第65卷第4期 数学学报中文版 Vol.65, No.4
2022年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2022

DOI: 10.12386/A20210004 **文献标识码: A**

随机变量的量子分解和增长图的渐近谱分布

韩 琦 寇亚欣 韩娅楠 陆自强

西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070
E-mail: hanqi1978@nwnu.edu.cn; 2609167725@qq.com;
13993113263@139.com; luziqiang199605@163.com

摘 要 本文给出了一般 Bernoulli 随机变量 X 的量子分解, 三点路图 m 步返回路线条数的积分表示以及两类增长图 — 圈与完全二分图的渐近谱分布. 这使得在量子概率框架下研究经典随机变量或经典概率分布成为可能, 也在一定程度上展示了图的谱分析中的量子概率技巧.

关键词 邻接矩阵; 谱; 相互作用 Fock 空间; 代数概率空间; 量子分解
MR(2010) 主题分类 60B15
中图分类 O211.9

Quantum Decomposition of Random Variables and Asymptotic Spectral Distribution of Growing Graphs

Qi HAN Ya Xin KOU Ya Nan HAN Zi Qiang LU

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, P. R. China
E-mail: *hanqi1978@nwnu.edu.cn*; *2609167725@qq.com;*
13993113263@139.*com*; *luziqiang199605@163.com*

Abstract We give the quantum decomposition of general Bernoulli random variable X, the integral representation of the number of return routes in m steps of a three point path graph, and the asymptotic spectral distribution of two kinds of growing graphs—cycle graph and complete bipartite graph. This makes it possible for us to study a classical variable or a probability distribution within the framework of quantum probability. To some extent, this also shows that the quantum probabilistic techniques in the spectral analysis of graphs.

Keywords adjacency matrix; spectral; interacting Fock spaces; algebraic probability space; quantum decomposition
MR(2010) Subject Classification 60B15
Chinese Library Classification O211.9

收稿日期: 2021-01-08; 接受日期: 2021-04-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11861057); 甘肃省自然科学基金资助项目 (20JR10RA085)

1 引言

自从 Barabási 和 Albert [2] 及 Watts 和 Strogatz [11] 在复杂网络的开创性理论以来, 大量有关复杂网络的理论研究便广泛开展, 其中关于复杂网络的数学研究兴趣也在稳步增长, Blanchard 和 Volchenkov [3] 讨论了图上的随机行走和扩散现象, Durrett [4] 和 Lovász [8] 分别讨论了随机图的动力演化和大图的极限等, 我们感兴趣的是大图或者增长图的谱分析.

本篇文章则是基于量子概率理论, 对图的谱分析提供一些新的思想方法, 量子概率作为一种非交换的理论是基于 Von Neumann [10] 量子力学的思想, 并随着量子统计的发展而发展起来, 其中量子分析方法使得我们能够在量子概率框架内研究经典随机变量或概率分布. 这种方法首先由 Hashimoto [5] 提出, 并应用于 Hamming 图的渐近谱分析. 事实上, 量子分解的本质是基于 Accardi 和 Bożejko [1] 的重要观点 — 正交多项式所满足的三项递推关系, 不过是相互作用 Fock 空间结构.

本文主要给出一般 Bernoulli 随机变量 X 的量子分解, 讨论一种特殊相互作用 Fock 空间中场算子的真空谱分布, 给出了三点路图 m 步返回路线条数的积分表示, 还讨论了两类特殊增长图的渐近谱分布. 本文第 2 节罗列与图和量子分解相关的预备知识; 第 3 节证明 Bernoulli 随机变量的量子分解与三点路图 m 步返回路线条数; 第 4 节证明圈和完全二部图的渐近谱分布, 最后为结语.

2 预备知识

本部分首先罗列一些与图有关的概念和结论.

定义 2.1 [6] 一个图是二元组 $G=(V,E)$, 其中 V 是非空的顶点的集合, E 是边的集合, 即不同顶点的无序对集合. 若两个顶点 $x,y\in V$ 相连, 则记为 $x\sim y$. 如果 V 是有限集, 则称图 $G=(V,E)$ 为有限图, 否则称为无限图.

