2** 设  $P(z) (\neq 0)$  是一个多项式,  $f$  是一个复平面上的整函数且它的零点除去有限个外重级均  $\geq 3$ . 若  $a(z) (\neq 0, \infty)$  是  $f(z)$  的一个小函数, 则  $f'(z) - P(z)a(z)$  在复平面上有无穷多个零点.

这说明定理 H 中  $P(z)$  是非零常数时, 结论仍然成立.

## 2 一些引理

为了证明本文的结果, 需要如下几个引理.

**引理 1** <sup>[10, 13, 15]</sup> 设  $f(z)$  为复平面上的非常数亚纯函数,  $k$  为一个正整数, 则有

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f).$$

**引理 2** <sup>[3, 5, 7]</sup> 设  $f(z)$  为复平面上的有穷级亚纯函数,  $c$  为一个非零有穷复数, 则有

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) = S(r, f),$$

且对于任意  $\varepsilon > 0$ , 有  $m(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}) = O(r^{\sigma(f(z)) - 1 + \varepsilon})$ .

**引理 3** <sup>[10, 13, 15]</sup> 设  $f(z)$  为复平面上的非常数亚纯函数,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $n(\geq 2)$  个  $f$  的小函数, 则有

$$\begin{aligned} & m\left(r, \frac{1}{f-a_1}\right) + m\left(r, \frac{1}{f-a_2}\right) + \dots + m\left(r, \frac{1}{f-a_n}\right) \\ & \leq m\left(r, \frac{1}{f-a_1} + \frac{1}{f-a_2} + \dots + \frac{1}{f-a_n}\right) + S(r, f). \end{aligned}$$

**引理 4** <sup>[3, 9, 18]</sup> 设  $f(z)$  为复平面上的有穷级亚纯函数,  $c$  为一个非零有穷复数, 则有

$$\begin{aligned} T(r, f(z+c)) &= T(r, f) + S(r, f), \\ N(r, f(z+c)) &= N(r, f) + S(r, f), \\ \overline{N}(r, f(z+c)) &= \overline{N}(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

**注 2.1** 由此即得  $\overline{N}(r, \Delta_c^n f(z)) \leq (n+1)\overline{N}(r, f) + S(r, f)$ .

**引理 5** <sup>[10, 13, 15]</sup> 设  $f(z)$  为复平面上的非常数亚纯函数,  $a_1, a_2, a_3$  是  $f$  的三个判别的小函数, 则有  $T(r, f) \leq \overline{N}(r, \frac{1}{f-a_1}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f-a_2}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f-a_3}) + S(r, f)$ .

### 3 定理的证明

**定理 1 的证明** 由引理 4 知  $\Delta_c^n a(z)$  是  $\Delta_c^n f(z)$  的一个小函数. 所以, 由引理 1–引理 3 及 Nevanlinna 第一基本定理, 得

$$\begin{aligned} & m\left(r, \frac{1}{f(z)-a(z)}\right) + m\left(r, \frac{1}{\Delta_c^n f(z)-a(z)}\right) \\ & \leq m\left(r, \frac{1}{\Delta_c^n f(z)-\Delta_c^n a(z)}\right) + m\left(r, \frac{1}{\Delta_c^n f(z)-a(z)}\right) + m\left(r, \frac{\Delta_c^n f(z)-\Delta_c^n a(z)}{f(z)-a(z)}\right) + O(1) \\ & \leq m\left(r, \frac{1}{\Delta_c^n f(z)-\Delta_c^n a(z)} + \frac{1}{\Delta_c^n f(z)-a(z)}\right) + S(r, f) \\ & \leq m\left(r, \frac{L(\Delta_c^n f(z), \Delta_c^n a(z), a(z))}{\Delta_c^n f(z)-\Delta_c^n a(z)} + \frac{L(\Delta_c^n f(z), \Delta_c^n a(z), a(z))}{\Delta_c^n f(z)-a(z)}\right) \\ & \quad + m\left(r, \frac{1}{L(\Delta_c^n f(z), \Delta_c^n a(z), a(z))}\right) + S(r, f) \\ & \leq T(r, L(\Delta_c^n f(z), \Delta_c^n a(z), a(z))) + S(r, f), \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中

$$\begin{aligned} L(\Delta_c^n f(z), \Delta_c^n a(z), a(z)) &= \left| \frac{\Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z)}{(\Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z))'} \quad \frac{\Delta_c^n a(z) - a(z)}{(\Delta_c^n a(z) - a(z))'} \right|. \\ T(r, L(\Delta_c^n f(z), \Delta_c^n a(z), a(z))) &= m(r, L(\Delta_c^n f(z), \Delta_c^n a(z), a(z))) + N(r, L(\Delta_c^n f(z), \Delta_c^n a(z), a(z))). \end{aligned} \tag{3.2}$$

