文章编号: 0583-1431(2021)01-0047-12 **文献标识码: A**

$\mathbb{R}_1^{m+1}$ 中拟迷向类空超曲面

姬 秀 李同柱
北京理工大学数学与统计学院 北京 100081
E-mail: jixiu1106@163.com; litz@bit.edu.cn

摘 要 设 $f: M^m \to \mathbb{R}_1^{m+1}$ 是无脐点类空超曲面, 则在 M^m 上可以定义四个基本的共形不变量: 共形度量 g, 共形 1- 形式 C, 共形第二基本形式 B, 共形 Blaschke 张量 A. 如果存在光滑函数 λ 和常数 μ, 使得 $A+\mu B=\lambda g$, 则称 M^m 是拟迷向类空超曲面. 本文不仅构造了拟迷向类空超曲面的例子, 同时在相差 $\mathbb{R}_1^{m+1}$ 的一个共形变换下, 本文还完全分类了拟迷向类空超曲面.

关键词 共形度量; 共形第二基本形式; 共形拟 Blaschke 张量
MR(2010) 主题分类 53A40, 53B25
中图分类 O186.1

Para-isotropic Spacelike Hypersurfaces in $\mathbb{R}_1^{m+1}$

Xiu JI Tong Zhu LI
Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081*, P. R. China*
E-mail: *jixiu*1106*@*163*.com*; *litz@bit.edu.cn*

Abstract Let $f: M^m \to \mathbb{R}_1^{m+1}$ be an umbilic-free spacelike hypersurface. Four basic conformal invariants of M^m are the conformal metric g, the conformal 1-form C, the conformal second fundamental form B, and the conformal Blaschke tensor A. M^m is called the para-isotropic spacelike hypersurface, if $A+\mu B=\lambda g$ for some constant μ and smooth function λ. We not only constructed examples which are para-isotropic spacelike hypersurfaces but also classified completely all para-isotropic spacelike hypersurfaces under the conformal transformal group of $\mathbb{R}_1^{m+1}$ in this paper.

Keywords conformal metric; conformal second fundamental form; Conformal quasi Blaschke tensor
MR(2010) Subject Classification 53A40, 53B25
Chinese Library Classification O186.1

1 引言及主要结果

设 $\mathbb{R}_s^{m+3}$ 是实向量空间 $\mathbb{R}^{m+2}$ 配备乘积 $\langle , \rangle_s$:

$$\langle X, Y\rangle_s = -\sum_{i=1}^{s} x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{m+2} x_j y_j.$$

收稿日期: 2019-05-29; 接受日期: 2020-03-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11571037)

对任意 $a>0$, 定义标准球 $\mathbb{S}^{m+1}(a)$, 双曲空间 $\mathbb{H}^{m+1}(-a)$, de Sitter 空间 $\mathbb{S}_1^{m+1}(a)$ 及反 de Sitter 空间 $\mathbb{H}_1^{m+1}(-a)$ 为

$$\mathbb{S}^{m+1}(a)=\{x\in\mathbb{R}^{m+2}\,|\,x\cdot x=a^2\},\quad \mathbb{H}^{m+1}(-a)=\{x\in\mathbb{R}_1^{m+2}\,|\,\langle x,x\rangle_1=-a^2\},$$
$$\mathbb{S}_1^{m+1}(a)=\{x\in\mathbb{R}_1^{m+2}\,|\,\langle x,x\rangle_1=a^2\},\quad \mathbb{H}_1^{m+1}(-a)=\{x\in\mathbb{R}_2^{m+2}\,|\,\langle x,x\rangle_2=-a^2\}.$$

设 $M_1^{m+1}(c)$ 是洛伦兹空间形式, 当 $c=0$ 时, $M_1^{m+1}(c)=\mathbb{R}_1^{m+1}$; 当 $c=1$ 时, $M_1^{m+1}(c)=\mathbb{S}_1^{m+1}(1)$; 当 $c=-1$ 时, $M_1^{m+1}(c)=\mathbb{H}_1^{m+1}(-1)$.

球面中子流形的 Möbius 几何已经得到广泛深入的研究, 取得了一些重要的结果, 尤其是对一些特殊的超曲面的完全分类 [2–7,10,13,17]. 洛伦兹空间形式中子流形的共形几何是子流形几何的一个重要分支, 同时也是球面中子流形的 Möbius 几何的自然推广. 然而, 人们对洛伦兹空间形式中子流形的共形几何的研究却不多见 [8,9,11,12,14,15]. 本文研究 $\mathbb{R}_1^{m+1}$ 中拟迷向类空超曲面.

设 $f: M^m\to\mathbb{R}_1^{m+1}$ 是类空超曲面, 则诱导度量 $I=\langle df,df\rangle_1$ 是黎曼度量. 设 $II=\sum_{ij}h_{ij}\theta_i\otimes\theta_j$ 和 $H=\frac{1}{m}\sum_i h_{ii}$ 分别表示第二基本形式和平均曲率, 定义二阶张量

$$g=\frac{m}{m-1}(|II|^2-m|H|^2)I,$$

则二阶张量 g 是超曲面的一个共形不变量. 如果类空超曲面 f 没有脐点, 则二阶张量 g 是正定黎曼度量, 它称为超曲面 f 的共形度量. 如果超曲面的维数 $m\geq 3$, 则超曲面的共形度量 g 和它另一个共形不变量: 共形第二基本形式 B 构成超曲面的在外围空间的共形变换群下的完全不变量系统. 超曲面的另外两个重要的共形不变量是共形 Blaschke 张量 A 和共形 1- 形式 C. 它们的定义见本文第 2 节. 在文 [15] 中, 聂昌雄和吴传喜分类了具有平行共形第二基本形式的类空超曲面. 在文 [11] 中, 李兴校和宋虹儒分类了具有平行 Blaschke 张量的类空超曲面. 在文 [19] 中, 聂昌雄等研究了共形等参类空超曲面, 并分类具有两个不同主曲率的共形等参超曲面. 在文 [8] 中, 李同柱和聂昌雄完全分类了类空共形等参超曲面. 这些结果表明共形第二基本形式 B 和 Blaschke 张量 A 是超曲面的重要不变量. 它们的线性组合 $D=A+\mu B$ 称为拟 Blaschke 张量. 关于拟 Blaschke 张量性质也有一些研究, 但都需要加上共形 1- 形式 C 消失的条件. 在文 [12] 中, 李兴校等给出具有两个常的拟 Blaschke 张量特征值和消失共形 1- 形式的类空超曲面的分类. 在文 [18] 中, 给出了任意个常的拟 -Blaschke 张量特征值和消失共形 1- 形式的类空超曲面的分类. 本文也研究拟 Blaschke 张量, 试图将上面结果中的消失共形 1- 形式条件去掉. 若存在光滑函数 λ, 使得 $D=\lambda g$, 则称之为拟迷向类空超曲面. 本文完全分类了拟迷向类空超曲面, 得到

分类定理 设 $f: M^m\to\mathbb{R}_1^{m+1}$ 是 m $(m\geq 3)$ 维没有脐点的拟迷向类空超曲面:

(I) 若共形 1- 形式消失, 则 M^m 局部上共形等价于 $\mathbb{R}_1^{m+1}$ 中具有常平均曲率常数量曲率的类空超曲面;

(II) 若共形 1- 形式不消失, 则 M^m 局部上共形等价于下列类空超曲面之一:

(1) 类空 (λ,μ) 曲线 $\gamma(s)\subset\mathbb{R}_1^2$ 上的柱面;

(2) 类空 (λ,μ) 曲线 $\gamma(s)\subset\mathbb{S}_1^2$ 上的锥面;

(3) 类空 (λ,μ) 曲线 $\gamma(s)\subset\mathbb{R}_{1+}^2\subset\mathbb{R}_1^2$ 上的旋转面.

