**文章编号:** 0583-1431(2021)01-0041-06 **文献标识码: A**

# Ricci 张量对称函数的预定问题

贺 妍

湖北大学数学与统计学学院 应用数学湖北省重点实验室 武汉 430062
E-mail: helenaig@hotmail.com

张维维

重庆工商大学财政金融学院 重庆 400064
E-mail: weiwei@ctbu.edu.cn

**摘 要** 本文考虑 Ricci 张量的对称函数 $\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)$ 的预定问题. 假设 $(M,g)$ 是闭的 Einstein 流形, 我们得到了只要流形 $(M,g)$ 不具有 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性, 则对于变号的函数 $f\in C^\infty(M)$, 存在度量 $g^*$, 使得 $\sigma_2(\mathrm{Ric}_{g^*})=f$. 然后, 作为推论, 得到了具有负数量曲率的闭 Einstein 流形上的预定曲率的结果.

**关键词** 对称函数; Ricci 张量; 预定曲率问题
**MR(2010) 主题分类** 53C21, 35J60
**中图分类** O186

## The Prescribing Problem for Symmetric Function of Ricci Tensor

Yan HE

*Hubei Key Laboratory of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan 430062, P. R. China*
*E-mail: helenaig@hotmail.com*

Wei Wei ZHANG

*School of Finance, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400064, P. R. China*
*E-mail: weiwei@ctbu.edu.cn*

**Abstract** We consider the prescribing problem for symmetric function of Ricci tensor. Suppose a closed Einstein manifold $(M,g)$ is not $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ singular. Let $f\in C^\infty(M)$ and it changes sign. We prove that there exists a metric $g^*$ such that $\sigma_2(\mathrm{Ric}_{g^*})=f$. Then, as a corollary, we have an existence result for the prescribing problem for Einstein manifold with negative scalar curvature.

**Keywords** symmetric function; Prescribing problem; ricci tensor
**MR(2010) Subject Classification** 53C21, 35J60
**Chinese Library Classification** O186

收稿日期: 2019-04-23; 接受日期: 2020-03-16
基金项目: 应用数学湖北省重点实验室开放基金资助项目

## 1 引言

设 $(M^m, g)$ 是 $m$ 维闭的黎曼流形, $m \geq 2$. $\mathrm{Ric}_g$ 和 $R_g$ 分别是该流形上的 Ricci 张量和数量曲率.

曲率的预定问题一直是个热门和有意思的问题. 它是希望在黎曼流形上找一个度量, 使得在这个度量下相应的曲率能等于预定的函数. 文 [3, 8] 和 [9] 分别给出了 Q 曲率和 $\sigma_2(A_g)$ 的预定曲率结果. 而本文考虑的是关于 $\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)$ 曲率的预定问题. 设 $\lambda_i$ 是 $\mathrm{Ric}_g$ 的特征值, $\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)$ 定义为:

$$\sigma_2(\mathrm{Ric}_g) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j.$$

显然

$$\sigma_2(\mathrm{Ric}_g) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_i \lambda_i\right)^2 - \sum_i \lambda_i^2\right) = \frac{1}{2}\left(R_g^2 - |\mathrm{Ric}_g|^2\right). \tag{1.1}$$

本文首先计算 $\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)$ 的线性化算子, 以及其在 $L^2$ 中的共轭算子, 并将使得共轭算子的核非零的空间称为 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性空间 (见定义 4.1). 再由隐函数定理, 我们可以得到 $L^p$ 函数空间的一个开邻域上预定曲率问题的解. 进一步, 可以得到如下结果.

**定理 1.1** 假设紧致的 Einstein 流形 $(M, g)$ 不具备 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性. 再设 $f \in C^\infty(M)$, 且 $f$ 在 $M$ 上变号. 那么存在度量 $g^*$, 使得

$$\sigma_2(\mathrm{Ric}_{g^*}) = f.$$

把上述结果应用在数量曲率小于零的 Einstein 流形上, 我们就得到了:

**推论 1.2** 假设 $(M, g)$ 是数量曲率小于零的 Einstein 流形. 再设 $f$ 为变号的光滑函数, 则存在度量 $g^*$, 使得

$$\sigma_2(\mathrm{Ric}_{g^*}) = f.$$

这些结果是新的.

