第63卷第6期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.63, No.6
2020年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2020

文章编号: 0583-1431(2020)06-0639-08 文献标识码: A

若干新的 p 进制 Hardy–Littlewood–Pólya 型不等式

金建军

合肥工业大学宣城校区基础部 宣城 242000
E-mail: jinjjhb@163.com

摘 要 本文建立了若干新的具最佳常数因子的 p 进制 Hardy–Littlewood–Pólya 型不等式, 同时也给出了它们的等价形式以及一些特殊结果.

关键词 p 进制域; p 进制积分算子; p 进制 Hardy–Littlewood–Pólya 型不等式; 算子范数

MR(2010) 主题分类 11F85, 26D15

中图分类 O178

Some New p-adic Hardy–Littlewood–Pólya-type Inequalities

Jian Jun JIN

Hefei University of Technology, Xuancheng Campus,
Xuancheng 242000*, P. R. China*
E-mail: *jinjjhb@163.com*

Abstract In this note, we establish some new p-adic Hardy–Littlewood–Pólya-type inequalities with the best constant factors. The equivalent forms of these inequalities and some particular cases are also considered.

Keywords p-adic field; p-adic integral operator; p-adic Hardy–Littlewood–Pólya-type inequalities; norm of operator

MR(2010) Subject Classification 11F85, 26D15

Chinese Library Classification O178

1 引言与主要结果

设 $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $q > 1$, 则有如下 Hardy–Littlewood–Pólya 不等式对所有的 $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$ 成立:

$$\left[\int_0^\infty \left|\int_0^\infty \frac{f(y)}{\max\{x, y\}}dy\right|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \le \frac{q^2}{q-1}\left[\int_0^\infty |f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{1.1}$$

收稿日期: 2019-11-27; 接受日期: 2020-01-08

这里 $L^q(\mathbb{R}_+)$ 为通常的 $\mathbb{R}_+$ 上的 Lebesgue 空间且 (1.1) 中的常数因子 $\frac{q^2}{q-1}$ 是最佳的, 见文 [2]. 我们可以用算子理论的语言重述 Hardy–Littlewood–Pólya 不等式. 定义由 Hardy–Littlewood–Pólya 核 $\frac{1}{\max\{x,y\}}$ 诱导的算子 T 为: 对于 $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$,

$$(Tf)(x) := \int_0^\infty \frac{f(y)}{\max\{x,y\}} dy, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

于是 T 是自 $L^q(\mathbb{R}_+)$ 到 $L^q(\mathbb{R}_+)$ 的有界算子且 $\|T\| = \frac{q^2}{q-1}$.

最近, Fu, Wu 与 Lu 引入并研究了一个 p 进制积分算子, 得到了具有最佳常数因子的 p 进制 Hardy–Littlewood–Pólya 不等式, 详见文 [1]. 本文引入了两类 Hardy–Littlewood–Pólya 型核, 我们研究了由这两类核诱导的两个新的 p 进制积分算子并得到了它们的范数表达式. 作为应用, 建立了若干新的推广的具有最佳常数因子的 p 进制 Hardy–Littlewood–Pólya 型不等式. 同时也给出了这些不等式的等价形式以及一些特殊结果.

为了叙述本文主要结果, 先回顾 p 进制域与 p 进制分析的若干定义与记号.

设 p 为一个素数, 记 $\mathbb{Q}_p$ 为 p 进制数形成的数域. $\mathbb{Q}_p$ 是有理数域在非阿基米德 p 进制模 $|\cdot|_p$ 下的完备化. p 进制模定义为:

(1) $|0|_p = 0$;

(2) 当 x 是一个非零的有理数, 且 x 可表示为 $x = p^\gamma \frac{m}{n}$, 这里 $\gamma \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, 且 m 和 n 都不被 p 整除, 则定义 $|x|_p = p^{-\gamma}$.

由以上定义知任意 p 进制数 $x \in \mathbb{Q}_p$ 都可唯一正则地表示为

$$x = p^\gamma \sum_{j=0}^\infty a_j p^j, \quad \gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

这里 a_j 都为整数且满足 $0 \le a_j \le p-1$, $a_0 \ne 0$. 由于 $|a_j p^j|_p = p^{-j}$, 因此, 序列 (1.2) 在 p 进制模下是收敛的. 同时不难验证如下性质成立:

$$|xy|_p = |x|_p |y|_p, \quad |x+y|_p \le \max\{|x|_p, |y|_p\},$$

且若 $|x|_p \ne |y|_p$, 则有 $|x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

记 $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p \backslash \{0\}$, 用记号

$$B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \le p^\gamma\}$$

表示中心在点 $a \in \mathbb{Q}_p$ 处半径为 p^γ 的球, 并记

$$S_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p = p^\gamma\} = B_\gamma(a) \backslash B_{\gamma-1}(a).$$

为了记号的简洁, 我们将用 B_γ 和 S_γ 分别代替 $B_\gamma(0)$ 和 $S_\gamma(0)$.