洛伦兹双曲平面 $\mathbb{R}_{1+}^2\subset\mathbb{R}_1^2$ 定义如下:

$$\mathbb{R}_{1+}^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,y>0\},$$

并配备洛伦兹度量 $ds^2=\frac{1}{y^2}(-dx^2+dy^2)$. 相应于洛伦兹度量 ds^2, $\mathbb{R}^2_{1+}$ 的高斯曲率 $\epsilon=-1$. 设 $\mathbb{H}^2_1(-1)$ 是 2 维反 de Sitter 球, 则存在标准的等距嵌入

$$\phi:\mathbb{R}^2_{1+}\to\mathbb{H}^2_1(-1),\quad \phi(x,y)=\left(\frac{y^2-x^2+1}{2y},\frac{x}{y},\frac{y^2-x^2-1}{2y}\right). \tag{1.1}$$

定义 1.1 用 $N_1^2(\epsilon)$ 表示 2 维洛伦兹空间形式 $N_1^2(\epsilon)=\mathbb{S}^2_1(1)$, $\mathbb{R}^2_1$, $\mathbb{R}^2_{1+}$ (高斯曲率 $\epsilon=1,0,-1$). 类空 (λ,μ) 曲线 $\gamma:(a,b)\to N_1^2(\epsilon)$ 是由如下内蕴方程确定的类空曲线:

$$\kappa\lambda_s+\left(\mu-\frac{1}{m}\right)\kappa_s=0,$$

其中 s 是弧长参数, κ 是类空曲线 γ 的测地曲率, μ 是常数, λ 是光滑函数. 由于 $N_1^2(\epsilon)$ 是两点齐性空间, 所以对给定的 λ,μ, 解曲线唯一.

注 1.1 由于在不同的洛伦兹空间形式 $M_1^{m+1}(c)$ 之间存在共形映射 (见第 2 节), 因此在不同的洛伦兹空间形式中得到共形几何的结果是一样的. 这样 $m\geq 3$ 时, $\mathbb{S}^{m+1}_1(1)$, $\mathbb{H}^{m+1}_1(-1)$ 中拟迷向类空超曲面也有同样的分类结果.

2 类空超曲面的共形几何

本节给出类空超曲面的共形不变量及结构方程, 更详细的内容参考文 [20].

用 C^{m+2} 表示 $\mathbb{R}^{m+3}_2$ 中的光锥, $\mathbb{Q}^{m+1}_1$ 表示 $\mathbb{R}P^{m+2}$ 中去顶光锥的射影化空间,

$$C^{m+2}=\{X\in\mathbb{R}^{m+3}_2\,|\,\langle X,X\rangle_2=0,X\neq 0\},\quad \mathbb{Q}^{m+1}_1=\{[X]\in\mathbb{R}P^{m+2}\,|\,\langle X,X\rangle_2=0\}.$$

设 $O(m+3,2)$ 是 $\mathbb{R}^{m+3}_2$ 的保持洛伦兹内积 $\langle X,Y\rangle_2$ 不变的洛伦兹群, 则 $O(m+3,2)$ 是 $\mathbb{Q}^{m+1}_1$ 上的一个变换群, 其作用如下:

$$T([X])=[XT],\quad X\in C^{m+2},\quad T\in O(m+3,2).$$

拓扑上 $\mathbb{Q}^{m+1}_1$ 同胚于紧致空间 $S^m\times S^1/S^0$, 其上配有标准洛伦兹度量 $h=g_{S^m}\oplus(-g_{S^1})$, 其中 g_{S^k} 表示 k 维球 S^k 上的标准度量, 则 $\mathbb{Q}^{m+1}_1$ 有共形度量

$$[h]=\{\mathrm{e}^{\tau}h\,|\,\tau\in C^\infty(\mathbb{Q}^{m+1}_1)\},$$

且 $[O(m+3,2)]$ 是 $\mathbb{Q}^{m+1}_1$ 的共形变换群.

记 $P=\{[X]\in\mathbb{Q}^{m+1}_1\,|\,x_1=x_{m+3}\}$, $P_-=\{[X]\in\mathbb{Q}^{m+1}_1\,|\,x_{m+3}=0\}$, $P_+=\{[X]\in\mathbb{Q}^{m+1}_1\,|\,x_1=0\}$, 定义如下共形微分同胚

$$\sigma_0:\mathbb{R}^{m+1}_1\to\mathbb{Q}^{m+1}_1\backslash P,\quad u\mapsto\left[\left(\frac{\langle u,u\rangle_1+1}{2},u,\frac{\langle u,u\rangle_1-1}{2}\right)\right],$$

$$\sigma_1:\mathbb{S}^{m+1}_1(1)\to\mathbb{Q}^{m+1}_1\backslash P_+,\quad u\mapsto[(1,u)],\quad \sigma_{-1}:\mathbb{H}^{m+1}_1(-1)\to\mathbb{Q}^{m+1}_1\backslash P_-,\quad u\mapsto[(u,1)].$$

称 $\mathbb{Q}^{m+1}_1$ 为 $\mathbb{R}^{m+1}_1$, $\mathbb{S}^{m+1}_1(1)$, $\mathbb{H}^{m+1}_1(-1)$ 的共形紧致化空间.