## 2 记号

设 $S_2(M)$ 为 $M$ 上对称的 $(0,2)$ 型张量的集合. 设 $h, k \in S_2(M)$. 为方便起见, 我们做如下约定:

$$\begin{aligned}
&(h \times k)_{ij} = h_i^l k_{lj}, \\
&h \cdot k = h^{ij} k_{ij}, \\
&(\delta h)_i = -(\operatorname{div} h)_i = -\nabla^j h_{ij}.
\end{aligned}$$

在不引起混淆的情况下, 我们简单地将 $\mathrm{Ric}_g$ 记为 Ric, 其中 Ric 的分量记为 $R_{jk}$, 它的定义为 $\mathrm{Ric}_{jk} := R_{jk} = R^i_{ijk} = g^{il} R_{ijkl}$.

## 3 线性化算子

设 $\{g(t)\}|_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 是 $M$ 上的一族度量. 且 $g(0) = g$, $g'(0) = h$. 接下来我们计算 $\frac{d\sigma_2(\mathrm{Ric}_{g(t)})}{dt}$. 为此, 需要用到下面的计算结果. 详细证明可见文 [2, 4, 8, 10].

**命题 3.1** (见文 [8]) Christoffel 符号的线性化算子是

$$\Gamma'^{k}_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij} \right). \tag{3.1}$$

Ricci 张量的线性化算子是

$$\mathrm{Ric}'_{jk} = -\frac{1}{2} \left( \Delta_L h_{jk} + \nabla_j \nabla_k (\mathrm{Tr}\, h) + \nabla_j (\delta h)_k + \nabla_k (\delta h)_j \right), \tag{3.2}$$

其中 $\Delta_L h_{jk} = \Delta h_{jk} + 2(R_{ijkl} h^{il}) - R_{ji} h^i_k - R_{ki} h^i_j$. 数量曲率的线性化算子是

$$R' = -\Delta(\mathrm{Tr}\, h) + \delta^2 h - \mathrm{Ric} \cdot h. \tag{3.3}$$

$\Delta R$ 的线性化算子是

$$(\Delta R)' = -\nabla^2 R \cdot h + \Delta R' + \frac{1}{2} dR \cdot (d(\mathrm{Tr}\, h) + 2\delta h). \tag{3.4}$$

接下来写出 $\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)$ 的线性化算子和它的共轭算子.

**命题 3.2** (见文 [8]) $\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)$ 的线性化算子, 不妨记为 $L_g$, 满足

$$\begin{aligned} L_g(h) = \frac{1}{2} &\left( \mathrm{Ric} \cdot \Delta_L h + \mathrm{Ric} \cdot \nabla^2 (\mathrm{Tr}\, h) + 2\mathrm{Ric} \cdot \nabla(\delta h) + 2(\mathrm{Ric} \times \mathrm{Ric}) \cdot h \right) \\ &+ R \left( -\Delta(\mathrm{Tr}\, h) + \delta^2 h - \mathrm{Ric} \cdot h \right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

**命题 3.3** (见文 [8]) $\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)$ 的线性化算子 $L_g$ 的共轭算子 $L_g^*$ 满足

$$\begin{aligned} L_g^*(f) = \frac{1}{2} &\left( \Delta_L (f\mathrm{Ric}) + 2f(\mathrm{Ric} \times \mathrm{Ric}) + 2\nabla\delta(f\mathrm{Ric}) + g\delta^2(f\mathrm{Ric}) \right) \\ &- \left( g\Delta(fR) - \nabla^2(fR) + fR\mathrm{Ric} \right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

## 4 具有 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性的空间

**定义 4.1** 设 $(M,g)$ 为黎曼流形. 若存在 $f$, 使得

$$0 \neq f \in \ker L_g^*,$$

则称 $(M,g,f)$ 为 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性空间.

**命题 4.2** 设 $(M,g,f)$ 为具有 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性的 Einstein 流形, 则数量曲率大于等于零.

**证明** 采用反证法. 假设数量曲率 $R$ 小于零. 由 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性的定义和 (3.6) 可知, 在 Einstein 流形上函数 $f$ 满足如下等式:

$$\begin{aligned} 0 = L_g^*(f) = \frac{1}{2} &\left( \Delta_L (f\mathrm{Ric}) + 2f(\mathrm{Ric} \times \mathrm{Ric}) + 2\nabla\delta(f\mathrm{Ric}) + g\delta^2(f\mathrm{Ric}) \right) \\ &- \left( g\Delta(fR) - \nabla^2(fR) + fR\mathrm{Ric} \right). \end{aligned}$$

把 $\frac{R}{m}$ 记为常数 $C$. 在上式的两边取迹, 可以得到如下式子:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(C(m\Delta f) + 2C^2 mf) - (mR\Delta f - R\Delta f + CmRf). \\ &= (mC^2 f - mCRf) - \left( mR\Delta f - R\Delta f + \frac{C}{2} m\Delta f \right) \\ &= \left( \frac{1}{m} - 1 \right) RCmf - \left( m - 1 + \frac{1}{2} \right) R\Delta f \\ &= -\left( 1 - \frac{1}{m} \right) R^2 f - \left( m - \frac{1}{2} \right) R\Delta f. \end{aligned}$$