由于 $\mathbb{Q}_p$ 是局部紧的 Hausdorff 空间, 因此由测度理论知 $\mathbb{Q}_p$ 上存在 Haar 测度. $\mathbb{Q}_p$ 上的 Haar 测度在不计一个常数因子的情况下是唯一的且它是平移不变的. 我们规范化 $\mathbb{Q}_p$ 上的 Haar 测度 dx, 使其满足

$$\int_{B_0} dx = |B_0|_H = 1,$$

这里 $|E|_H$ 表示 $\mathbb{Q}_p$ 上可测集 E 的 Haar 测度. 经由简单计算可得到

$$\int_{B_\gamma} dx = |B_\gamma|_H = p^\gamma, \quad \int_{S_\gamma} dx = |S_\gamma|_H = p^\gamma(1-p^{-1}).$$

关于 p 进制域与 p 进制分析更详尽的介绍, 见文献 [4, 5].

设 $q>1$, $w(x)$ 为 $\mathbb{Q}_p^*$ 上的非负可测函数, 定义 $\mathbb{Q}_p^*$ 上的加权 Lebesgue 空间 $L_w^q(\mathbb{Q}_p^*)$ 如下:

$$L_w^q(\mathbb{Q}_p^*) := \left\{ f(x) : \|f\|_{q,w} := \left[\int_{\mathbb{Q}_p^*} |f(x)|^q w(x) dx \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

设 $0 \le \lambda < \infty$, 记 $g(x,y)$ 为 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 上正的连续函数, 且满足对于所有 $t,x,y>0$, 有 $g(x,y)=g(y,x)$, $g(tx,ty)=t^{-\lambda}g(x,y)$. 我们定义 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 上的一个 Hardy–Littlewood–Pólya 型核 $k_1(x,y)$ 为:

$$k_1(x,y) = \frac{g(x,y)}{\max\{x,y\}^{\lambda+1}}. \tag{1.3}$$

设 $h(t)$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上正的连续函数, 定义另一个 Hardy–Littlewood–Pólya 型核 $k_2(x,y)$ 为:

$$k_2(x,y) = \frac{h(|\ln(\frac{x}{y})|)}{\max\{x,y\}}. \tag{1.4}$$

设 $r>1$, 记 r' 为 r 的共轭指数, 即 $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. 假定

$$0 < C_1(p,r) := (1-p^{-1}) \sum_{-\infty<\gamma<\infty} \frac{g(1,p^\gamma)}{\max\{1,p^\gamma\}^{\lambda+1}} \cdot p^{\frac{\gamma}{r'}} < \infty$$

及

$$0 < C_2(p,r) := (1-p^{-1}) \sum_{-\infty<\gamma<\infty} \frac{h(|\gamma \ln p|)}{\max\{1,p^\gamma\}} \cdot p^{\frac{\gamma}{r'}} < \infty.$$

注 1.1 容易看到

$$C_1(p,r) = (1-p^{-1}) \left[g(1,1) + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{g(1,p^\gamma)}{p^{\gamma(\lambda+1)}} (p^{\frac{\gamma}{r'}} + p^{\frac{\gamma}{r}}) \right] = C_1(p,r');$$

$$C_2(p,r) = (1-p^{-1}) \left[h(0) + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{h(\gamma \ln p)}{p^\gamma} (p^{\frac{\gamma}{r'}} + p^{\frac{\gamma}{r}}) \right] = C_2(p,r').$$

置 $K_i^p(x,y) = k_i(|x|_p, |y|_p)$, $(x,y) \in \mathbb{Q}_p^* \times \mathbb{Q}_p^*$, $i=1,2$. 如下定理即为本文的主要结果.