设 $f:M^m\to M_1^{m+1}(c)$ 是类空超曲面. 利用 σ_c, 可以得到 $\mathbb{Q}^{m+1}_1$ 中的超曲面 $\sigma_c\circ f:M^m\to\mathbb{Q}^{m+1}_1$. 因此有

定理 2.1 $f,\tilde{f}:M^m\to M_1^{m+1}(c)$ 共形等价的充要条件是存在 $T\in O(m+3,2)$, 使得

$$\sigma_c\circ f=T(\sigma_c\circ\tilde{f}):M^m\to\mathbb{Q}^{m+1}_1.$$

设 $f:M^m\to M_1^{m+1}(c)$ 是类空超曲面, 则 $(\sigma_c\circ f)_*(TM^m)$ 是 $T\mathbb{Q}^{m+1}_1$ 的正定子丛. 任给标准投射 $\pi:C^{m+2}\to\mathbb{Q}^{m+1}_1$ 的局部提升 Z, 存在 $\sigma_c\circ f:M\to\mathbb{Q}^{m+1}_1$ 的局部提升 $y=Z\circ\sigma_c\circ f:$

$U \to C^{m+1}$. 因此 $\langle dy, dy\rangle_2 = \rho^2 \langle dx, dx\rangle_s$ 是局部度量, 其中 $\rho \in C^\infty(U)$. 用 Δ 和 κ 分别表示相应于局部度量 $\langle dy, dy\rangle$ 的拉普拉斯和法化数量曲率. 类似于文 [17, 定理 1.2] 的证明, 可得

定理 2.2 设 $f: M^m \to M_1^{m+1}(c)$ 是类空超曲面, 则 $g = -(\langle \Delta y, \Delta y\rangle_2 - m^2\kappa)\langle dy, dy\rangle_2$ 是一个整体定义的共形不变量, 且 g 在非脐点处是正定的.

我们称 g 为类空超曲面 M^m 的共形度量, 存在唯一的提升

$$Y: M \to C^{m+2},$$

使得 $g = \langle dY, dY\rangle_2$. 称 Y 是类空超曲面 M^m 的共形位置向量. 由定理 2.2 得:

定理 2.3 两个超曲面 $f, \tilde{f}: M^m \to M_1^{m+1}(c)$ 共形等价的充要条件是存在 $T \in O(m+3, 2)$, 使得 $\tilde{Y} = YT$, 其中 $Y, \tilde{Y}$ 分别是 $f, \tilde{f}$ 的共形位置向量.

设 $\{E_1, \ldots, E_m\}$ 是 M^m 上相应于 g 的局部正交基, 其对偶为 $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$. 记 $Y_i = E_i(Y)$ 且定义

$$N = -\frac{1}{m}\Delta Y - \frac{1}{2m^2}\langle \Delta Y, \Delta Y\rangle_2 Y,$$

其中 Δ 是相应于 g 的拉普拉斯算子, 有

$$\langle N, Y\rangle_2 = 1, \quad \langle N, N\rangle_2 = 0, \quad \langle N, Y_k\rangle_2 = 0, \quad \langle Y_i, Y_j\rangle_2 = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j, k \le m,$$

则 $\mathbb{R}_2^{m+3}$ 有如下分解:

$$\mathbb{R}_2^{m+3} = \mathrm{span}\{Y, N\} \oplus \mathrm{span}\{Y_1, \ldots, Y_m\} \oplus \mathbb{V},$$

其中 $\mathbb{V} \perp \mathrm{span}\{Y, N, Y_1, \ldots, Y_m\}$. 称 $\mathbb{V}$ 为 f 的共形法丛. 设 ξ 是 $\mathbb{V}$ 的局部截面且 $\langle \xi, \xi\rangle_2 = -1$, 则 $\{Y, N, Y_1, \ldots, Y_m, \xi\}$ 是 $\mathbb{R}_2^{m+3}$ 中定义在 M^m 上的活动标架. 结构方程如下:

$$\begin{aligned}
&dY = \sum_i \omega_i Y_i, \quad dN = \sum_{ij} A_{ij}\omega_j Y_i + \sum_i C_i \omega_i \xi,\\
&dY_i = -\sum_j A_{ij}\omega_j Y - \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} Y_j + \sum_j B_{ij}\omega_j \xi,\\
&d\xi = \sum_i C_i \omega_i Y + \sum_{ij} B_{ij}\omega_j Y_i,
\end{aligned}$$

其中 $\omega_{ij} (= -\omega_{ji})$ 是 M^m 上相应于 $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ 的联络. 显然 $A = \sum_{ij} A_{ij}\omega_j \otimes \omega_i$, $B = \sum_{ij} B_{ij}\omega_j \otimes \omega_i$, $C = \sum_i C_i \omega_i$ 是整体定义的共形不变量. 称 A, B 和 C 分别是共形 Blaschke 张量, 共形第二基本形式, 共形 1- 形式. 这些张量的共变导数定义为

$$\begin{aligned}
&\sum_j C_{i,j}\omega_j = dC_i + \sum_k C_k \omega_{kj},\\
&\sum_k A_{ij,k}\omega_k = dA_{ij} + \sum_k A_{ik}\omega_{kj} + \sum_k A_{kj}\omega_{ki},\\
&\sum_k B_{ij,k}\omega_k = dB_{ij} + \sum_k B_{ik}\omega_{kj} + \sum_k B_{kj}\omega_{ki},
\end{aligned}$$

对结构方程求外微分得

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad B_{ij} = B_{ji},$$

$$A_{ij,k} - A_{ik,j} = B_{ij}C_k - B_{ik}C_j, \tag{2.1}$$

$$B_{ij,k} - B_{ik,j} = \delta_{ij}C_k - \delta_{ik}C_j, \tag{2.2}$$

$$
\begin{aligned}
&C_{i,j} - C_{j,i} = \sum_k (B_{ik}A_{kj} - B_{jk}A_{ki}),\\
&R_{ijkl} = B_{il}B_{jk} - B_{ik}B_{jl} + A_{ik}\delta_{jl} + A_{jl}\delta_{ik} - A_{il}\delta_{jk} - A_{jk}\delta_{il},
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

且有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{2m}(m^2\kappa - 1), \quad R_{ij} = \mathrm{tr}(A)\delta_{ij} + (m-2)A_{ij} + \sum_k B_{ik}B_{kj},\\
&(1-m)C_i = \sum_j B_{ij,j}, \quad \sum_i B_{ii} = 0, \quad \sum_{ij} B_{ij}^2 = \frac{m-1}{m},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

其中 κ 是 g 的法化数量曲率. 由上可知当 $m \geq 3$ 时, 结构方程中的系数由共形度量 g 和共形第二基本形式 B 确定, 因此我们有:

定理 2.4 两个超曲面 $f, \tilde{f} : M^m \to M_1^{m+1}(c)$ 共形等价的充要条件是它们有相同的共形度量 g 和共形第二基本形式 B.

下面给出 $\mathbb{R}_1^{m+1}$ 中类空超曲面的共形不变量和等距不变量之间的关系.

