第63卷第6期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.63, No.6
2020年11月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES　　Nov., 2020

文章编号: 0583-1431(2020)06-0655-06　　**文献标识码: A**

正规结构和带参数的约当 – 冯诺依曼型常数

左占飞

重庆三峡学院数学与统计学院 万州 404100
E-mail: zuozhanfei@139.com

摘　要　首先引入了带参数的约当 – 冯诺依曼型常数, 然后研究了它的一些相关性质, 并给出了它的取值范围, 同时还利用带参数的约当 – 冯诺依曼型常数, 弱正交系数 $\mu(X)$ 和 Domínguez Benavides 系数 $R(1,X)$ 之间的关系, 给出了空间具有正规结构的一些充分条件, 这些结论改进了一些文献中的结果.

关键词　正规结构; 弱收敛序列系数; 弱正交系数; Domínguez Benavides 系数
MR(2010) 主题分类　46B20
中图分类　O177.2

The Normal Structure and Parametrized Jordan–von Neumann type Constant

Zhan Fei ZUO

Department of Mathematics and Statistics, Chongqing Three Gorges University, Wanzhou 404100*, P. R. China*
E-mail: *zuozhanfei@139.com*

Abstract　In this paper, a parametered Jordan–von Neumann type constant is introduced and estimated. We also give some sufficient conditions of which a Banach space has the normal structure by discussing the relationship among the parametrized Jordan–von Neumann constant, the weak orthogonality coefficient and the Domínguez Benavides coefficient, respectively. These results further improve some results in the previous literatures.

Keywords　normal structure; weakly convergent sequence coefficient; coefficient of weak orthogonality; Domínguez Benavides coefficient
MR(2010) Subject Classification　46B20
Chinese Library Classification　O177.2

收稿日期: 2019-10-17; 接受日期: 2020-03-26
基金项目: 重庆市自然科学基金基础研究与前沿探索专项面上项目 (cstc2019jcyj-msxmX0289); 重庆市科委基础研究与前沿探索 (cstc2018jcyjAX0773); 重庆三峡学院人才引进项目

1 引言

正规结构在非扩张映射的不动点理论中扮演着重要的角色, 因为 Kirk 在文章 [8] 中证明了自反的 Banach 空间具有正规结构时, 其上的非扩张映射具有不动点性质. 众所周知空间是否具有正规结构主要取决于空间单位球面和单位球的几何性质. 然而刻画一般 Banach 空间几何性质并不容易. 近些年来, 许多数学学者尝试利用几何常数来研究空间几何性质, 得到了空间具有正规结构的一些条件 [2, 3, 5–7, 9, 10, 13–15].

在本文中, 我们用 X 和 X^* 分别表示 Banach 空间及其对偶空间, $S_X=\{x\in X:\|x\|=1\}$ 和 $B_X=\{x\in X:\|x\|\leq 1\}$ 分别表示空间 X 的单位球面和单位球体, 下面分别给出 James 常数, Jordan–von Neumann 常数, Zbăganu 常数和 Jordan–von Neumann 型常数的定义:

$$J(X)=\sup\{\min\{\|x+y\|,\|x-y\|\}:x,y\in S_X\},$$

$$C_{\mathrm{NJ}}(X)=\sup\left\{\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}:x,y\in X,\ \|x\|+\|y\|>0\right\},$$

$$C_{\mathrm{Z}}(X)=\sup\left\{\frac{\|x+y\|\|x-z\|}{\|x\|^2+\|y\|^2}:x,y\in X,\ \|x\|+\|y\|>0\right\},$$

$$C_{-\infty}(X)=\sup\left\{\frac{\min\{\|x+y\|^2,\|x-y\|^2\}}{\|x\|^2+\|y\|^2}:x,y\in X,\ \|x\|+\|y\|>0\right\}.$$

关于上述几何常数的性质已经在一些文章中研究过 [5–7, 9, 10, 13, 14].