定理 1.2 设 p 为一个素数, $r,q>1$. 令 r' 和 q' 分别是 r 和 q 的共轭指数. 记 $w_1(x) = |x|_p^{\frac{q}{r}-1}$, $w_2(x) = |x|_p^{\frac{q'}{r'}-1}$, 定义 p 进制 Hardy–Littlewood–Pólya 型积分算子 T_i^p 为: 对于 $f \in L_{w_1}^q(\mathbb{Q}_p^*)$,

$$(T_i^p f)(y) := \int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y) f(x) dx, \quad y \in \mathbb{Q}_p^*;$$

或等价地, 对于 $g \in L_{w_2}^{q'}(\mathbb{Q}_p^*)$,

$$(T_i^p g)(x) := \int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y) g(y) dy, \quad x \in \mathbb{Q}_p^*.$$

则 T_i^p 自 $L_{w_1}^q(\mathbb{Q}_p^*)$ 到 $L_{w_1}^q(\mathbb{Q}_p^*)$ 是有界的, 或等价地, T_i^p 自 $L_{w_2}^{q'}(\mathbb{Q}_p^*)$ 到 $L_{w_2}^{q'}(\mathbb{Q}_p^*)$ 是有界的, 且 $\|T_i^p\|_j = C_i(p,r)$, $i=1,2$, $j=q,q'$, 这里

$$\|T_i^p\|_q := \sup_{f \in L_{w_1}^q(\mathbb{Q}_p^*)} \frac{\|T_i^p f\|_{q,w_1}}{\|f\|_{q,w_1}}, \quad i=1,2; \quad \|T_i^p\|_{q'} := \sup_{g \in L_{w_2}^{q'}(\mathbb{Q}_p^*)} \frac{\|T_i^p g\|_{q',w_2}}{\|g\|_{q',w_2}}, \quad i=1,2.$$

定理 1.3 在定理 1.2 的假设及记号下. 若 $f, g \geq 0$, $f \in L^q_{w_1}(\mathbb{Q}_p^*)$, $g \in L^{q'}_{w_2}(\mathbb{Q}_p^*)$ 且 $\|f\|_{q,w_1}>0$, $\|g\|_{q',w_2} > 0$, 则如下相互等价的不等式成立:

$$\int_{\mathbb{Q}_p^*}\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)f(x)g(y)dxdy < C_i(p,r)\|f\|_{q,w_1}\|g\|_{q',w_2}; \tag{1.5}$$

$$\left[\int_{\mathbb{Q}_p^*} |y|_p^{\frac{q}{r}-1}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)f(x)dx\right)^q dy\right]^{\frac{1}{q}} < C_i(p,r)\|f\|_{q,w_1}; \tag{1.6}$$

$$\left[\int_{\mathbb{Q}_p^*} |x|_p^{\frac{q'}{r'}-1}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)g(y)dy\right)^{q'} dx\right]^{\frac{1}{q'}} < C_i(p,r)\|g\|_{q',w_2}, \tag{1.7}$$

这里常数因子 $C_i(p,r)$, $i=1,2$ 是最佳的.

2 定理 1.2 的证明

本节证明定理 1.2. 需要如下关键引理.

引理 2.1 在定理 1.2 的假设及记号下. 记

$$W_i^{[1]}(r,q;x) := \int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)\cdot\frac{|x|_p^{\frac{q-1}{r}}}{|y|_p^{\frac{1}{r'}}}dy, \quad x\in\mathbb{Q}_p^*, \quad i=1,2; \tag{2.1}$$

$$W_i^{[2]}(r',q';y) := \int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)\cdot\frac{|y|_p^{\frac{q'-1}{r'}}}{|x|_p^{\frac{1}{r}}}dx, \quad y\in\mathbb{Q}_p^*, \quad i=1,2, \tag{2.2}$$

则

$$W_i^{[1]}(r,q;x) = C_i(p,r)|x|_p^{\frac{q}{r}-1}, \quad x\in\mathbb{Q}_p^*, \quad i=1,2;$$
$$W_i^{[2]}(r',q';y) = C_i(p,r)|y|_p^{\frac{q'}{r'}-1}, \quad y\in\mathbb{Q}_p^*, \quad i=1,2.$$

证明 在 (2.1) 中令 $y=xt$, 则由 $dy=|x|_pdt$, 有

$$\begin{aligned}
W_i^{[1]}(r,q;x) &= \int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,xt)\cdot\frac{|x|_p^{\frac{q-1}{r}}}{|xt|_p^{\frac{1}{r'}}}\cdot|x|_pdt \\
&= |x|_p^{\frac{q}{r}-1}\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(1,t)\cdot\frac{1}{|t|_p^{\frac{1}{r'}}}dt \\
&= |x|_p^{\frac{q}{r}-1}\sum_{-\infty<\gamma<\infty}\int_{S_\gamma} K_i^p(1,t)|t|_p^{-\frac{1}{r'}}dt \\
&= |x|_p^{\frac{q}{r}-1}(1-p^{-1})\sum_{-\infty<\gamma<\infty} k_i(1,p^\gamma)p^{-\frac{\gamma}{r'}}\cdot p^\gamma \\
&= C_i(p,r)|x|_p^{\frac{q}{r}-1}, \quad i=1,2.
\end{aligned}$$

类似地, 可以证明

$$W_i^{[2]}(r',q';y) = C_i(p,r)|y|_p^{\frac{q'}{r'}-1}, \quad i=1,2.$$

引理证毕.