设 $f : M^m \to \mathbb{R}_1^{m+1}$ 是类空超曲面, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ 是相应于诱导度量 $I = \langle df, df\rangle_1$ 的局部正交基, 其对偶为 $\{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$. 设 e_{m+1} 是 f 的法向量场, 且 $\langle e_{m+1}, e_{m+1}\rangle_1 = -1$. $II = \sum_{ij} h_{ij}\theta_i \otimes \theta_j$ 和 $H = \frac{1}{m}\sum_i h_{ii}$ 分别表示第二基本形式和平均曲率. 用 Δ_M 和 κ_M 分别表示相应于 I 的拉普拉斯和法化数量曲率. 由 $f : M^m \to \mathbb{R}_1^{m+1}$ 的结构方程可得

$$
\Delta_M f = mHe_{m+1}. \tag{2.4}
$$

f 的局部提升

$$
y : M^m \to C^{m+2}, \quad y = \left(\frac{\langle f, f\rangle_1 + 1}{2}, f, \frac{\langle f, f\rangle_1 - 1}{2}\right).
$$

由 (2.4) 得

$$
\langle \Delta y, \Delta y\rangle_2 - m^2\kappa_M = \frac{m}{m-1}(-|II|^2 + m|H|^2) = -\mathrm{e}^{2\tau}.
$$

因此 f 的共形度量 g, 共形位置向量 Y 及 ξ 可表示为

$$
\xi = -Hy + (\langle f, e_{m+1}\rangle_1, e_{m+1}, \langle f, e_{m+1}\rangle_1). \tag{2.5}
$$

$$
g = \frac{m}{m-1}(|II|^2 - m|H|^2)\langle df, df\rangle_1 := \mathrm{e}^{2\tau} I, \quad Y = \mathrm{e}^{\tau} y. \tag{2.6}
$$

直接计算可得

$$
A_{ij} = \mathrm{e}^{-2\tau}\left[\tau_i\tau_j - h_{ij}H - \tau_{i,j} + \frac{1}{2}(-|\nabla\tau|^2 + |H|^2)\delta_{ij}\right], \tag{2.7}
$$

$$
B_{ij} = \mathrm{e}^{-\tau}(h_{ij} - H\delta_{ij}), \quad C_i = \mathrm{e}^{-2\tau}\left(H\tau_i - H_i - \sum_j h_{ij}\tau_j\right), \tag{2.8}
$$

其中 $\tau_i = e_i(\tau)$, $|\nabla\tau|^2 = \sum_i \tau_i^2$, $\tau_{i,j}$ 是 τ 相应于度量 I 的 Hessian 矩阵的分量, $H_i = e_i(H)$.

3 典型的例子

本节将构造一些拟迷向类空超曲面的例子.

例 3.1 设 $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}_1^2$ 是一个类空曲线. 曲线 $\gamma(s) \subset \mathbb{R}_1^2$ 上的柱面定义如下:

$$
f : (a, b) \times \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}_1^{m+1}, \quad f(s, y) = (\gamma(s), y),
$$

其中 $y \in \mathbb{R}^{m-1}$, 则柱面 f 是 $\mathbb{R}_1^{m+1}$ 中的类空超曲面.

柱面 f 的第一基本形式, 第二基本形式分别为

$$I = ds^2 + I_{\mathbb{R}^{m-1}}, \quad II = \kappa ds^2,$$

其中 $\kappa(s)$ 是曲线 $\gamma(s) \subset \mathbb{R}_1^2$ 的测地曲率, $I_{\mathbb{R}^{m-1}}$ 表示 $(m-1)$- 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{m-1}$ 的标准度量. 所以柱面的主曲率为 $(\kappa, 0, \ldots, 0)$, 平均曲率 $H = \frac{\kappa}{m}$. 相应于度量 I, 取基 $e_1 = \frac{\partial}{\partial s}$, $e_\alpha = \frac{\partial}{\partial u_\alpha}$, $\alpha = 2, \ldots, m$, 由 (2.6)–(2.8) 可得

$$g = \kappa(s)^2(ds^2 + I_{\mathbb{R}^{m-1}}), \quad C_1 = -\frac{\kappa_s}{\kappa^2}, \quad C_2 = \cdots = C_m = 0,$$

$$(B_{ij}) = \mathrm{diag}\left(\frac{m-1}{m}, -\frac{1}{m}, \ldots, -\frac{1}{m}\right), \quad (A_{ij}) = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_2), \quad (D_{ij}) = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_2),$$

其中

$$d_1 = a_1 + \frac{m-1}{m}\mu = \frac{3\kappa_s^2}{2\kappa^4} - \frac{\kappa_{ss}}{\kappa^3} - \frac{2m-1}{2m^2} + \frac{m-1}{m}\mu, \quad d_2 = a_2 - \frac{1}{m}\mu = -\frac{\kappa_s^2}{2\kappa^4} + \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{m}\mu.$$

若柱面是拟迷向的, 即 $d_1 = d_2$, 则

$$\frac{2\kappa_s^2}{\kappa^4} - \frac{\kappa_{ss}}{\kappa^3} - \frac{1}{m} + \mu = 0.$$

又由 $d_2 = \lambda$, 得 $\lambda = -\frac{\kappa_s^2}{2\kappa^4} + \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{m}\mu$. 两边同时对 s 求导, 得 $\frac{\kappa_{ss}}{\kappa^3} = -\frac{\kappa\lambda_s}{\kappa_s} + \frac{2\kappa_s^2}{\kappa^4} - \frac{\kappa\mu_s}{m\kappa_s}$. 代入上式得

$$\kappa\lambda_s + \left(\mu - \frac{1}{m}\right)\kappa_s = 0.$$

这样, 我们有如下结论:

命题 3.1 例 3.1 中柱面 f 是拟迷向类空超曲面的充要条件是 $\gamma(s)$ 是 $\mathbb{R}_1^2$ 中的类空 (λ, μ) 曲线.

例 3.2 设 $\gamma : (a, b) \to \mathbb{S}_1^2(1)$ 是一个类空曲线. 曲线 $\gamma(s) \subset \mathbb{S}_1^2(1) \subset \mathbb{R}_1^3$ 上的锥面定义如下:

$$f : (a, b) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{m-2} \to \mathbb{R}_1^{m+1}, \quad f(s, t, y) = (t\gamma(s), y),$$

其中 $y \in \mathbb{R}^{m-2}$, $\mathbb{R}^+ = \{t \,|\, t > 0\}$, 则锥面 f 是类空超曲面.