定义 2.2 [6] 图 $G=(V,E)$ 的邻接矩阵是定义在指标集 $V\times V$ 上的矩阵 $A=A[G]$, 对 $\forall x,y\in V$, 若 x 与 y 相连, $A_{xy}=1$. 否则 $A_{xy}=0$, 则邻接矩阵的元素可表示为

$$A_{xy}=\begin{cases}1, & x\sim y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

定义 2.3 [9] 设图 $G=(V,E)$ 是有限图, 图的谱定义为数组

$$\mathrm{Spec}(G)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s\\ m_1 & m_2 & \cdots & m_s\end{pmatrix},$$

其中 λ_i 为邻接矩阵的特征值, m_i 是 λ_i 的重数.

为了从量子概率的角度讨论图的相关性质, 我们引入如下的定义和引理.

定义 2.4 [6] 设 $\mathscr{A}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有单位元 $1_{\mathscr{A}}$ 的单位 $*$ 代数, 函数 $\varphi:\mathscr{A}\mapsto C$ 称为 $\mathscr{A}$ 上的态, 如果

(1) φ 是线性的;

(2) $\varphi\,(a^*a\geq 0)$;

(3) $\varphi(1_{\mathscr{A}})=1$,

则二元组 $(\mathscr{A},\varphi)$ 称为代数概率空间.

定义 2.5 [7] 设 $G=(V,E)$ 是一个图 (有限或无限, 总可以假定为局部有限), 一旦邻接代数 $\mathscr{A}(G)$ 中的态 φ 给定, 我们将邻接矩阵 $A=A^*$ 当做代数概率空间 $(\mathscr{A}(G),\varphi)$ 中的实随机变量, 则存在一个概率测度 $\mu\in\mathscr{B}_{fm}(\mathbb{R})$, 其中 $\mathscr{B}_{fm}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的具有所有阶的有限矩的概率测度 μ 构成的有限集, 使得

$$\varphi(A^m)=M_m(\mu)=\int_{\mathbb{R}}x^m\mu(dx),\quad m\geq 0,\tag{2.1}$$

μ 称为 A 在态 φ 下的谱分布.

定义 2.6 [6] 设 $G=(V,E)$ 是一个有限图, 规范化的迹定义为

$$\varphi_{\mathrm{tr}}(A)=\frac{1}{|V|}\mathrm{Tr}\,a=\frac{1}{|V|}\sum_{x\in V}(a)_{xx}=\frac{1}{|V|}\sum_{x\in V}\langle e_x,ae_x\rangle,\quad a\in\mathscr{A}(G),$$

其中 $\{e_x;x\in V\}\subset C_0(V)$ 为典范基, $C_0(V)$ 是 V 上的具有有限支撑的 $\mathbb{C}$ 值函数空间. 图 $G=(V,E)$ 的邻接矩阵 A 被认为是代数概率空间 $(\mathscr{A}(G),\varphi_{\mathrm{tr}})$ 中的实随机变量, G 的特征值分布是 $\mathbb{R}$ 上的概率测度, 定义为

$$\mu=\frac{1}{|V|}\sum_{i=1}^{s}m_i\delta_{\lambda_i},\quad \mathrm{Spec}(G)=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_s\\ m_1&m_2&\cdots&m_s\end{pmatrix},\tag{2.2}$$

其中 δ_{λ_i} 表示 λ_i 处的点质量.

定义 2.7 [9] 设 Γ 是一个有完全正交基 $\Phi_0,\Phi_1,\Phi_2,\ldots$ 的 Hilbert 空间, Γ_0 是由这组基张成的稠密子空间, 三个线性算子 $B^+,B^-,B^0\in\mathbf{L}(\Gamma_0)$, $\mathbf{L}(\Gamma_0)$ 为算子空间, 其中

$$\begin{aligned}&B^+\Phi_n=\sqrt{\omega_{n+1}}\Phi_{n+1},\quad n\geq 0;\\&B^-\Phi_0=0,\quad B^-\Phi_n=\sqrt{\omega_n}\Phi_{n-1},\quad n\geq 1;\\&B^0\Phi_n=\alpha_{n+1}\Phi_n,\quad n\geq 0.\end{aligned}$$

按上述方式获得的五元组 $(\Gamma,\{\Phi_n\},B^+,B^-,B^0)$ 称为具有 Jacobi 系数 $(\{\omega_n\},\{\alpha_n\})$ 的相互作用 Fock 空间, 算子 B^+,B^-,B^0 分别称为增生、湮灭、保守算子. B^+,B^-,B^0 是代数概率空间 $(\mathbf{L}(\Gamma_0),\Phi_0)$ 中的随机变量, 其中 Φ_0 称为真空态. 特别地, $B^++B^-+B^0$ 称为场算子, 场算子扮演着和它的谱分布 μ 一样的角色, $\mathbb{R}$ 上的概率测度满足

$$\langle\Phi_0,(B^++B^-+B^0)^m\Phi_0\rangle=\int_{\mathbb{R}}x^m\mu(dx),\quad m\geq 0.\tag{2.3}$$