两边乘以 $f$ 并积分, 可以得到

$$\int_M -\left(1-\frac{1}{m}\right)R^2f^2+\left(m-\frac{1}{2}\right)R|\nabla f|^2=0.$$

注意到 $R<0$, 于是 $f\equiv 0$. 而这和 $(M,g,f)$ 具有 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性的假设矛盾. 于是 $R<0$ 是不成立的. 证毕.

**推论 4.3** 数量曲率小于零的 Einstein 流形是不具备 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性的.

## 5 预定曲率问题

考察 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性的作用是明显的. 利用下面的分裂定理和隐函数定理可以得到局部上的预定曲率问题的解. 首先, 我们回顾下面的两个有名的定理.

**定理 5.1** (分裂定理, 见文 [1]) 设 $E$ 和 $F$ 是 $M$ 上的向量丛, 对于 $m<p<\infty$, $D: W^{k,p}(E)\to W^{k-2,p}(F)$ 是 2 阶微分算子,

$$D^*: W^{k-2,p}(F)\to W^{k-4,p}(E)$$

是它的 $L^2$ 共轭算子. 再假设 $D$ 和 $D^*$ 有单的主象征, 则

$$W^{k-2,p}(F)=\mathrm{Im}\,D\oplus\ker\,D^*.$$

**定理 5.2** (反函数定理, 见文 [5]) 设 $X$, $Y$ 是巴拿赫空间. $f: U_{x_0}\to Y$ 是连续可微函数 $f(x_0)=y_0$, 其中 $U_{x_0}\subset X$ 是 $x_0$ 的一个邻域. 假设导数 $Df(x_0): X\to Y$ 是满的有界线性映射. 那么存在 $y_0$ 的邻域 $V_{y_0}$ 和连续映射 $\phi: V_{y_0}\to U_{x_0}$, 使得

$$f(\phi(y))=y,\quad \forall\, y\in V_{y_0},$$

且

$$\phi(y_0)=x_0.$$

其次, 我们将得到下列定理:

**定理 5.3** (见文 [6]) 设 $\mathscr{M}$ 是 $M$ 上度量的集合. 假设 $(M,g)$ 是 Einstein 流形, 且不具备 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性, 则

$$\sigma_2(\mathrm{Ric}): \mathscr{M}\to W^{4,p}(M)$$

在 $g$ 处是淹没. 那么, 存在 $\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)$ 的邻域 $U\subset L^p(M)$, 使得对于任意的 $\psi\in U$, 存在 $g$ 附近的度量 $g'$ 满足

$$\sigma_2(\mathrm{Ric}_{g'})=\psi,$$

这里 $p>m$.

**证明** 对 $L_g^*$ 的主特征取迹, 可以得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,(\sigma_\xi(L_g^*)) &= g^{kl}\frac{1}{2}|\xi|^2R_{kl}+g^{kl}\frac{1}{2}\langle\xi\otimes\xi,\mathrm{Ric}\rangle g_{kl}-g^{kl}\frac{1}{2}g^{ij}(\xi_l\xi_iR_{kj}+\xi_k\xi_iR_{lj})\\ &\quad -g^{kl}R|\xi|^2g_{kl}+g^{kl}R\xi_k\xi_l\\ &=\frac{m-2}{2}\big(\langle\xi\otimes\xi,\mathrm{Ric}\rangle-|\xi|^2R\big). \end{aligned}\tag{5.1}$$

于是, 如果 $\mathrm{Tr}\,(\sigma_\xi(L_g^*))=0$, 则在流形是 Einstein 的假设下可以得到 $\xi=0$. 于是 $L_g^*$ 具有单的主象征. 再应用上述定理 5.1 可知

$$W^{4,p}(M)=\mathrm{Im}\,L_g\oplus\ker\,L_g^*.$$

又由于 $g$ 不具备 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性, 进而, 可以得到 $L_g$ 是满的. 因此, 再应用定理 5.2, 可以得到 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 把 $g$ 的一个邻域满射到 $\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)$ 在 $W^{4,p}(M)$ 中的一个邻域中. 再设 $V$ 是 0 在 $W^{4,p}(M)$ 中的一个小邻域. 定义

$$F:V\to L^p(M),\quad u\mapsto\sigma_2(\mathrm{Ric}_{\psi(u)}),\quad \psi(u)=g+L_g^*u.$$

由于 $F'(0)v=L_gL_g^*v$, 且

$$\langle L_gL_g^*v,v\rangle=\|L_g^*v\|^2.$$

故 $\ker\,L_gL_g^*=\ker\,L_g^*=0$. 由隐函数定理, $F$ 把 0 在 $W^{4,p}$ 中的开邻域满射到 0 在 $L^p$ 的开邻域中. 于是定理得证.