锥 f 的第一基本形式, 第二基本形式分别为

$$I = t^2 ds^2 + I_{\mathbb{R}^{m-1}}, \quad II = t\kappa ds^2,$$

因此, 锥的主曲率为 $(\frac{\kappa}{t}, 0, \ldots, 0)$, 平均曲率 $H = \frac{\kappa}{mt}$. 由 (2.6) 可得锥 f 的共形位置向量

$$Y = \kappa\left(\frac{t^2 + |y|^2 + 1}{2t}, \gamma(s), \frac{y}{t}, \frac{t^2 + |y|^2 - 1}{2t}\right).$$

因为 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{m-2} = \mathbb{H}^{m-1}$ 是具有标准双曲度量的上半空间, 所以

$$i(t, y) = \left(\frac{t^2 + |y|^2 + 1}{2t}, \frac{y}{t}, \frac{t^2 + |y|^2 - 1}{2t}\right) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{m-2} = \mathbb{H}^{m-1} \to \mathbb{H}^{m-1} \subset \mathbb{R}_1^m \tag{3.1}$$

恰好是 $\mathbb{H}^{m-1}$ 上的恒同映射. 由 (2.6) 可得, 锥 f 的共形度量

$$g = \frac{\kappa^2}{t^2}(t^2 ds^2 + I_{\mathbb{R}^{m-1}}) = \kappa^2(ds^2 + I_{\mathbb{H}^{m-1}}),$$

其中 $I_{\mathbb{H}^{m-1}}$ 表示 $\mathbb{H}^{m-1}$ 上的标准双曲度量. 由 (2.7) 和 (2.8) 可得

$C_1 = -\frac{\kappa_s}{\kappa^2}, \quad C_2 = \ldots = C_m = 0,$

$(B_{ij}) = \mathrm{diag}\left(\frac{m-1}{m}, -\frac{1}{m}, \ldots, -\frac{1}{m}\right), \quad (A_{ij}) = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_2), \quad (D_{ij}) = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_2),$

这里

$$d_1 = a_1 + \frac{m-1}{m}\mu = \frac{3\kappa_s^2}{2\kappa^4} - \frac{\kappa_{ss}}{\kappa^3} - \frac{2m-1}{2m^2} + \frac{1}{2\kappa^2} + \frac{m-1}{m}\mu,$$
$$d_2 = a_2 - \frac{1}{m}\mu = -\frac{\kappa_s^2}{2\kappa^4} + \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2\kappa^2} - \frac{1}{m}\mu.$$

若锥面 f 是拟迷向的, 即 $d_1 = d_2 = \lambda$, 则

$$\kappa\lambda_s + \left(\mu - \frac{1}{m}\right)\kappa_s = 0.$$

这样, 我们有如下结论:

命题 3.2 例 3.2 中锥面 f 是拟迷向的充要条件是 $\gamma(s)$ 是 $\mathbb{S}_1^2$ 中的类空 (λ, μ) 曲线.

例 3.3 设 $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}_{1+}^2$ 是一个类空曲线. 在 $\gamma(s) \subset \mathbb{R}_{1+}^2$ 上的旋转超曲面定义如下:

$$f : (a, b) \times \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{R}_1^{m+1}, \quad f(s, \theta) = (x(s), y(s)\theta),$$

这里 $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$ 是标准圆球, $\gamma(s) = (x(s), y(s)) \subset \mathbb{R}_{1+}^2$, 则旋转超曲面 f 是类空超曲面.

用 D 表示 $\mathbb{R}_{1+}^2$ 中度量 ds^2 的协变导数, 取正交基 $e_1 = y\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$. 经计算得

$$D_{e_1}e_1 = -e_2, \quad D_{e_1}e_2 = -e_1, \quad D_{e_2}e_1 = D_{e_2}e_2 = 0,$$

对 $\gamma(s) = (x(s), y(s)) \subset \mathbb{R}_{1+}^2$, 用 $\dot{x}$ 表示导数 $\frac{\partial x}{\partial s}$. 取单位切向量 $\alpha = \frac{1}{y}(\dot{x}e_1 + \dot{y}e_2)$, 单位法向量 $\beta = \frac{1}{y}(\dot{y}e_1 + \dot{x}e_2)$, 测地曲率

$$\kappa(s) = \langle D_\alpha\alpha, \beta\rangle = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{y^2} + \frac{\dot{x}}{y}.$$

旋转超曲面 f 有单位法向量 $\eta = \frac{1}{y}(\dot{y}, \dot{x}\theta)$, 第一基本形式, 第二基本形式分别为

$$I = df \cdot df = y^2(ds^2 + I_{\mathbb{S}^{m-1}}), \quad II = -df \cdot d\eta = (y\kappa - \dot{x})ds^2 - \dot{x}I_{\mathbb{S}^{m-1}}.$$

主曲率为 $\frac{y\kappa - \dot{x}}{y^2}, -\frac{\dot{x}}{y^2}, \ldots, -\frac{\dot{x}}{y^2}$. 由 (2.6)–(2.8) 得

$g = \kappa(s)^2(ds^2 + I_{S^{m-1}}), \quad C_1 = -\frac{\kappa_s}{\kappa^2}, \quad C_2 = \ldots = C_m = 0,$

$(B_{ij}) = \mathrm{diag}\left(\frac{m-1}{m}, -\frac{1}{m}, \ldots, -\frac{1}{m}\right), \quad (A_{ij}) = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_2), \quad (D_{ij}) = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_2),$

这里

$$d_1 = a_1 + \frac{m-1}{m}\mu = \frac{3\kappa_s^2}{2\kappa^4} - \frac{\kappa_{ss}}{\kappa^3} - \frac{2m-1}{2m^2} - \frac{1}{2\kappa^2} + \frac{m-1}{m}\mu,$$
$$d_2 = a_2 - \frac{1}{m}\mu = -\frac{\kappa_s^2}{2\kappa^4} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{2\kappa^2} - \frac{1}{m}\mu.$$

若旋转超曲面 f 是拟迷向的, 即 $d_1 = d_2 = \lambda$, 则

$$\kappa\lambda_s + \left(\mu - \frac{1}{m}\right)\kappa_s = 0.$$

这样, 我们有如下结论:

命题 3.3 例 3.3 中旋转超曲面 f 是拟迷向的充要条件是 $\gamma(s)$ 是 $\mathbb{R}^2_{1+}$ 中的类空 (λ,μ)曲线.

4 分类定理的证明

引理 4.1 设 $f: M^m \to \mathbb{R}^{m+1}_1$ 是类空超曲面且满足 $A+\mu B=\lambda g$, 其中 μ 是常数, λ 是光滑函数, 若共形 1- 形式 $C\neq 0$, 则可取相应于共形度量 g 的标准正交基 $\{E_1,\ldots,E_m\}$, 使得

$$\begin{aligned}&(B_{ij})=\mathrm{diag}\left(\frac{m-1}{m},-\frac{1}{m},\ldots,-\frac{1}{m}\right),\quad \omega_{1\alpha}=-C_1\omega_\alpha,\\&C_2=\cdots=C_m=0,\quad C_{\alpha,\alpha}=-(C_1)^2,\quad \alpha\geq 2,\\&A_{1\alpha}=C_{1,\alpha},\quad A_{\alpha\beta}=a_2\delta_{\alpha\beta},\\&E_1(a_2)=\left(a_2-a_1-\frac{1}{n}\right)C_1,\quad E_\alpha(a_2)=0,\quad \alpha\geq 2.\end{aligned}$$