最近, Jordan–von Neumann 常数 $C_{\mathrm{NJ}}(X)$ 和 Zbăganu 常数 $C_{\mathrm{Z}}(X)$ 被推广成了带参数的形式, 其中 $1\leq p<+\infty$:

$$C_{\mathrm{NJ}}^{(p)}(X)=\sup\left\{\frac{\|x+y\|^p+\|x-y\|^p}{2^{p-1}(\|x\|^p+\|y\|^p)}:x,y\in X,\ (x,y)\neq(0,0)\right\},$$

$$C_{\mathrm{Z}}^{(p)}(X)=\sup\left\{\frac{\|x+y\|^{\frac{p}{2}}\|x-y\|^{\frac{p}{2}}}{2^{p-2}(\|x\|^p+\|y\|^p)}:x,y\in X,\ (x,y)\neq(0,0)\right\}.$$

由上述的定义容易看出, $C_{\mathrm{NJ}}^{(2)}(X)=C_{\mathrm{NJ}}(X)$, $C_{\mathrm{Z}}^{(2)}(X)=C_{\mathrm{Z}}(X)$, 而且关于它们蕴含空间具有正规结构的一些充分条件也得到了研究 [2, 3, 11].

(i) 对于 $p\in(1,\frac{3-\log_2^3}{2-\log_2^3})$, 假如 $C_{\mathrm{NJ}}^{(p)}(X)<\frac{(1+\sqrt{1+2\frac{2p-3}{p-1}})^{p-1}}{2^{2p-3}}$ 成立, 那么 Banach 空间 X 具有正规结构.

(ii) 假如不等式 $C_{\mathrm{NJ}}^{(p)}(X)<\frac{1}{2^{p-1}}(1+\frac{1}{\mu(X)})^p$ 成立, 那么 Banach 空间 X 具有正规结构, 其中 $\mu(X)$ 表示弱正交系数.

(iii) 假如不等式 $C_{\mathrm{Z}}^{(p)}(X)<\frac{1}{2^{p-1}}(1+\frac{1}{\mu(X)})^p$ 成立, 那么 Banach 空间 X 具有正规结构.

2 预备知识

定义 2.1 任取 $x,y\in S_X$, 如果存在 $\delta>0$, 满足不等式 $\frac{\|x+y\|}{2}\leq 1-\delta$ 或者 $\frac{\|x-y\|}{2}\leq 1-\delta$, 则称空间 X 是一致非方的. 已知一致非方的 Banach 空间 X 一定是自反的.

定义 2.2 对于 Banach 空间 X 中的有界凸集 K, 如果 K 的任意非空凸集 H 都含有一个非直径点, 即存在 $x_0\in H$ 满足 $\sup\{\|x_0-y\|:y\in H\}<\sup\{\|x-y\|:x,y\in H\}$, 则称空间 X 具有正规结构. 如果将定义中的 H 换为弱紧凸子集, 则称 X 具有弱正规结构, 在自反的 Banach 空间中这两个概念重合.

定义 2.3 如果 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=1$, $\lim_{n\neq m}\|x_n-x_m\|$ 存在, 定义弱收敛序列系数 $\mathrm{WCS}(X)$:

$$\mathrm{WCS}(X)=\inf\Big\{\lim_{n\neq m}\|x_n-x_m\|\Big\},$$

这里的下确界是取遍 X 中所有弱收敛于 0 的序列 $\{x_n\}$. 已知 $\mathrm{WCS}(X)>1$ 蕴含 X 具有弱正规结构 [1].

定义 2.4 Jiménez-Melado 和 Llorens-Fuster 在文献 [6] 中引入了下面的弱正交系数:

$$\mu(X)=\inf\Big\{\lambda:\limsup_{n\to\infty}\|x_n+x\|\le\lambda\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x\|\Big\},$$

已知 $1\le\mu(X)\le3$, 有关弱正交系数和正规结构的关系, 可参阅文献 [2, 3, 5, 6, 9, 14, 15].

定义 2.5 Domínguez Benavides 在文献 [4] 中引入了下面的几何常数来刻画几何性质:

$$R(1,X)=\sup\Big\{\liminf_{n\to\infty}\{\|x_n+x\|\}\Big\},$$

这里的上确界是取遍所有的 $\|x\|\le1$ 以及 B_X 中满足下面不等式的弱收敛于 0 的序列 $\{x_n\}$,

$$D[(x_n)]:=\limsup_{n\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\|x_n-x_m\|\le1.$$

已知 $1\le R(1,X)\le2$, 有关几何常数 $R(1,X)$ 的详细性质可参阅文献 [10, 13, 15].