接下来的这个引理可以把远处的函数用一个微分同胚拉回到 $\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)$ 的 $L^p$ 邻域中.

**引理 5.4** (见文 [6, 7]) 设 $(M,g)$ 是紧致流形. 再设 $f,g\in C^1(M)\cap L^p(M)$. 如果存在正常数 $c$, 使得

$$\inf cf\le g(x)\le\sup cf,$$

则对于任意的 $\epsilon>0$ 存在微分同胚 $\phi$, 使得

$$\|f\circ\phi-g\|_{L^p}\le\epsilon.$$

结合定理 5.3 和引理 5.4, 这样一般的预定曲率问题就有解了.

**定理 5.5** (见定理 1.1) 假设闭的 Einstein 流形 $(M,g)$ 不具备 $\sigma_2(\mathrm{Ric})$ 奇性. 再设 $f\in C^\infty(M)$, 且 $f$ 在 $M$ 上变号. 这里 $p>m$. 那么存在度量 $g^*$, 使得

$$\sigma_2(\mathrm{Ric}_{g^*})=f.$$

**证明** 由于流形紧致, 对于给定的 $f$, 存在常数 $c$, 使得

$$c\inf f\le\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)\le c\sup f.$$

进而可以找到微分同胚 $\phi$, 使得 $f\circ\phi$ 和 $\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)$ 靠得很近:

$$\|f\circ\phi-\sigma_2(\mathrm{Ric}_g)\|_{L^p}\le\eta.$$

再由定理 5.3, 我们可以找到度量 $\tilde g$, 使得

$$f\circ\phi=\sigma_2(\mathrm{Ric}_{\tilde g}).$$

令 $g^*=(\phi^{-1})^*(\tilde g)$. 于是我们有

$$\sigma_2(\mathrm{Ric}_{g^*})(\phi(p))=\sigma_2(\mathrm{Ric}_{\tilde g})(p)=f(\phi(p)).\tag{5.2}$$

这就意味着

$$\sigma_2(\mathrm{Ric}_{g^*})=f.$$

再由 Sobolev 嵌入定理可以得到 $g^*$ 是 $C^2$ 的. 从而得证.

再结合推论 4.3, 可以得到如下结论.

**推论 5.6** (见推论 1.2) 假设 $(M,g)$ 是数量曲率小于零的 Einstein 流形. 再设 $f$ 为变号的光滑函数, 则存在度量 $g^*$, 使得

$$\sigma_2(\mathrm{Ric}_{g^*}) = f.$$

**致谢** 本文第一作者衷心感谢刘克峰教授的帮助与鼓励, 并对审稿人的建议深表感激.

## 参 考 文 献

[1] Berger M., Ebin D. G., Some decompositions of the spaces of symmetric tensors on a Riemannian manifold, *J. Differ. Geom.*, 1969, **3**: 379–392.
[2] Chow B., Lu P., Ni L., Hamilton's Ricci Flow Graduate Studies in Mathematics, Vol. 77, American Mathematical Society, Providence, 2006.
[3] Cruz F., Cruz T., On the prescribed $Q$-curvature problem in Riemannian manifolds, arXiv:1903.08994, 2019.
[4] Fischer A., Marsden J., Deformations of the scalar curvature, *Duke Math. J.*, 1975, **42**(3): 519–547.
[5] Gelman B. D., A generalized implicit function theorem, *Funct. Anal. Appl.*, 2001, **35**: 183–188.
[6] Kazdan J., Warner F., Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvature, *Ann. of Math.*, 1975, **101**(2): 317–331.
[7] Kazdan J., Warner F., A direct approach to the determination of Gaussian and scalar curvature functions, *Invent. Math.*, 1975, **28**: 227–230.
[8] Lin Y. J., Yuan W., Deformations of $Q$-curvature I, *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2016, **55**(4): 1–29.
[9] Silva Santos A., Andrade M., Deformation of The $\sigma_2$ curvature, *Ann. Glob Anal. Geom.*, 2018, **54**: 71–85.
[10] Yuan W., The Geometry of Vacuum Static Spaces and Deformations of Scalar Curvature, Ph.D. thesis at UC Santa Cruz, 2015.