证明 由 B 是对称张量, 可取标准正交基 $\{E_i\,|\,1\leq i\leq m\}$, 使得

$$B_{ij}=b_i\delta_{ij},\quad 1\leq i,\,j\leq m. \tag{4.1}$$

$D=\sum_{i,j}D_{ij}\omega_i\wedge\omega_j$, 其中

$$D_{ij}=A_{ij}+\mu B_{ij},\quad 1\leq i,\,j\leq m. \tag{4.2}$$

定义

$$dD_{ij}+\sum_k D_{kj}\omega_{ki}+\sum_k D_{ik}\omega_{kj}=\sum_k D_{ij,k}\omega_k. \tag{4.3}$$

由 (4.2) 得

$$D_{ij,k}=A_{ij,k}+\mu B_{ij,k},\quad D_{ij,k}-D_{ik,j}=(A_{ij,k}-A_{ik,j})+\mu(B_{ij,k}-B_{ik,j}). \tag{4.4}$$

由 (2.1), (2.2) 及 (4.4), 得

$$\lambda_k\delta_{ij}-\lambda_j\delta_{ik}=(\mu\delta_{ij}+B_{ij})C_k-(\mu\delta_{ik}+B_{ik})C_j,\quad 1\leq i,j,k\leq m. \tag{4.5}$$

在 (4.5) 中令 $i=j\neq k$, 得

$$\lambda_k=(\mu+B_{ii})C_k,\quad i\neq k. \tag{4.6}$$

在 (4.5) 中令 $i=j$ 并对 i 求和, 得

$$(m-1)\lambda_k=[(m-1)\mu-B_{kk}]C_k,\quad 1\leq k\leq m. \tag{4.7}$$

由 (4.6) 及 (4.7) 得

$$[(m-1)B_{ii}+B_{kk}]\lambda_k=0,\quad i\neq k. \tag{4.8}$$

当 λ 不是常值函数时, $\nabla\lambda\neq 0$, 不妨设 $\lambda_1\neq 0$. 由 (4.8) 和 (2.3) 得

$$b_1=\frac{m-1}{m},\quad b_i=-\frac{1}{m},\quad 2\leq i\leq m. \tag{4.9}$$

当 λ 是常值函数时, 由 (4.6) 得 $(\mu+B_{ii})C_j=0$, $i\neq j$.

由共形 1- 形式 $C=\sum_i C_i\omega_i\neq 0$, 不妨设 $C_1\neq 0$, 由上式得 $b_2=b_3=\cdots=b_m=-\mu$, 结合 (2.3) 得

$$b_1=\frac{m-1}{m},\quad b_i=-\frac{1}{m}=-\mu,\quad 2\leq i\leq m.$$

下面约定 $1 \le i, j, k \le m$, $2 \le \alpha, \beta, \gamma \le m$. 由定义 $dB_{ij} + \sum_k B_{kj}\omega_{ki} + \sum_k B_{ik}\omega_{kj} = \sum_k B_{ij,k}\omega_k$ 和 (4.1) 可得

$$B_{1\alpha,\alpha} = -C_1, \quad 2 \le \alpha \le m; \quad B_{1j,k} = 0, \quad j \ne k,$$
$$\omega_{1\alpha} = -C_1\omega_\alpha, \quad C_\alpha = 0, \quad 2 \le \alpha \le m. \tag{4.10}$$

利用 $dC_i + \sum_k C_k\omega_{ki} = \sum_k C_{i,k}\omega_k$ 和 (4.10) 可得

$$C_{\alpha,\alpha} = -(C_1)^2; \quad C_{\alpha,k} = 0\ (\alpha \ne k).$$

利用 $d\omega_{1\alpha} - \sum_j \omega_{1j} \wedge \omega_{j\alpha} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{1\alpha kl}\omega_k \wedge \omega_l$ 和 (4.10), 我们得到

$$d\omega_{1\alpha} = -dC_1 \wedge \omega_\alpha - C_1 d\omega_\alpha = -dC_1 \wedge \omega_\alpha - C_1^2\omega_\alpha \wedge \omega_1 - C_1\sum_\gamma \omega_\gamma \wedge \omega_{\gamma\alpha}.$$

因此有

$$R_{1\alpha1\alpha} = C_{1,1} - (C_1)^2, \quad R_{1\alpha\beta\alpha} = C_{1,\beta}.$$

又由 $R_{1\alpha1\alpha} = \frac{n-1}{n^2} + a_1 + a_\alpha = C_{1,1} - (C_1)^2$, 得

$$a_2 = a_3 = \cdots = a_m.$$

在此标架下, $(A_{ij}) = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_2)$, 利用 $dA_{ij} + \sum_k A_{kj}\omega_{ki} + \sum_k A_{ik}\omega_{kj} = \sum_k A_{ij,k}\omega_k$, 我们得到

$$(a_1 - a_2)(-C_1) = A_{12,2}, \quad A_{\alpha\beta,\alpha} = 0.$$

利用此结果和 (2.1), 我们得到 $E_1(a_2) = (a_2 - a_1 - \frac{1}{m})C_1$, $E_\alpha(a_2) = 0$, $\alpha \ge 2$. 引理 4.1 证毕.

从引理 4.1 可知分布

$$D_1 = \mathrm{span}\{E_1\}, \quad D_2 = \mathrm{span}\{E_2, E_3, \ldots, E_m\}$$

可积. 分别记分布 D_1 的积分子流形为曲线 γ, 分布 D_2 的积分子流形为 $(m-1)$ 维子流形 L, 则局部上, $M^m = \gamma \times L$.

在引理 4.1 的正交基 $\{E_1, \ldots, E_m\}$ 下, $\{Y, N, Y_1, \ldots, Y_m, \xi\}$ 是 $\mathbb{R}^{m+3}_2$ 的定义在 M^m 上的一组标架. 定义

$$F = -\frac{1}{m}Y - \xi, \quad X_1 = -C_1Y - Y_1, \quad P = a_2Y - N - C_1X_1 + \frac{1}{m}F.$$

因此有

$$\langle F, F\rangle = -1, \ \langle X_1, X_1\rangle = 1, \ \langle P, X_1\rangle = 0, \ \langle F, P\rangle = 0, \tag{4.11}$$
$$\langle P, P\rangle = \frac{1}{m^2} - C_1^2 - 2a_2 := -Q, \quad \langle X_1, F\rangle = 0. \tag{4.12}$$

由引理 4.1 及 f 的结构方程得

$$E_1(F) = X_1, \quad E_\alpha(F) = 0,$$
$$E_1(X_1) = -P + F, \quad E_\alpha(X_1) = 0,$$
$$E_1(P) = C_1P - QX_1, \quad E_\alpha(P) = 0. \tag{4.13}$$

因此 $V_1 = \mathrm{span}\{F, X_1, P\}$ 沿着 M^m 是固定子空间. 从 $Q = -\langle P, P\rangle$ 得

$$E_1(Q) = 2C_1Q, \quad E_\alpha(Q) = 0. \tag{4.14}$$

定义 $T=a_2Y+N-C_1Y_1+\frac{1}{m}\xi$, 则

$$T\perp V_1,\quad \langle T,T\rangle=Q,\quad \langle T,Y_\alpha\rangle=0,\quad 2\leq\alpha\leq m.$$

由 (4.14), 引理 4.1 及 f 的结构方程, 得

$$\begin{aligned}&E_\alpha(T)=QY_\alpha,\quad E_1(T)=C_1T,\quad E_1(Y_\alpha)=\sum_\beta\omega_{\alpha\beta}(E_1)Y_\beta,\\&E_\alpha(Y_\alpha)=\sum_\beta\omega_{\alpha\beta}(E_\alpha)Y_\beta+T,\quad E_\beta(Y_\alpha)=\sum_\gamma\omega_{\alpha\gamma}(E_\beta)Y_\gamma,\quad \alpha\neq\beta.\end{aligned}\tag{4.15}$$

因此, $V_2=\operatorname{span}\{T,Y_2,Y_3,\dots,Y_m\}$ 沿着 M^m 是固定子空间, 且 $V_1\perp V_2$.