引理 2.8 [9] 设 $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n,\ldots,\mu$ 是 $\mathbb{R}$ 上的概率测度, 如果有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x)\mu_n(dx)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mu(dx),\quad f\in C_b(\mathbb{R}),\tag{2.4}$$

称 μ_n 弱收敛于 μ, 其中 $C_b(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的所有有界连续函数空间.

引理 2.9 [7] 设 $(\Gamma,\{\Phi_n\},B^+,B^-,B^0)$ 是具有 Jacobi 系数 $(\{\omega_n\},\{\alpha_n\})$ 的相互作用 Fock 空间, μ 是具有 Jacobi 系数 $(\{\omega_n\},\{\alpha_n\})$ 的概率测度, 有

$$M_m(\mu)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mu(dx)=\langle\Phi_0,(B^++B^-+B^0)^m\Phi_0\rangle,\quad m\geq 0.\tag{2.5}$$

引理 2.10 [9] 设 $G=(V,E)$ 是一个图 (有限或无限, 总可以假定为局部有限), A 是图 G 的邻接矩阵, 对任意的 $x,y\in V$, $W(x,y;G)$ 表示连接点 x 与 y 的 m 步长的数目, 则有

$$(A^m)_{xy}=W(x,y;G),\quad m\geq 1,\tag{2.6}$$

其中 $(A^m)_{xy} = \langle e_x, A^m e_y\rangle$.

引理 2.11 [7] 设 $a = a^*$ 是代数概率空间 $(\mathscr{A}, \varphi)$ 中的实随机变量, 则存在唯一的 Jacobi 系数 $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\}) \in J$, 其中 J 为 Jacobi 系数构成的集合, 使得

$$\varphi(a^m) = \langle \Phi_0, (B^+ + B^- + B^0)^m \Phi_0\rangle, \quad m \geq 0, \tag{2.7}$$

其中 $(\Gamma, \{\Phi_n\}, B^+, B^-, B^0)$ 是具有 Jacobi 系数 $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ 的相互作用 Fock 空间. 此时

$$a \overset{m}{=} B^+ + B^- + B^0$$

称为实随机变量 $a = a^*$ 的量子分解.

引理 2.12 [9] 路 $P_n\,(n \in \mathbb{N})$ 的谱分布为

$$\mu_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{2\cos\frac{k\pi}{n+1}}\right),$$

则

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(2\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)\right), \quad f \in C_b(\mathbb{R}),$$

从而

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) = \int_{-2}^{2} f(x)\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}dx. \tag{2.8}$$

因此, 路 P_n 的谱分布弱收敛于反正弦律.

引理 2.13 [9] 完全图 $K_n\,(n \in \mathbb{N})$ 的谱分布为

$$\mu_n = \frac{1}{n}\delta_{n-1} + \frac{n-1}{n}\delta_{-1},$$

则

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) = f(-1),$$

将概率测度 μ_n 标准化, 设 $\tilde{\mu_n}$ 为标准化的 μ_n, 故

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\tilde{\mu_n}(dx) = f(0). \tag{2.9}$$

因此, 路 K_n 的谱分布弱收敛于 δ_0.

3 Bernoulli 随机变量的量子分解与三点路图 m 步返回路线条数的积分表示

Bernoulli 分布作为最基本的分布之一, 与增长图的关系非常密切, 为讨论一般增长图的渐近谱分布, 我们先给出一般 Bernoulli 分布的量子分解. 事实上, 我们可以将 Bernoulli 分布与两点路联系起来, 且可以在此基础上得到三点路图 P_3 的 m 步返回路线条数的积分表示.

命题 3.1 由 $P(X=1)=p$ 和 $P(X=0)=1-p$ 定义的 Bernoulli 随机变量 X 的量子分解为

$$X \overset{m}{=} B^+ + B^- + B^0.$$

证明 设 $(\Gamma, \{\Phi_n\}, B^+, B^-, B^0)$ 是具有 Jacobi 系数

$$(\{\omega_1 = p(1-p)\}, \{\alpha_1 = p,\, \alpha_2 = 1-p\}) \in J_2$$

的相互作用 Fock 空间, 其中

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p(1-p)} & 0 \end{pmatrix}, \quad B^0 = \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix},$$

故 $\langle \Phi_0, (B^+ + B^- + B^0)^m \Phi_0 \rangle = p$.