接下来开始证明定理 1.2. 对于 $f\in L^q_{w_1}(\mathbb{Q}_p^*)$, 由 Hölder 不等式及引理 2.1, 对于 $y\in\mathbb{Q}_p^*$, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{Q}_p^*}K_i^p(x,y)f(x)dx\right| &\le \int_{\mathbb{Q}_p^*}\left\{[K_i^p(x,y)]^{\frac{1}{q}}\frac{|x|_p^{\frac{1}{q'r}}}{|y|_p^{\frac{1}{qr'}}}|f(x)|\right\}\left\{[K_i^p(x,y)]^{\frac{1}{q'}}\frac{|y|_p^{\frac{1}{qr'}}}{|x|_p^{\frac{1}{q'r}}}\right\}dx\\ &\le [W_i^{[2]}(r',q';y)]^{\frac{1}{q'}}\left\{\int_{\mathbb{Q}_p^*}K_i^p(x,y)\frac{|x|_p^{\frac{q-1}{r}}}{|y|_p^{\frac{1}{r'}}}|f(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\ &=[C_i(p,r)]^{\frac{1}{q'}}|y|_p^{\frac{1}{r'}-\frac{1}{q'}}\left\{\int_{\mathbb{Q}_p^*}K_i^p(x,y)\frac{|x|_p^{\frac{q-1}{r}}}{|y|_p^{\frac{1}{r'}}}|f(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}},\quad i=1,2.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|T_i^pf\|_{q,w_1}&=\left\{\int_{\mathbb{Q}_p^*}|y|_p^{\frac{q}{r}-1}\left|\int_{\mathbb{Q}_p^*}K_i^p(x,y)f(x)dx\right|^q dy\right\}^{\frac{1}{q}}\\ &\le[C_i(p,r)]^{\frac{1}{q'}}\left\{\int_{\mathbb{Q}_p^*}\int_{\mathbb{Q}_p^*}K_i^p(x,y)\frac{|x|_p^{\frac{q-1}{r}}}{|y|_p^{\frac{1}{r'}}}|f(x)|^q\,dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}\\ &=[C_i(p,r)]^{\frac{1}{q'}}\left\{\int_{\mathbb{Q}_p^*}W_i^{[1]}(r,q;x)|f(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\ &=C_i(p,r)\|f\|_{q,w_1},\quad i=1,2.\end{aligned}$$

这就证明了 T_i^p 自 $L^q_{w_1}(\mathbb{Q}_p^*)$ 到 $L^q_w(\mathbb{Q}_p^*)$ 是有界的. 等价地, T_i^p 自 $L^{q'}_{w_2}(\mathbb{Q}_p^*)$ 到 $L^{q'}_{w_2}(\mathbb{Q}_p^*)$ 也是有界的. 这也说明 $\|T_i^p\|_j\le C_i(p,r)$, $i=1,2$, $j=q,q'$.

我们再证明 $\|T_i^p\|_q=C_i(p,r)$, $i=1,2$. 设 $\varepsilon=p^{-N}$, $N\in\mathbb{N}$, 则 $|\varepsilon|_p=p^N$. 定义 $f_\varepsilon(x)$ 如下: 当 $0<|x|_p<1$, 令 $f_\varepsilon(x)=0$; 当 $|x|_p\ge1$, 令 $f_\varepsilon(x)=|x|_p^{-\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{q}}$. 因此

$$\|f_\varepsilon\|^q_{q,w_1}=\int_{|x|_p\ge1}|x|_p^{-1-\varepsilon}dx=\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\varepsilon}}\quad\text{及}\quad T_i^pf_\varepsilon=\int_{|x|_p\ge1}K_i^p(x,y)|x|_p^{-\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{q}}dx.$$

于是

$$\begin{aligned}\|T_i^pf_\varepsilon\|^q_{q,w_1}&=\int_{\mathbb{Q}_p^*}|y|_p^{\frac{q}{r}-1}\left(\int_{|x|_p\ge1}K_i^p(x,y)|x|_p^{-\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{q}}dx\right)^q dy\\ &=\int_{\mathbb{Q}_p^*}|y|_p^{-1-\varepsilon}\left(\int_{|t|_p\ge\frac{1}{|y|_p}}k_i(1,|t|_p)|t|_p^{-\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{q}}dt\right)^q dy\\ &\ge\int_{|y|_p\ge|\varepsilon|_p}|y|_p^{-1-\varepsilon}\left(\int_{|t|_p\ge\frac{1}{|\varepsilon|_p}}k_i(1,|t|_p)|t|_p^{-\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{q}}dt\right)^q dy\\ &=\frac{(1-p^{-1})p^{-N\varepsilon}}{1-p^{-\varepsilon}}\left(\int_{|t|_p\ge\frac{1}{|\varepsilon|_p}}k_i(1,|t|_p)|t|_p^{-\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{q}}dt\right)^q.\end{aligned}$$