3 主要结果

首先给出带参数的约当 – 冯诺依曼型常数的定义, 对于 $1\le p<+\infty$,

$$\begin{aligned}C^{(p)}_{-\infty}(X)&=\sup\left\{\frac{\min\{\|x+y\|^p,\|x-y\|^p\}}{2^{p-2}(\|x\|^p+\|y\|^p)}:x,y\in X,\ (x,y)\neq(0,0)\right\},\\&=\sup\left\{\frac{\min\{\|x+ty\|^p,\|x-ty\|^p\}}{2^{p-2}(1+t^p)}:x,y\in S_X,\ 0\le t\le1\right\}.\end{aligned}$$

$$C^{(2)}_{-\infty}(X)=C_{-\infty}(X)=\sup\left\{\frac{\min\{\|x+y\|^2,\|x-y\|^2\}}{\|x\|^2+\|y\|^2}:(x,y)\neq(0,0)\right\}.$$

定理 3.1 设 X 是 Banach 空间, 对于 $1\le p<+\infty$, 有下面的几个结论成立:

(1) $\frac{1}{2^{p-2}}\le C^{(p)}_{-\infty}(X)\le C^{(p)}_{\mathrm{Z}}(X)\le C^{(p)}_{\mathrm{NJ}}(X)\le2$.

(2) $R(1,X)\le J(X)\le2^{\frac{p-1}{p}}\sqrt[p]{C^{(p)}_{-\infty}(X)}$.

(3) $C^{(p)}_{-\infty}(X)<2\Leftrightarrow X$ 是一致非方的.

证明 (1) 假设 $y\in S_X$ 且 $x=ty$, 那么有

$$\begin{aligned}C^{(p)}_{-\infty}(X)&=\sup\left\{\frac{\min\{\|x+y\|^p,\|x-y\|^p\}}{2^{p-2}(\|x\|^p+\|y\|^p)}:x,y\in X,\ (x,y)\neq(0,0)\right\}\\&\ge\frac{\min\{\|x+y\|^p,\|x-y\|^p\}}{2^{p-2}(\|x\|^p+\|y\|^p)}=\frac{\min\{(1+t)^p,(1-t)^p\}}{2^{p-2}(1+t^p)},\end{aligned}$$

令 $t\to0^+$, 则 $C^{(p)}_{-\infty}(X)\ge\frac{1}{2^{p-2}}$. 对于任意的 $1\le p<+\infty$, 由几何常数 $C^{(p)}_{-\infty}(X)$ 的定义显然有 $C^{(p)}_{-\infty}(X)\le C^{(p)}_{\mathrm{Z}}(X)\le C^{(p)}_{\mathrm{NJ}}(X)\le2$.

(2) 对于任意的 $1\le p<+\infty$, 取 $x,y\in S_X$, 那么

$$\begin{aligned}\min\{\|x+y\|^p,\|x-y\|^p\}&\le2^{p-2}(\|x\|^p+\|y\|^p)C^{(p)}_{-\infty}(X)\\&\le2^{p-2}\times2C^{(p)}_{-\infty}(X)=2^{p-1}C^{(p)}_{-\infty}(X).\end{aligned}$$

由 James 常数 $J(X)$ 的定义可得 $J(X)\le 2^{\frac{p-1}{p}}\sqrt[p]{C_{-\infty}^{(p)}(X)}$. 不等式 $R(1,X)\le J(X)$ 的证明可见文 [10].

(3) 一方面, 假如对于某个 $1\le p<+\infty$ 且 $C_{-\infty}^{(p)}(X)<2$, 由不等式 $J(X)\le 2^{\frac{p-1}{p}}\sqrt[p]{C_{-\infty}^{(p)}(X)}$, 则 $J(X)<2\Rightarrow X$ 是一致非方的. 另一方面假如 X 是一致非方的, 则 $C_{\mathrm{NJ}}^{(p)}(X)<2$, 由不等式 $C_{-\infty}^{(p)}(X)\le C_{\mathrm{NJ}}^{(p)}(X)$, 则 $C_{-\infty}^{(p)}(X)<2$. 证毕.

定理 3.2 设 X 是 Banach 空间, 如果存在 $1\le p<+\infty$, 有下面的不等式成立:

$$\mathrm{WCS}(X)^p\ge\frac{(1+\frac{1}{\mu^p})^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{\mu^{p(p-1)}})C_{-\infty}^{(p)}(X)}.$$

证明 (1) 假如 $C_{-\infty}^{(p)}(X)=2$, 因为 $\mathrm{WCS}(X)\ge 1$, $\mu(X)\ge 1$, 容易验证不等式显然成立.