由引理 2 得

$$\begin{aligned}
 & m(r, L(\Delta_c^n f(z), \Delta_c^n a(z), a(z))) \\
 &= m(r, (\Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z))(\Delta_c^n a(z) - a(z))' - (\Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z))'(\Delta_c^n a(z) - a(z))) \\
 &= m\left(r, (\Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z)) \left[ (\Delta_c^n a(z) - a(z))' - \frac{(\Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z))'}{\Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z)} (\Delta_c^n a(z) - a(z)) \right] \right) \\
 &\leq m(r, \Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z)) + m(r, (\Delta_c^n a(z) - a(z))') + m\left(r, \frac{(\Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z))'}{\Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z)}\right) \\
 &\quad + m(r, \Delta_c^n a(z) - a(z)) \\
 &\leq m(r, \Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z)) + S(r, f) \\
 &\leq m(r, \Delta_c^n f(z)) + S(r, f).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

由引理 4 及注 2.1 得

$$\begin{aligned}
 & N(r, L(\Delta_c^n f(z), \Delta_c^n a(z), a(z))) \\
 &= N(r, (\Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z))(\Delta_c^n a(z) - a(z))' - (\Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z))'(\Delta_c^n a(z) - a(z))) \\
 &\leq N(r, \Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z)) + \overline{N}(r, \Delta_c^n f(z) - \Delta_c^n a(z)) + S(r, f) \\
 &\leq N(r, \Delta_c^n f(z)) + \overline{N}(r, \Delta_c^n f(z)) + S(r, f) \\
 &\leq N(r, \Delta_c^n f(z)) + (n+1)\overline{N}(r, f) + S(r, f).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

由 (3.2)–(3.4) 即得

$$\begin{aligned}
 & T(r, L(\Delta_c^n f(z), \Delta_c^n a(z), a(z))) \\
 &\leq m(r, \Delta_c^n f(z)) + N(r, \Delta_c^n f(z)) + (n+1)\overline{N}(r, f) + S(r, f).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

在 (3.1) 两边加上  $N(r, \frac{1}{f(z)-a(z)})$  及  $N(r, \frac{1}{\Delta_c^n f(z)-a(z)})$ , 并由 (3.5) 及 Nevanlinna 第一基本定理, 得

$$\begin{aligned}
 & m\left(r, \frac{1}{f(z)-a(z)}\right) + m\left(r, \frac{1}{\Delta_c^n f(z)-a(z)}\right) + N\left(r, \frac{1}{f(z)-a(z)}\right) + N\left(r, \frac{1}{\Delta_c^n f(z)-a(z)}\right) \\
 &\leq T(r, \Delta_c^n f(z)) + N\left(r, \frac{1}{f(z)-a(z)}\right) + N\left(r, \frac{1}{\Delta_c^n f(z)-a(z)}\right) + (n+1)\overline{N}(r, f) + S(r, f),
 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 & T(r, f(z) - a(z)) + T(r, \Delta_c^n f(z) - a(z)) \\
 &\leq T(r, \Delta_c^n f(z)) + N\left(r, \frac{1}{f(z)-a(z)}\right) + N\left(r, \frac{1}{\Delta_c^n f(z)-a(z)}\right) + (n+1)\overline{N}(r, f) + S(r, f).
 \end{aligned}$$

从而得

$$T(r, f) \leq N\left(r, \frac{1}{f(z)-a(z)}\right) + N\left(r, \frac{1}{\Delta_c^n f(z)-a(z)}\right) + (n+1)\overline{N}(r, f) + S(r, f). \tag{3.6}$$

于是由 (3.6) 及  $\Theta(\infty, f) > \frac{n}{n+1}$ , 即得  $\max\{\lambda(f(z) - a(z)), \lambda(\Delta_c^n f(z) - a(z))\} = \sigma(f(z))$ . 事实上, 假如上式不成立, 则有  $\max\{\lambda(f(z) - a(z)), \lambda(\Delta_c^n f(z) - a(z))\} < \sigma(f(z))$ . 取  $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$ , 使得  $\lambda(f(z) - a(z)) \leq \sigma(f(z)) - \varepsilon_0$ ,  $\lambda(\Delta_c^n f(z) - a(z)) \leq \sigma(f(z)) - \varepsilon_0$ .