从而

$$\|T_i^p\|_q\ge\frac{\|T_i^pf_\varepsilon\|_{q,w_1}}{\|f_\varepsilon\|_{q,w_1}}\ge(\varepsilon^\varepsilon)^{\frac{1}{q}}\int_{|t|_p\ge\frac{1}{|\varepsilon|_p}}k_i(1,|t|_p)|t|_p^{-\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{q}}dt.\tag{2.3}$$

记 $E_N=\{t\in\mathbb{Q}_p^*:|t|_p\ge\frac{1}{|\varepsilon|_p}\}=\{t\in\mathbb{Q}_p^*:|t|_p\ge\frac{1}{p^N}\}$, 则

$$\int_{|t|_p\ge\frac{1}{|\varepsilon|_p}}k_i(1,|t|_p)|t|_p^{-\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{q}}dt=\int_{\mathbb{Q}_p^*}k_i(1,|t|_p)\chi_{E_N}(t)|t|_p^{-\frac{1}{r}-\frac{1}{qp^N}}dt.$$

另一方面, 有 $(\varepsilon^{\varepsilon})^{\frac{1}{q}} \to 1$, $N \to \infty$ 及对于 $t \in \mathbb{Q}_p^*$, 有

$$k_i(1,|t|_p)\chi_{E_N}(t)|t|_p^{-\frac{1}{r}-\frac{1}{qp^N}} \to k_i(1,|t|_p)|t|_p^{-\frac{1}{r}}, \quad N \to \infty.$$

所以, 由 Fatou 引理与式 (2.3), 得到

$$\|T^p\| \ge \int_{\mathbb{Q}_p^*} k_i(1,|t|_p)|t|_p^{-\frac{1}{r}}\, dt = C_i(p,r).$$

因此 $\|T_i^p\|_q = C_i(p,r)$, $i=1,2$. 采用相同方法也可以证明 $\|T_i^p\|_{q'} = C_i(p,r)$, $i=1,2$. 定理 1.2 得证.

3 定理 1.3 的证明

运用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Q}_p^*}\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)f(x)g(y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p^*}\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)\bigg[\frac{|x|_p^{\frac{1}{q'r}}}{|y|_p^{\frac{1}{qr'}}}\cdot f(x)\bigg]\bigg[\frac{|y|_p^{\frac{1}{qr'}}}{|x|_p^{\frac{1}{q'r}}}\cdot g(y)\bigg]dxdy \\
&\le \bigg\{\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)\cdot\frac{|x|_p^{\frac{q-1}{r}}}{|y|_p^{\frac{1}{r'}}}\cdot f^q(x)\,dxdy\bigg\}^{\frac{1}{q}}\bigg\{\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)\cdot\frac{|y|_p^{\frac{q'-1}{r'}}}{|x|_p^{\frac{1}{r}}}\cdot g^{q'}(y)\,dxdy\bigg\}^{\frac{1}{q'}} \\
&= \bigg\{\int_{\mathbb{Q}_p^*} W_i^{[1]}(r,q;x)f^q(x)\,dx\bigg\}^{\frac{1}{q}}\bigg\{\int_{\mathbb{Q}_p^*} W_i^{[2]}(r',q';y)g^{q'}(y)\,dy\bigg\}^{\frac{1}{q'}}. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

若 (3.1) 取等号, 则存在不全为 0 的两个实数 A 和 B, 它们满足在 $\mathbb{Q}_p^*\times\mathbb{Q}_p^*$ 上几乎处处成立

$$A\cdot\frac{|x|_p^{\frac{q-1}{r}}}{|y|_p^{\frac{1}{r'}}}\cdot f^q(x) = B\cdot\frac{|y|_p^{\frac{q'-1}{r'}}}{|x|_p^{\frac{1}{r}}}\cdot g^{q'}(y),$$

见文 [3]. 于是 $A|x|_p^{\frac{q}{r}}f^q(x) = B|y|_p^{\frac{q'}{r'}}g^{q'}(y)$ 在 $\mathbb{Q}_p^*\times\mathbb{Q}_p^*$ 上几乎处处成立. 从而存在实数 C, 使得

$$A|x|_p^{\frac{q}{r}}f^q(x) = C \quad 及 \quad B|y|_p^{\frac{q'}{r'}}g^q(y) = C$$

在 $\mathbb{Q}_p^*$ 上几乎处处成立.