(2) 假如 $C_{-\infty}^{(p)}(X)<2$, 那么空间是一致非方的, 因此是自反的. 取 S_X 上弱收敛于 0 的序列 $\{x_n\}$, 并记 $d=\lim_{n\ne m}\|x_n-x_m\|$. 考虑 $\{x_n\}$ 的正规泛函序列 $\{x_n^*\}$, 则 $x_n^*(x_n)=1$. 由空间 X 的自反性, 总可以取 $\{x_n\}$ 的子列满足 $x_n^*\to x^*$, 其中 $x^*\in X^*$. 设 $0<\varepsilon<1$, 取充分大的 N, 当 $m>N$ 时, 满足 $|x^*(x_N)|<\frac{\varepsilon}{2}$ 和 $d-\varepsilon<\|x_N-x_m\|<d+\varepsilon$. 由弱正交系数 $\mu(X)$ 的定义可知

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{x_N+x_m}{d+\varepsilon}\right\|\le\mu(X)\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{x_N-x_m}{d+\varepsilon}\right\|\le\mu(X).$$

因此, 取充分大的 $M>N$, 便得到下面的估计式:

(i) $|x_N^*(x_M)|<\varepsilon$, $|x_M^*(x_N)|<\varepsilon$, $|(x_M^*-x^*)(x_N)|<\frac{\varepsilon}{2}$;

(ii) $\|\frac{x_N}{d+\varepsilon}\|\le 1$, $\|\frac{x_M}{d+\varepsilon}\|\le 1$;

(iii) $\|\frac{x_N+x_M}{d+\varepsilon}\|\le\mu(X)+\varepsilon$.

把 $\mu(X)$ 标记为 μ, 设 $x=\frac{x_N-x_M}{d+\varepsilon}$, $y=\frac{x_N+x_M}{(d+\varepsilon)(\mu+\varepsilon)^p}$, 易验证 $x\in B_X$, $\|y\|\le\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^{p-1}}$, 且

$$\begin{aligned}(d+\varepsilon)\|x+y\|&=\left\|\left(1+\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^p}\right)x_N-\left(1-\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^p}\right)x_M\right\|\\&\ge\left(1+\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^p}\right)x_N^*(x_N)-\left(1-\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^p}\right)x_N^*(x_M)\ge\left(1+\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^p}\right)(1-\varepsilon),\\(d+\varepsilon)\|x-y\|&=\left\|\left(1+\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^p}\right)x_M-\left(1-\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^p}\right)x_N\right\|\\&\ge\left(1+\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^p}\right)x_M^*(x_M)-\left(1-\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^p}\right)x_M^*(x_N)\ge\left(1+\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^p}\right)(1-\varepsilon).\end{aligned}$$

由几何常数 $C_{-\infty}^{(p)}(X)$ 的定义,

$$C_{-\infty}^{(p)}(X)\ge\frac{\min\{\|x+y\|^p,\|x-y\|^p\}}{2^{p-2}(\|x\|^p+\|y\|^p)}\ge\frac{(1+\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^p})^p(1-\varepsilon)^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{(\mu+\varepsilon)^{p(p-1)}})(d+\varepsilon)^p}.$$

因为序列 $\{x_n\}$ 和 ε 是任意的, 便可以得到

$$\mathrm{WCS}(X)^p\ge\frac{(1+\frac{1}{\mu^p})^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{\mu^{p(p-1)}})C_{-\infty}^{(p)}(X)}.$$

证毕.

推论 3.3 设 X 是 Banach 空间, 假如存在某个 $1\le p<+\infty$ 满足不等式

$$C_{-\infty}^{(p)}(X)<\frac{(1+\frac{1}{\mu^p})^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{\mu^{p(p-1)}})},$$

则 Banach 空间 X 具有正规结构.

证明 因为 $\mu(X)\geq 1$, 所以 $C^{(p)}_{-\infty}(X)<\frac{(1+\frac{1}{\mu^p})^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{\mu^{p(p-1)}})}\leq 2$, 因此空间 X 是一致非方的, 我们只需证明 $\mathrm{WCS}(X)>1$ 即可. 由假设 $C^{(p)}_{-\infty}(X)<\frac{(1+\frac{1}{\mu^p})^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{\mu^{p(p-1)}})}$ 和定理 3.2 可得到

$$\mathrm{WCS}(X)^p\geq\frac{(1+\frac{1}{\mu^p})^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{\mu^{p(p-1)}})C^{(p)}_{-\infty}(X)}>1.$$

证毕.

推论 3.4 假如 $C_{-\infty}(X)<1+\frac{1}{\mu^2(X)}$, 那么空间 X 具有正规结构 [14].