由

$$\lambda(f(z) - a(z)) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ N(r, \frac{1}{f(z) - a(z)})}{\log r} \leq \sigma(f(z)) - \varepsilon_0,$$

于是存在  $R > 0$ , 当  $r > R$  (以下不同地方出现的  $R$  可以不同) 时, 有  $\frac{\log^+ N(r, \frac{1}{f(z) - a(z)})}{\log r} \leq \sigma(f(z)) - \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{2}$ , 即

$$N\left(r, \frac{1}{f(z) - a(z)}\right) \leq r^{\sigma(f(z)) - \frac{\varepsilon_0}{2}}. \quad (3.7)$$

同理存在  $R > 0$ , 当  $r > R$  时, 有

$$N\left(r, \frac{1}{\Delta_c^n f(z) - a(z)}\right) \leq r^{\sigma(f(z)) - \frac{\varepsilon_0}{2}}. \quad (3.8)$$

由

$$\Theta(\infty, f) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, f)}{T(r, f)} \quad \text{及} \quad \Theta(\infty, f) > \frac{n}{n+1},$$

得

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, f)}{T(r, f)} = 1 - \Theta(\infty, f) < 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

于是有

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\overline{N}(r, f)}{T(r, f)} < 1.$$

不妨设

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\overline{N}(r, f)}{T(r, f)} = A < 1,$$

于是存在  $R > 0$ , 当  $r > R$  时, 有  $\frac{(n+1)\overline{N}(r, f)}{T(r, f)} \leq \frac{A+1}{2}$ , 即

$$(n+1)\overline{N}(r, f) \leq \frac{A+1}{2}T(r, f). \quad (3.9)$$

由引理 2 得

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) = O(r^{\sigma(f(z)) - 1 + \varepsilon_0}) \leq O(r^{\sigma(f(z)) - \frac{\varepsilon_0}{2}}). \quad (3.10)$$

由于  $S(r, f)$  是由 (3.1), (3.5) 中出现的类似于  $m(r, \frac{f(z+c)}{f(z)})$  的差分对数导数组成, 于是由 (3.10) 得

$$S(r, f) \leq O(r^{\sigma(f(z)) - \frac{\varepsilon_0}{2}}). \quad (3.11)$$

于是结合 (3.6)–(3.11), 得

$$T(r, f) \leq \frac{2}{1-A}(2r^{\sigma(f(z)) - \frac{\varepsilon_0}{2}} + O(r^{\sigma(f(z)) - \frac{\varepsilon_0}{2}})),$$

即  $T(r, f) \leq O(r^{\sigma(f(z)) - \frac{\varepsilon_0}{2}})$ . 由此即得  $\sigma(f(z)) \leq \sigma(f(z)) - \frac{\varepsilon_0}{2}$ , 矛盾.

同理, 可证  $\max\{\lambda(f(z) - a(z-c)), \lambda(\Delta_c^n f(z) - a(z))\} = \sigma(f(z))$ .

**定理 2 的证明** 由引理 4 知  $a(z-c)$  是  $f$  的一个小函数, 于是, 由引理 5 得

$$T(r, f) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a(z)}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a(z-c)}\right) + S(r, f). \quad (3.12)$$



于是, 由 (3.12) 和定理 1 一样证明即得

$$\max\{\lambda(f(z) - a(z)), \lambda(f(z) - a(z - c))\} = \sigma(f(z)).$$

**定理 3 的证明** 由于  $f$  的零点与极点除去有限个外重级均  $\geq 2$ . 所以由引理 5, Nevanlinna 第一、第二基本定理及  $\overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) = S(r, f)$ , 得

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a(z)}\right) + S(r, f) \\ &\leq \frac{1}{2}N(r, f) + \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f) \leq \frac{1}{2}T(r, f) + \frac{1}{2}N(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

于是即得

$$T(r, f) \leq N(r, f) + S(r, f) \leq T(r, f) + S(r, f),$$

即  $N(r, f) = T(r, f) + S(r, f)$ . 同理有  $N(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) + S(r, f)$ . 于是有

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = N(r, f) + S(r, f).$$

另一方面,

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + S(r, f) \\ &\leq \overline{N}(r, f) + \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f) \leq \frac{1}{2}T(r, f) + \overline{N}(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

于是有

$$\frac{1}{2}N(r, f) \leq \frac{1}{2}T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + S(r, f) \leq \frac{1}{2}N(r, f) + S(r, f),$$

即  $\overline{N}(r, f) = \frac{1}{2}N(r, f) + S(r, f)$ . 同理, 有  $\overline{N}(r, \frac{1}{f}) = \frac{1}{2}N(r, f) + S(r, f)$ .