根据题意可知 Bernoulli 分布的概率测度为

$$\mu = (1-p)\delta_0 + p\delta_1, \tag{3.1}$$

则

$$M_m(\mu) = \int_{\mathbb{R}} x^m \mu(dx) = p.$$

进一步有

$$M_m(\mu) = \int_{\mathbb{R}} x^m \mu(dx) = \langle \Phi_0, (B^+ + B^- + B^0)^m \Phi_0 \rangle, \tag{3.2}$$

故 Bernoulli 随机变量 X 的量子分解为 $X \stackrel{m}{=} B^+ + B^- + B^0$. 证毕.

命题 3.2 设 $(\Gamma, \{\Phi_n\}, B^+, B^-, B^0)$ 是具有 Jacobi 系数 $(\{\omega_1 = \omega_2 = 1\}, \{\alpha_n \equiv 0\}) \in J_3$ 的相互作用 Fock 空间, 则 $B^+ + B^-$ 的真空谱分布和 $W_m(0,0;P_3)$ 的积分表达式相同.

证明 由题意可知

$$(B^+ + B^-)\Phi_0 = \Phi_1, \quad (B^+ + B^-)\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_0,$$

可得

$$\langle \Phi_0, (B^+ + B^-)^m \Phi_0 \rangle = \begin{cases} 0, & m = 2k+1, \\ 2^{(k-1)}, & m = 2k, \end{cases} \quad k \geq 1.$$

路 P_3 的邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

归纳可得

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^k & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 2^k & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{2k} = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 2^k & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix},$$

则

$$W(0,0;P_3) = \langle e_0, A^m e_0 \rangle,$$

其中

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

计算得

$$\langle e_0, A^m e_0 \rangle = \begin{cases} 0, & m = 2k+1, \\ 2^{(k-1)}, & m = 2k. \end{cases}$$

进一步有

$$W(0,0;P_3) = \int_{\mathbb{R}} x^m \mu(dx) = \langle \Phi_0, (B^+ + B^-)^m \Phi_0 \rangle, \tag{3.3}$$

因此, $B^+ + B^-$ 的真空谱分布和 $W_m(0,0;P_3)$ 的积分表达式相同. 证毕.

4 圈与完全二分图的渐近谱分布

增长图是一列图 $G_n = (V_n, E_n)$, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $|V_n| \to \infty$, 且 G_n 是 G_{n+1} 的子图. 下面考虑两类增长图 — 圈与完全二分图的渐近谱分布, 设图 $G_n = (V_n, E_n)$ 的邻接矩阵 $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, 其特征多项式为

$$\varphi_A(x) = |xI - A| = \det(xI - A).$$

命题 4.1 圈 C_n 的谱分布弱收敛于反正弦律.

证明 因为圈 C_n 的邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

故圈 C_n 的谱为

$$\mathrm{Spec}(C_{2m+1}) = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2\cos\dfrac{2\pi l}{2m+1} & \cdots & 2\cos\dfrac{2\pi m}{2m+1} \\ 1 & \cdots & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}, \quad 1 \le l \le m.$$

$$\mathrm{Spec}(C_{2m}) = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2\cos\dfrac{2\pi l}{2m} & \cdots & -2 \\ 1 & \cdots & 2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 \le l \le m-1.$$

从而奇圈 C_{2m+1} 的谱分布为

$$\mu_{2m+1} = \frac{1}{2m+1}\left(\delta_2 + 2\sum_{l=1}^{m} \delta_{2\cos\frac{2\pi l}{2m+1}}\right), \tag{4.1}$$

则

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_{2m+1}(dx) = \frac{1}{2m+1}\left(f(2) + 2\sum_{l=1}^{m} f\left(2\cos\frac{2\pi l}{2m+1}\right)\right), \quad f \in C_b(\mathbb{R}).$$