注 3.5 (1) 因为 $C^{(p)}_{-\infty}(X)\leq C^{(p)}_{\mathrm{Z}}(X)\leq C^{(p)}_{\mathrm{NJ}}(X)$ 和 $\mu(X)\geq 1$, 在 $p=2$ 的小邻域内,

$$\frac{1}{2^{p-1}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^p<\frac{(1+\frac{1}{\mu^p})^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{\mu^{p(p-1)}})}.$$

因此, 推论 3.3 改进了引言中的结果 (ii), (iii).

(2) 因为 $C_{-\infty}(X)\leq C_{\mathrm{Z}}(X)\leq C_{\mathrm{NJ}}(X)$, 所以推论 3.4 也同时改进了文献 [6, 9] 中的结果.

定理 3.6 设 X 是 Banach 空间, 存在 $1\leq p<+\infty$, 有下面的估计式成立:

$$\mathrm{WCS}^p(X)\geq\frac{(1+\frac{1}{R^p})^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{R^{p(p-1)}})C^{(p)}_{-\infty}(X)}.$$

证明 (1) 当 $C^{(p)}_{-\infty}(X)=2$ 时, 因为 $\mathrm{WCS}(X)\geq 1$ 且 $R(1,X)\geq 1$, 容易验证估计式成立.

(2) 当 $C^{(p)}_{-\infty}(X)<2$ 时, 由 $C^{(p)}_{-\infty}(X)$ 的性质可知空间 X 是一致非方的, 因此是自反的. 取 S_X 上弱收敛于 0 的序列 $\{x_n\}$, 并记 $d=\lim_{n\neq m}\|x_n-x_m\|$. 类似定理 3.2 的讨论, 便可以得到相同的 x_N,x_M,x^*_N,x^*_M, 则

$$\lim_{n\neq m}\left\|\frac{x_m-x_n}{d+\varepsilon}\right\|\leq 1,\quad \left\|\frac{x_N}{d+\varepsilon}\right\|\leq 1,\quad \left\|\frac{x_M}{d+\varepsilon}\right\|\leq 1.$$

由 Domínguez Benavides 系数 $R(1,X)$ 的定义, 只要选取充分大的 $M>N$ 可以得到:

(i) $x^*_N(x_M)<\varepsilon$, $x^*_M(x_N)<\varepsilon$;

(ii) $|(x^*_M-x^*)(x_N)|<\frac{\varepsilon}{2}$;

(iii) $\|\frac{x_N}{d+\varepsilon}+x_M\|\leq R(1,X)+\varepsilon$.

把 $R(1,X)$ 标记为 R, 令 $x=\frac{x_N-x_M}{d+\varepsilon}$, $y=\frac{x_N+x_M}{(d+\varepsilon)(R+\varepsilon)^p}$, 容易验证 $\|x\|\leq 1$, $\|y\|\leq\frac{1}{(R+\varepsilon)^{p-1}}$,

$$\begin{aligned}(d+\varepsilon)\|x+y\|&=\left\|\left(1+\frac{1}{(R+\varepsilon)^p}\right)x_N-\left(1-\frac{1}{(R+\varepsilon)^p}\right)x_M\right\|\\&\geq\left(1+\frac{1}{(R+\varepsilon)^p}\right)x^*_N(x_N)-\left(1-\frac{1}{(R+\varepsilon)^p}\right)x^*_N(x_M)\geq\left(1+\frac{1}{(R+\varepsilon)^p}\right)(1-\varepsilon),\\(d+\varepsilon)\|x-y\|&=\left\|\left(1+\frac{1}{(R+\varepsilon)^p}\right)x_M-\left(1-\frac{1}{(R+\varepsilon)^p}\right)x_N\right\|\\&\geq\left(1+\frac{1}{(R+\varepsilon)^p}\right)x^*_M(x_M)-\left(1-\frac{1}{(R+\varepsilon)^p}\right)x^*_M(x_N)\geq\left(1+\frac{1}{(R+\varepsilon)^p}\right)(1-\varepsilon).\end{aligned}$$

对于 $1\leq p<+\infty$, 由 $C^{(p)}_{-\infty}(X)$ 的定义,

$$C^{(p)}_{-\infty}(X)\geq\frac{\min\{\|x+y\|^p,\|x-y\|^p\}}{2^{p-2}(\|x\|^p+\|y\|^p)}\geq\frac{(1+\frac{1}{(R+\varepsilon)^p})^p(1-\varepsilon)^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{(R+\varepsilon)^{p(p-1)}})(d+\varepsilon)^p}.$$

因为序列 $\{x_n\}$ 和 ε 是任意的, 则

$$\mathrm{WCS}^p(X) \geq \frac{(1+\frac{1}{R^p})^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{R^{p(p-1)}})C_{-\infty}^{(p)}(X)}.$$

证毕.