不妨设 $A \neq 0$, 则有 $f^q(x) = \frac{C}{A|x|_p^{\frac{q}{r}}}$ 在 $\mathbb{Q}_p^*$ 上几乎处处成立. 于是 $\|f\|_{q,w_1} = \infty$, 这与 $f \in L_{w_1}^q(\mathbb{Q}_p^*)$ 相矛盾. 从而 (3.1) 只能取严格不等号. 由引理 2.1 及 (3.1) 便得到 (1.5) 成立.

置 $\overline{g}(y) = |y|_p^{\frac{q}{r}-1}\{\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)f(x)dx\}^{q-1}$, $i=1,2$. 运用与证明定理 1.2 相同的方法可以证明 $\overline{g} \in L_{w_2}^{q'}(\mathbb{Q}_p^*)$. 注意到 $\|f\|_{q,w_1} > 0$, 易见 $\|\overline{g}\|_{q',w_2} > 0$. 这样, 由 (1.5) 得到

$$\begin{aligned}
0 < \|\overline{g}\|_{q',w_2}^{q'} &= \int_{\mathbb{Q}_p^*}\bigg[|y|_p^{\frac{q}{r}-1}\bigg\{\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)f(x)dx\bigg)^{q-1}\bigg]^{q'}|y|_p^{\frac{q'}{r'}-1}dy \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p^*}\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)f(x)\overline{g}(y)dxdy < C_i(p,r)\|f\|_{q,w_1}\|g\|_{q',w_2}.
\end{aligned}$$

从而

$$\bigg\{\int_{\mathbb{Q}_p^*}|y|_p^{\frac{q}{r}-1}\bigg(\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)f(x)dx\bigg)^q\bigg\}^{\frac{1}{q}} = \|\overline{g}\|_{q',w_2}^{q'-1} < C_i(p,r)\|f\|_{q,w_1}.$$

这就证明了 (1.5) 蕴含 (1.6).

另一方面假设 (1.6) 成立, 再次运用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}_p^*}\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)f(x)g(y)dxdy &= \int_{\mathbb{Q}_p^*}\left[|y|_p^{\frac{1}{q'}-\frac{1}{r'}}\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)f(x)dx\right]\left[|y|_p^{\frac{1}{r'}-\frac{1}{q'}}g(y)\right]dy \\ &\le \left\{\int_{\mathbb{Q}_p^*}|y|_p^{\frac{q}{r}-1}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^*} K_i^p(x,y)f(x)dx\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}\|g\|_{q',w_2}.\end{aligned}$$

于是, 由 (1.6) 可以得到 (1.5) 成立. 这就说明 (1.5) 与 (1.6) 等价. 类似可以证明 (1.7) 与 (1.5) 也相互等价. 另外, 由定理 1.2 知 (1.6) 与 (1.7) 中的常数因子 $C_i(p,r)$, $i=1,2$ 都是最佳的. 结合 (1.5)–(1.7) 之间的等价性知 (1.5) 中的常数因子也是最佳的. 这就完成了定理 1.3 的证明.

4 一些特殊结果

取

$$g(x,y)=A(xy)^{\frac{\lambda}{2}}+B(x^\lambda+y^\lambda)\ \ (A\ge 0,\ B\ge 0,\ A+B>0,\ 0\le\lambda<\infty), \tag{4.1}$$

或

$$g(x,y)=A\left|x^\lambda-y^\lambda\right|+B(x^\lambda+y^\lambda)\ \ (A\ge 0,\ B>0,\ 0\le\lambda<\infty). \tag{4.2}$$