由一阶线性常微分方程理论及 (4.14) 得, 在开子集 $U\subset M^m$ 上 $Q\equiv0$ 或 $Q\neq0$. 因此需要考虑下面三种情形:

情形 1 在 M^m 上 $Q\equiv0$;

情形 2 在 M^m 上 $Q<0$;

情形 3 在 M^m 上 $Q>0$.

命题 4.1 设 $f:M^m\to\mathbb{R}^{m+1}_1$ $(m\geq3)$ 是情形 1 中的类空超曲面, 则局部上 f 共形等价于类空 (λ,μ) 曲线 $\gamma(s)\subset\mathbb{R}^2_1$ 上的柱面.

证明 由 $Q\equiv0$ 得 $\langle P,P\rangle=0$. 由 (4.13) 知 P 确定一个固定方向. 因此, 在共形变换下可将固定方向 $P\in\mathbb{R}^{m+3}_2$ 及常子空间 $V_1\subset\mathbb{R}^{m+3}_2$ 写成

$$P=(1,0,\dots,0,1),\quad V_1=\operatorname{span}\{F,X_1,P\}=\operatorname{span}\{(0,1,0,\dots,0),\ (0,0,1,0,\dots,0),\ (1,0,\dots,0,1)\}.$$

由 (4.11) 得

$$\langle F,P\rangle=\langle F,(1,0,0,\dots,0,1)\rangle=0,\quad \langle X_1,P\rangle=\langle X_1,(1,0,0,\dots,0,1)\rangle=0.\tag{4.16}$$

设 $\{\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_2\}$ 是类空超曲面 f 的主曲率, 则 $\mathrm{e}^\tau=|\kappa_1-\kappa_2|$. 相应于度量 $I=df\cdot df$ 取 TM^m 的正交基 $\{e_1,\dots,e_m\}$, 使得

$$(h_{ij})=\operatorname{diag}\{\kappa_1,\ \kappa_2,\dots,\kappa_2\},$$

$\{E_i=\mathrm{e}^{-\tau}e_i,1\leq i\leq m\}$ 是 TM^m 的相应于共形度量 g 的正交基. 由 (2.5), (2.6) 和 (4.16), 可得

$$\kappa_2=0,\quad E_1(\tau)=-C_1.\tag{4.17}$$

又 $\langle Y_\alpha,P\rangle=0$ 意味着

$$E_\alpha(\tau)=0.\tag{4.18}$$

设 $\{\tilde\omega_1,\dots,\tilde\omega_m\}$ 是 $\{e_1,\dots,e_m\}$ 的对偶基, $\{\tilde\omega_{ij}\}$ 是相应的联络. 由 $\omega_i=\mathrm{e}^\tau\tilde\omega_i,\ 1\leq i\leq m$, 可得

$$\omega_{ij}=\tilde\omega_{ij}+e_i(\tau)\tilde\omega_j-e_j(\tau)\tilde\omega_i.$$

由 (4.17) 和 (4.18), 得

$$\tilde\omega_{1\alpha}=0.$$

因此, 类空超曲面 f 共形等价于例 3.1 中的柱面, 结合命题 3.1, 可得命题 4.1. 证毕.

命题 4.2 设 $f:M^m\to\mathbb{R}^{m+1}_1$ $(m\geq3)$ 是情形 2 中的类空超曲面, 则 f 共形等价于类空 (λ,μ) 曲线 $\gamma(s)\subset\mathbb{S}^2_1$ 上的锥面.

证明 由 $Q<0$ 及 (4.11) 知, P 是 $\mathbb{R}_2^{m+3}$ 中的类空向量. 在共形变换下可记

$$V_1=\mathrm{span}\{F,X_1,P\}=\mathrm{span}\{(0,1,0,\dots,0),\ (0,0,1,0,\dots,0),\ (0,0,0,1,\dots,0)\}.$$

设 f 有主曲率 $\{\kappa_1,\ \kappa_2,\dots,\kappa_2\}$. 由 $e=(1,0,\dots,0,1)\perp V$, 得 $\langle F,e\rangle=\langle X_1,e\rangle=0$. 计算得

$$\kappa_2=0,\quad E_1(\tau)=-C_1.$$

由 (2.6) 得 $\mathrm{e}^{2\tau}=\kappa_1^2$. 记

$$\bar{P}=\frac{P}{\sqrt{-C_{1,1}}},\quad \theta=\frac{T}{\sqrt{-C_{1,1}}},$$

则 $\langle\bar{P},\bar{P}\rangle=1$, $\langle\theta,\theta\rangle=-1$. 由 (4.13) 可知

$$\bar{P}:\gamma\to\mathbb{S}_1^2\subset R_1^3=V_1$$

是曲线, 由 (4.15) 知

$$\theta:L\to\mathbb{H}^{m-1}\subset\mathbb{R}_1^m$$

是标准嵌入且 $\theta(L)$ 的截面曲率是 -1. 由 $\dim L=\dim\mathbb{H}^{m-1}=m-1$ 知 $\theta:L\to\mathbb{H}^{m-1}$ 是标准的等距同构. 由 (3.1) 得标准等距同构

$$\theta:L\to\mathbb{H}^{m-1}=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{m-2}.$$

因为 $P+T=-C_{1,1}Y$,

$$Y=\frac{1}{\sqrt{-C_{1,1}}}(\bar{P},\theta):M^m=\gamma\times L\to\mathbb{S}_1^2\times\mathbb{H}^{m-1}=\mathbb{S}_1^2\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{m-2}\subset\mathbb{R}_1^{m+3},$$

所以

$$g=\langle dY,dY\rangle=-\frac{1}{C_{1,1}}(ds^2+I_{\mathbb{H}^{m-1}}).$$

因此, 类空超曲面 f 共形等价于例 3.2 中的超曲面, 结合命题 3.2, 可得命题 4.2. 证毕.