推论 3.7 设 X 是 Banach 空间, 假如存在某个 $1 \leq p < +\infty$ 满足不等式

$$C_{-\infty}^{(p)}(X) < \frac{(1+\frac{1}{R^p})^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{R^{p(p-1)}})},$$

则空间 X 具有正规结构.

注 3.8 (1) 因为 $C_{-\infty}^{(p)}(X) \leq C_{\mathrm{NJ}}^{(p)}(X)$ 而且 $1 \leq R(1,X) \leq 2$, 对于 $p \in (1, \frac{3-\log_2^3}{2-\log_2^3})$,

$$\frac{(1+\sqrt{1+2^{\frac{2p-3}{p-1}}})^{p-1}}{2^{2p-3}} < \frac{(1+\frac{1}{R^p})^p}{2^{p-2}(1+\frac{1}{R^{p(p-1)}})},$$

因此, 推论 3.7 改进了引言中的结果 (i).

(2) 在推论 3.7 中取 $p=2$, 可以得到 $C_{-\infty}(X) < 1+\frac{1}{R(1,X)^2} \Rightarrow X$ 具有正规结构 [13].

(3) 由不等式 $R(1,X) \leq J(X)$, 容易得到 $C_{-\infty}(X) < 1+\frac{1}{J(X)^2} \Rightarrow X$ 具有正规结构. 因为 $C_{-\infty}(X) \leq C_{\mathrm{Z}}(X)$, 这也改进了文献 [5] 中的结果: $C_{\mathrm{Z}}(X) < 1+\frac{1}{J(X)^2} \Rightarrow X$ 具有正规结构.

致谢 对审稿人提出的意见表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Bynum W., Normal structure coefficients for Banach spaces, *Pacific J. Math.*, 1980, **86**(2): 427–436.

[2] Cui Y., Huang W., Generalized von Neumann–Jordan constant and its relationship to the fixed point property, *Fixed Point Theory and Applications*, 2015(40): 11 pp.

[3] Cui Y., Zhang M., Generalized Zbăganu Constant, *Journal of Harbin University of Science and Technology*, 2017, **22**(5): 126–129.

[4] Domínguez Benavides T., A geometrical coefficient implying the fixed point property and stability results, *Houston J. Math.,* 1996, **22**(4): 835–849.

[5] Gao J., Saejung S., Normal structure and the generalized James and Zbăganu constants, *Nonlinear Analysis.,* 2009, **71**: 3047–3052.

[6] Jiménez-Melado A., Llorens-Fuster E., Saejung S., The von Neumann–Jordan constant, weak orthogonality and normal structure in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2006, **134**(2): 355–364.

[7] Kato M., Maligranda L., Takahashi Y., On James and Jordan–von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces, *Studia Math.*, 2001, **144**(3): 275–295.

[8] Kirk W. A., A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, *Amer. Math. Monthly*, 1965, **72**(1): 1004–1006.

[9] Llorens-Fuster E., Zbăganu constant and normal structure, *Fixed Point Theory*, 2008, **9**: 159–172.

[10] Mazcuñán-Navarro E., Banach space properties sufficient for normal structure, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **337**: 197–218.

[11] Yang C., Wang T., On the generalized von Neumann–Jordan constant $C_{\mathrm{NJ}}^{(p)}(X)$, *J. Comput. Anal. Appl.*, 2017, **23**(5): 860–866.

[12] Zbăganu G., An inequality of M. Radulescu and S. Radulescu which characterizes the inner product spaces, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 2002, **47**(2): 253–257.

[13] Zuo Z. F., Tang C. L., On James and Jordan von Neumann type constants and the normal structure in Banach spaces, *Topol. Methods Nonlinear Anal.,* 2017, **49**: 615–623.

[14] Zuo Z. F., Tang C. L., On Jordan–von Neumann type constants and normal structure in Banach spaces, *Acta Mathematica Sinica,* 2017, **60**(3): 383–388.

[15] Zuo Z. F., Banas–Hajnosz–Wedrychowicz type modulus of convexity and uniform normal structure in Banach space, *Journal of Fixed Point Theory and Applications,* 2018, **20**(2): 1–10.