于是

$$\begin{aligned}C_1(p,r) &= (1-p^{-1})\left[(A+2B)+\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{Ap^{\frac{\gamma\lambda}{2}}+B(1+p^{\gamma\lambda})}{p^{\gamma(\lambda+1)}}p^{\frac{\gamma}{r'}}+\frac{Ap^{\frac{\gamma\lambda}{2}}+B(1+p^{\gamma}\lambda)}{p^{\gamma(\lambda+1)}}p^{\frac{\gamma}{r}}\right] \\ &= (1-p^{-1})\left[(A+2B)+\frac{A}{p^{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{r}}-1}+\frac{A}{p^{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{r'}}-1}+\frac{B}{p^{\lambda+\frac{1}{r}}-1}+\frac{B}{p^{\lambda+\frac{1}{r'}}-1}+\frac{B}{p^{\frac{1}{r}}-1}+\frac{B}{p^{\frac{1}{r'}}-1}\right],\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}C_1(p,r) &= (1-p^{-1})\left[2B+\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{A(p^{\gamma\lambda}-1)+B(1+p^{\gamma\lambda})}{p^{\gamma(\lambda+1)}}p^{\frac{\gamma}{r'}}+\frac{A(p^{\gamma\lambda}-1)+B(1+p^{\gamma}\lambda)}{p^{\gamma(\lambda+1)}}p^{\frac{\gamma}{r}}\right] \\ &= (1-p^{-1})\left[2B+\frac{A}{p^{\frac{1}{r}}-1}-\frac{A}{p^{\lambda+\frac{1}{r}}-1}+\frac{A}{p^{\frac{1}{r'}}-1}-\frac{A}{p^{\lambda+\frac{1}{r'}}-1}+\frac{B}{p^{\lambda+\frac{1}{r}}-1}+\frac{B}{p^{\lambda+\frac{1}{r'}}-1}+\frac{B}{p^{\frac{1}{r}}-1}+\frac{B}{p^{\frac{1}{r'}}-1}\right].\end{aligned}$$

(1) 在 (4.1) 中取 $A=0$, $B=\frac{1}{2}$, $\lambda=0$ 或 $A=1$, $B=0$, $\lambda=0$, 或在 (4.2) 中取 $A=0$, $B=\frac{1}{2}$, $\lambda=0$, 则由定理 1.3 有

推论 4.1 若 $f,g\ge 0$, $f\in L^q_{w_1}(\mathbb{Q}_p^*)$, $g\in L^{q'}_{w_2}(\mathbb{Q}_p^*)$, 且 $\|f\|_{q,w_1}>0$, $\|g\|_{q',w_2}>0$, 则有如下等价不等式成立:

$$\int_{\mathbb{Q}_p^*}\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{f(x)g(y)}{\max\{|x|_p,|y|_p\}}dxdy<C(p,r)\|f\|_{q,w_1}\|g\|_{q',w_2};$$

$$\left[\int_{\mathbb{Q}_p^*}|y|_p^{\frac{q}{r}-1}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{f(x)}{\max\{|x|_p,|y|_p\}}dx\right)^q dy\right]^{\frac{1}{q}}<C(p,r)\|f\|_{q,w_1};$$

$$\left[\int_{\mathbb{Q}_p^*}|x|_p^{\frac{q'}{r'}-1}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{g(y)}{\max\{|x|_p,|y|_p\}}dy\right)^{q'} dx\right]^{\frac{1}{q'}}<C(p,r)\|g\|_{q',w_2},$$

这里 $C(p,r)=(1-p^{-1})\left[1+\frac{1}{p^{\frac{1}{r}}-1}+\frac{1}{p^{\frac{1}{r'}}-1}\right]$ 是最佳的.

(2) 在 (4.1) 中取 $A=2$, $B=1$, 有

推论 4.2 若 $f,g\geq 0$, $f\in L^q_{w_1}(\mathbb{Q}_p^*)$, $g\in L^{q'}_{w_2}(\mathbb{Q}_p^*)$ 且 $\|f\|_{q,w_1}>0$, $\|g\|_{q',w_2}>0$, 则有如下等价不等式成立:

$$\int_{\mathbb{Q}_p^*}\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{(|x|_p^{\frac{\lambda}{2}}+|y|_p^{\frac{\lambda}{2}})^2}{\max\{|x|_p,|y|_p\}^{\lambda+1}}f(x)g(y)dxdy<C(p,r)\|f\|_{q,w_1}\|g\|_{q',w_2};$$

$$\bigg[\int_{\mathbb{Q}_p^*}|y|_p^{\frac{q}{r}-1}\bigg(\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{(|x|_p^{\frac{\lambda}{2}}+|y|_p^{\frac{\lambda}{2}})^2}{\max\{|x|_p,|y|_p\}^{\lambda+1}}f(x)dx\bigg)^q dy\bigg]^{\frac{1}{q}}<C(p,r)\|f\|_{q,w_1};$$

$$\bigg[\int_{\mathbb{Q}_p^*}|x|_p^{\frac{q'}{r'}-1}\bigg(\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{(|x|_p^{\frac{\lambda}{2}}+|y|_p^{\frac{\lambda}{2}})^2}{\max\{|x|_p,|y|_p\}^{\lambda+1}}g(y)dy\bigg)^{q'} dx\bigg]^{\frac{1}{q'}}<C(p,r)\|g\|_{q',w_2},$$

这里 $C(p,r)=(1-p^{-1})\big[4+\frac{2}{p^{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{r}}-1}+\frac{2}{p^{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{r'}}-1}+\frac{1}{p^{\lambda+\frac{1}{r}}-1}+\frac{1}{p^{\lambda+\frac{1}{r'}}-1}+\frac{1}{p^{\frac{1}{r}}-1}+\frac{1}{p^{\frac{1}{r'}}-1}\big]$ 是最佳的.