故有

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_{2m+1}(dx) &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\left(f(2)+2\sum_{l=1}^{m} f\left(2\cos\frac{2\pi l}{2m+1}\right)\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{2}{2m+1}\left(\sum_{l=1}^{m} f\left(2\cos\frac{2\pi l}{2m+1}\right)\right).\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2}{2m+1}\left(\sum_{l=1}^{m} f\left(2\cos\frac{2\pi l}{2m+1}\right)\right)=\int_0^1 f(2\cos(t\pi))dt=\int_{-2}^{2} f(x)\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}dx. \tag{4.2}$$

又偶圈 C_{2m} 的谱分布为

$$\mu_{2m}=\frac{1}{2m}\left(\delta_2+2\sum_{l=1}^{m}\delta_{2\cos\frac{2\pi l}{2m}}+\delta_{-2}\right), \tag{4.3}$$

则

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_{2m}(dx)=\frac{1}{2m}\left(f(2)+2\sum_{l=1}^{m} f\left(2\cos\frac{2\pi l}{2m}\right)+f(-2)\right),\quad f\in C_b(\mathbb{R}),$$

故有

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_{2m}(dx) &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\left(f(2)+2\sum_{l=1}^{m} f\left(2\cos\frac{2\pi l}{2m}\right)+f(-2)\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\left(\sum_{l=1}^{m} f\left(2\cos\frac{2\pi l}{2m}\right)\right)\\ &= \int_0^1 f(2\cos(t\pi))dt\\ &= \int_{-2}^{2} f(x)\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}dx\end{aligned} \tag{4.4}$$

可知圈 C_n 的谱分布弱收敛于反正弦律. 证毕.

命题 4.2 完全二分图 $K_{m,n}$ 的谱分布弱收敛于 δ_0.

证明 完全二分图 $K_{m,n}$ 的邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{pmatrix},$$

其中 $A_1=(0)_{m\times m}$, $A_2=(1)_{n\times n}$, $B_1=(1)_{m\times n}$, $B_2=(0)_{n\times n}$.

故完全二分图 $K_{m,n}$ 的谱为

$$\mathrm{Spec}(K_{m,n})=\begin{pmatrix} -\sqrt{mn} & 0 & \sqrt{mn}\\ 1 & m+n-2 & 1\end{pmatrix},\quad m\geq 1,\quad n\geq 1,$$

从而完全二分图 $K_{m,n}$ 的谱分布为

$$\mu_{m+n}=\frac{1}{m+n}(\delta_{-\sqrt{mn}}+(m+n-2)\delta_0+\delta_{\sqrt{mn}}), \tag{4.5}$$

则

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_{m+n}(dx)=\frac{1}{m+n}(f(-\sqrt{mn})+(m+n-2)f(0)+f(\sqrt{mn})).$$

因此

$$\lim_{m+n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_{m+n}(dx) = \lim_{m+n\to\infty}\frac{1}{m+n}(f(-\sqrt{mn}) + (m+n-2)f(0) + f(\sqrt{mn})) = f(0). \tag{4.6}$$

故完全二分图的谱分布弱收敛于 δ_0. 证毕.

5 结语

本文建立了一般增长图理论与量子概率之间的联系, 揭示了两类大图或增长图的渐近行为, 发现了量子分解在基于量子概率研究增长图理论中的重要作用. 增长图理论研究的量子化方法正日益受到各方面的关注, 我们会继续跟进并研究量子概率在复杂图上的应用.

参考文献

[1] Accardi L., Bożejko M., Interacting Fock spaces and Gaussianization of probability measures, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 1998, **1**: 663–670.

[2] Barabási A. L., Albert R., Emergence of scaling in random networks, *Science*, 1999, **286**: 509–512.

[3] Blanchard P. H., Volchenkov D., Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases, An Introduction, Springer, Heidelberg, 2011.

[4] Durrett R., Probability; Theory and Examples, 4th Edn. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[5] Hashimoto Y., Deformations of the semicircle law derived from random walks on free groups, *Probab. Math. Stat.*, 1998, **18**: 399–410.

[6] Hora A., Obata N., Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs, Springer, Berlin, 2007.

[7] Hora A., Obata N., Asymptotic spectral analysis of growing regular graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2008, **360**: 899–923.

[8] Lovász L., On the Shannon capacity of a graph, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1979, **25**: 1–7.

[9] Obata N., Spectral Analysis of Growing Graphs: A Quantum Probability Point of View, Springer, Singapore, 2017.

[10] Von Neumann J., Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932.

[11] Watts D. J., Strogatz S. H., Collective dynamics of “small-world” networks, *Nature*, 1998, **393**: 440–442.