命题 4.3 设 $f:M^m\to\mathbb{R}_1^{m+1}$ $(m\geq 3)$ 是情形 3 中的类空超曲面, 则 f 共形等价于类空 (λ,μ) 曲线 $\gamma(s)\subset\mathbb{R}_{1+}^2\subset\mathbb{R}_1^2$ 上的旋转面.

证明 由 $Q>0$ 得 $\langle P,P\rangle<0$. 因此在共形变换下可记

$$V_1=\mathrm{span}\{F,X_1,P\}=\mathrm{span}\{(1,0,\dots,0),\ (0,\dots,0,1),\ (0,1,0,\dots,0)\}.$$

因而 $e=(1,0,\dots,0,1)\in V_1$, $\langle Y_\alpha,e\rangle=0$, $2\leq\alpha\leq m$,

$$E_\alpha(\tau)=0,\quad 2\leq\alpha\leq m.$$

记 $\bar{P}=\frac{P}{\sqrt{C_{1,1}}}$, $\theta=\frac{T}{\sqrt{C_{1,1}}}$, 则

$$\langle\bar{P},\bar{P}\rangle=-1,\quad \langle\theta,\theta\rangle=1.$$

由 (4.13) 知 $\bar{P}:\gamma\to\mathbb{H}_1^2\subset\mathbb{R}_2^3=V_1$ 是曲线. 由 (4.15) 知 $\theta:L\to\mathbb{S}^{m-1}\subset\mathbb{R}^m$ 是标准嵌入且 $\theta(L)$ 的截面曲率是 1. 由 $\dim L=m-1$ 知 $\theta:L\to\mathbb{S}^{m-1}$ 是标准的等距同构. 由 $P+T=-C_{1,1}Y$, 得

$$Y=-\frac{1}{\sqrt{C_{1,1}}}(\bar{P},\theta):\gamma\times L\to\mathbb{H}_1^2\times\mathbb{S}^{m-1}.$$

记 $\bar{P}=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{H}_1^2$, 则

$$Y=\frac{u_3-u_1}{\sqrt{C_{1,1}}}\left(\frac{u_1}{u_1-u_3},\frac{u_2}{u_1-u_3},\frac{u_3}{u_1-u_3},\frac{\theta}{u_1-u_3}\right).$$

因此, 超曲面 $f:(a,b)\times\mathbb{S}^{m-1}\to R_1^{m+1}$ 可由下式给出:

$$f=\left(\frac{u_2}{u_1-u_3},\frac{\theta}{u_1-u_3}\right).$$

注意到

$$\varphi(u_1,u_2,u_3)=\left(\frac{u_2}{u_1-u_3},\frac{1}{u_1-u_3}\right)$$

恰好是通常的局部等距对应 $\phi:\mathbb{R}^2_{1+}\to\mathbb{H}^2_1$ 的逆映射 (见 (1.1)). 这意味着类空超曲面 f 共形等价于例 3.3 中的超曲面, 结合命题 3.3, 得到命题 4.3. 证毕.

当共形形式 $C=0$ 时, 由文 [9] 可得 M^m 局部上共形等价于 $\mathbb{R}^{m+1}_1$ 中具有常平均曲率常数量曲率的类空超曲面; 当共形形式 $C=0$ 时, 结合命题 4.1–4.3, 可得到分类定理.

参 考 文 献

[1] Cahen M., Kerbrat Y., Domaines symmétriques des quadriques projectives, *J. Math. Pure Appl.*, 1983, **62**: 327–348.

[2] Cheng Q. M., Li X. X., Qi X. R., A classification of hypersurfaces with parallel para-Blaschke tensor in S^{m+1}, *Int. J. Math.*, 2010, **21**: 297–316.

[3] Guo Z., Fang J. B., Lin L. M., Hypersurfaces with isotropic Blaschke tensor, *J. Math. Soc. Japan*, 2011, **4**: 1155–1186.

[4] Guo Z., Li H., Wang C. P., The Möbius characterizations of Willmore tori and Veronese submanifolds in unit sphere, *Pacific J. Math.*, 2009, **241**: 227–242.

[5] Fang J. B., Zhang K., Hypersurfaces with isotropic para-Blaschke tensor, *Acta Math. Sinica, English Series*, 2014, **30**(7): 1195–1209.

[6] Hu Z. J., Li H. Z., Classification of hypersurfaces with parallel Möbius second fundamental form in S^{n+1}, *Sci. China Ser. A*, 2004, **47**: 417–430.

[7] Ji X., Li T. Z., Sun H. F., Para-Blaschke isoparametric spacelike hypersurfaces in Lorentzian space forms, *Houston Journal of Mathematics*, 2019, **45**(3): 685–706.

[8] Li F. J., Fang J. B., Liang L., Surfaces with isotropic Blaschke tensor in S^3, *Acta Math. Sinica, English series*, 2015, **31**(5): 863–878.

[9] Li H. Z., Wang C. P., Möbius geometry of hypersurfaces with constant mean curvature and scalar curvature, *Manuscripta Math.*, 2003, **112**: 1–13.

[10] Li T. Z., Nie C. X., Spacelike Dupin hypersurfaces in Lorentzian space forms, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 2018, **70**: 463–480.

[11] Li T. Z., Nie C. X., Regular Blaschke para-umbilical hypersurfaces in the conformal space $\mathbb{Q}^n_s$, arXiv: 1512.04158, 2015[math.DG].

[12] Li X. X., Song H. R., On the regular space-like hypersurfaces in the de Sitter space $\mathbb{S}^{m+1}_1$ with parallel Blaschke tensors, *J. of Math.*, 2016, **36**: 1183–1200.

[13] Li X. X., Song H. R., Regular space-like hypersurfaces in $\mathbb{S}^{m+1}_1$ with parallel para-Blaschke tensors, *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 2017, **33**(10): 1361–1381.

[14] Li X. X., Zhang F. Y., A classification of immersed hypersurfaces in spheres with parallel Blaschke tensors, *Tohoku Math. J.*, 2006, **58**: 581–597.

[15] Nie C. X., Blaschke isoparametric hypersurfaces in the conformal space Q^{n+1}_1 I, *Acta Math. Sinica, English Series*, 2015, **31**(11): 1751–1758.

[16] Nie C. X., Conformal geometry of hypersurfaces and surfaces in Lorentz space forms, Doctoral dissertation, Perking University, 2006.

[17] Nie C. X., Li T. Z., He Y. J., et al., Conformal isoparametric hypersurfaces with two distinct conformal principal curvatures in conformal space, *Science China Math.*, 2010, **53**: 953–965.

[18] Nie C. X., Wu C. X., Space-like hypersurfaces with parallel conformal second fundamental forms in the conformal space, *Acta Math. Sinica, Chinese Series*, 2008, **51**(4): 685–692.

[19] O'Neil B., Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 1983.

[20] Wang C. P., Möbius geometry of submanifolds in $\mathbb{S}^n$, *Manuscripta Math.*, 1998, **96**: 517–534.