**定理 4 的证明** 由引理 1, 引理 3, 引理 5 及 Nevanlinna 第一基本定理, 得

$$\begin{aligned} &m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - a}\right) \\ &\leq m\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + m\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - a}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \\ &\leq m\left(r, \frac{1}{f^{(k)}} + \frac{1}{f^{(k)} - a}\right) + S(r, f) \\ &\leq m\left(r, \frac{1}{f^{(k)}a' - af^{(k+1)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}a' - af^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}a' - af^{(k+1)}}{f^{(k)} - a}\right) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f^{(k)}a' - af^{(k+1)}) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}a' - af^{(k+1)}}\right) + S(r, f) \\ &= m(r, f^{(k)}a' - af^{(k+1)}) + N(r, f^{(k)}a' - af^{(k+1)}) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}a' - af^{(k+1)}}\right) + S(r, f) \\ &\leq m(r, f^{(k)}) + N(r, f^{(k)}) + \overline{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}a' - af^{(k+1)}}\right) + S(r, f) \\ &= T(r, f^{(k)}) + \overline{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}a' - af^{(k+1)}}\right) + S(r, f). \end{aligned}$$

于是, 上式两边加上  $N(r, \frac{1}{f})$ ,  $N(r, \frac{1}{f^{(k)}-a})$ , 并由 Nevanlinna 第一基本定理, 得

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-a}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}a' - af^{(k+1)}}\right) + S(r, f) \\ &\leq \overline{N}(r, f) + (k+1)\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-a}\right) + S(r, f) \\ &\leq \frac{1}{k+3}N(r, f) + \frac{k+1}{k+2}N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-a}\right) + S(r, f) \\ &\leq \frac{k+2+(k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)}T(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-a}\right) + S(r, f). \end{aligned}$$

于是有

$$T(r, f) \leq (k^2 + 5k + 6)\overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-a(z)}\right) + S(r, f).$$

**致谢** 对审稿人提出的宝贵建议表示衷心的感谢.

## 参 考 文 献

- [1] Bergweiler W., Langley J. K., Zeros of differences of meromorphic functions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 2007, **142**: 133–147.
- [2] Chen Z. X., Fixed points of meromorphic functions and their differences, shifts, *Ann. Polon. Math.*, 2013, **109**(2): 153–163.
- [3] Chen Z. X., Complex Differences and Difference Equations, Mathematics Monograph Series, Vol. 29, Science Press, Beijing, 2014.
- [4] Chen Z. X., Shon K. H., On zeros and fixed points of differences of meromorphic functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **344**: 373–383.
- [5] Chiang Y. M., Feng S. J., On the Nevanlinna characteristic of  $f(z + \eta)$  and difference equations in the complex plane, *Ramanujan J.*, 2008, **16**: 105–129.
- [6] Chiang Y. M., Feng S. J., On the growth of logarithmic differences, difference quotients and logarithmic derivatives of meromorphic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2009, **361**: 3767–3791.
- [7] Halburd R. G., Korhonen R. J., Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **314**: 477–487.
- [8] Halburd R. G., Korhonen R. J., Nevanlinna theory for the difference operator, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2006, **31**: 463–478.
- [9] Halburd R. G., Korhonen R. J., Tohge, Kazuya Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2014, **366**(8): 4267–4298.
- [10] Hayman W. K., Meromorphic Functions, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [11] Laine I., Yang C. C., Clunie theorems for difference and q-difference polynomials, *J. Lond. Math. Soc.*, 2007, **76**(3): 556–566.
- [12] Lan S. T., Chen Z. X., On fixed points of meromorphic functions  $f(z)$  and  $f(z+c)$ ,  $\Delta_c f(z)$ , *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, 2019, **39**(5): 1277–1289.
- [13] Yang L., Value Distribution Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [14] Yang P., Liao L. W., Chen, Q. Y., Value distribution of the derivatives of entire functions with multiple zeros, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2020, **43**(3): 2045–2063.
- [15] Yi H. X., Yang C. C., Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Science Press, Beijing, 1995.
- [16] Zhang J., Liao L. W., Entire functions sharing some values with their difference operators, *Sci. China Math.*, 2014, **57**(10): 2143–2152.
- [17] Zhang R. R., Chen Z. X., Fixed points of meromorphic functions and of their differences, divided differences and shifts, *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 2016, **32**(10): 1189–1202.
- [18] Zhang R. R., Chen Z. X., Value distribution of difference polynomials of meromorphic functions (in Chinese), *Sci. Sin. Math.*, 2012, **42**(11): 1115–1130.