特别地, 当 $\lambda=1$, 有

$$\int_{\mathbb{Q}_p^*}\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{(\sqrt{|x|_p}+\sqrt{|y|_p})^2}{\max\{|x|_p,|y|_p\}^{2}}f(x)g(y)dxdy<C(p,r)\|f\|_{q,w_1}\|g\|_{q',w_2};$$

$$\bigg[\int_{\mathbb{Q}_p^*}|y|_p^{\frac{q}{r}-1}\bigg(\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{(\sqrt{|x|_p}+\sqrt{|y|_p})^2}{\max\{|x|_p,|y|_p\}^{2}}f(x)dx\bigg)^q dy\bigg]^{\frac{1}{q}}<C(p,r)\|f\|_{q,w_1};$$

$$\bigg[\int_{\mathbb{Q}_p^*}|x|_p^{\frac{q'}{r'}-1}\bigg(\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{(\sqrt{|x|_p}+\sqrt{|y|_p})^2}{\max\{|x|_p,|y|_p\}^{2}}g(y)dy\bigg)^{q'} dx\bigg]^{\frac{1}{q'}}<C(p,r)\|g\|_{q',w_2},$$

这里 $C(p,r)=(1-p^{-1})\big[4+\frac{2}{p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}}-1}+\frac{2}{p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r'}}-1}+\frac{1}{p^{1+\frac{1}{r}}-1}+\frac{1}{p^{1+\frac{1}{r'}}-1}+\frac{1}{p^{\frac{1}{r}}-1}+\frac{1}{p^{\frac{1}{r'}}-1}\big]$ 是最佳的.

(3) 取 $h(t)=t$, 简单计算得到 $C_2(p,r)=[(1-p^{-1})\ln p]\cdot\big[\frac{p^{\frac{1}{r}}}{(p^{\frac{1}{r}}-1)^2}+\frac{p^{\frac{1}{r'}}}{(p^{\frac{1}{r'}}-1)^2}\big]$. 于是有

推论 4.3 若 $f,g\geq 0$, $f\in L^q_{w_1}(\mathbb{Q}_p^*)$, $g\in L^{q'}_{w_2}(\mathbb{Q}_p^*)$ 且 $\|f\|_{q,w_1}>0$, $\|g\|_{q',w_2}>0$, 则有如下等价不等式成立:

$$\int_{\mathbb{Q}_p^*}\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{|\ln\frac{|x|_p}{|y|_p}|}{\max\{|x|_p,|y|_p\}}f(x)g(y)dxdy<C(p,r)\|f\|_{q,w_1}\|g\|_{q',w_2};$$

$$\bigg[\int_{\mathbb{Q}_p^*}|y|_p^{\frac{q}{r}-1}\bigg(\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{|\ln\frac{|x|_p}{|y|_p}|}{\max\{|x|_p,|y|_p\}}f(x)dx\bigg)^q dy\bigg]^{\frac{1}{q}}<C(p,r)\|f\|_{q,w_1};$$

$$\bigg[\int_{\mathbb{Q}_p^*}|x|_p^{\frac{q'}{r'}-1}\bigg(\int_{\mathbb{Q}_p^*}\frac{|\ln\frac{|x|_p}{|y|_p}|}{\max\{|x|_p,|y|_p\}}g(y)dy\bigg)^{q'} dx\bigg]^{\frac{1}{q'}}<C(p,r)\|g\|_{q',w_2},$$

这里 $C(p,r)=[(1-p^{-1})\ln p]\cdot\big[\frac{p^{\frac{1}{r}}}{(p^{\frac{1}{r}}-1)^2}+\frac{p^{\frac{1}{r'}}}{(p^{\frac{1}{r'}}-1)^2}\big]$ 是最佳的.

注 4.4 若在定理 1.3 中取 $h(t)\equiv 1$, 则立刻得到推论 4.1.

参 考 文 献

[1] Fu Z. W., Wu Q. Y., Lu S. Z., Sharp estimates of p-adic Hardy and Hardy–Littlewood–Pólya operators, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2013, **29**(1): 137–150.

[2] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G., Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[3] Kuang J. C., Applied Inequalities (in Chinese), Shandong Science and Technology Press, Ji'nan, 2004.

[4] Taibleson M. H., Fourier Analysis on Local Fields, Princeton University Press, Princeton, 1975.

[5] Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I., p-Adic Analysis and Mathematical Physics, World Scientific, Singapore, 1994.