第63卷第6期 数学学报中文版 Vol.63, No.6
2020年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2020

**文章编号:** 0583-1431(2020)06-0577-10 **文献标识码:** A

# 多复变 Pang–Zalcman 引理及应用

杨 刘

安徽工业大学数理科学与工程学院 马鞍山 243032
E-mail: yangliu6@ahut.edu.cn

庞学诚

华东师范大学数学科学学院 上海 200241
E-mail: xcpang@math.ecnu.edu.cn

**摘 要** 单复变中的 Pang–Zalcman 引理是研究亚纯函数正规族问题的重要工具. 本文将该引理推广至多复变全纯函数的情形. 作为应用建立了多复变全纯函数族的正规定则, 改进和推广了相关结果.

**关键词** 正规族; 多复变全纯函数; 球面导数
**MR(2010) 主题分类** 32A19, 32A22, 30D45
**中图分类** O174.5

## Pang–Zalcman Lemma of Several Complex Variables and Its Applications

Liu YANG

*School of Mathematics and Physics, Anhui University of Technology,*
*Maanshan* 243032*, P. R. China*
*E-mail*: *yangliu6@ahut.edu.cn*

Xue Cheng PANG

*Department of Mathematics, East China Normal University,*
*Shanghai* 200241*, P. R. China*
*E-mail*: *xcpang@math.ecnu.edu.cn*

**Abstract** The Pang–Zalcman lemma is an important tool to study normal families of meromorphic functions. In this paper, we extend Pang–Zalcman lemma to the case of holomorphic functions of several complex variables and establish some normality criteria as applications.

**Keywords** normal family; holomorphic functions of several complex variables; spherical derivative
**MR(2010) Subject Classification** 32A19, 32A22, 30D45
**Chinese Library Classification** O174.5

收稿日期: 2019-08-14; 接受日期: 2020-01-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11701006, 11871216); 安徽省自然科学基金资助项目 (1808085QA02)

## 1 引言

相应于著名的 Bloch 原理, Zalcman [19] 得到亚纯函数族在一点不正规的充要条件: 如果亚纯函数族 $\mathscr{F}$ 不正规, 那么可以在原函数族的基础上构造一列函数内闭一致收敛到复平面 $\mathbb{C}$ 上的某个非常值亚纯函数. 这样可以用值分布的结果来研究一些正规族的问题, 该结果被称为 Zalcman 引理. 庞学诚 [12] 对该引理做了实质性的推广, 使之成为研究涉及导数的正规族问题的有力工具. 它被称为 Pang–Zalcman 引理, 见文 [3, 7, 9, 20], [16, 103 页] 及 [18, 114 页].

**定理 A** (Pang–Zalcman 引理) 设 $\mathscr{F}$ 是区域 $D\subset\mathbb{C}$ 上的亚纯函数族, $-1<\alpha<1$. 若 $\mathscr{F}$ 在 $z_0$ 处不正规, 则存在

(1) 函数列 $f_j\in\mathscr{F}$;

(2) 点列 $z_j, z_j\to z_0$;

(3) 正数列 $\rho_j\to 0$,

使得

$$g_j(\xi)=\rho_j^{-\alpha}f_j(z_j+\rho_j\xi)\to g(\xi)$$

在球面距离内闭一致收敛, 其中 $g$ 为 $\mathbb{C}$ 上的不是常函数的亚纯函数且 $g^{\#}(\xi)\le g^{\#}(0)=1$.

上述结果中 $\alpha=0$, 即 Zalcman 引理 [19]. 文 [1, 4, 10, 15] 也分别对 Zalcman 引理进行了不同的推广和应用. 另一方面, 将亚纯函数正规族推广至多复变情形是一类自然的问题. 为了叙述相关结果, 下面回顾一些基本的概念和符号.

设 $\mathbb{C}^n=\{z=(z_1,\dots,z_n);\, z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}\}$ 为 $n$ 维复空间. 分别令 $z=(z_1,\dots,z_n)$, $w=(w_1,\dots,w_n)\in\mathbb{C}^n$, $\lambda\in\mathbb{C}$, 定义 $z,w$ 的和、差、标量积分别为

$$z+w=(z_1+w_1,\dots,z_n+w_n),\quad z-w=(z_1-w_1,\dots,z_n-w_n),\quad \lambda z=(\lambda z_1,\dots,\lambda z_n).$$

定义 $z,w$ 的 Hermite 内积为 $\langle z,w\rangle=\sum_{i=1}^n z_i\overline{w}_j$, 且定义 $z$ 的共轭为 $\overline{z}=(\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_n)$, $z$ 的模为 $\|z\|=\sqrt{\langle z,\overline{z}\rangle}$. 显然有

$$\|z\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n|z_i|^2}.$$

固定 $a\in\mathbb{C}^n$, $r>0$, 记 $B(a,r)=\{z\in\mathbb{C}^n;\,\|z-a\|<r\}$ 为以 $a$ 为中心 $r$ 为半径的球, 其边界 $\partial B(a,r)=\{z\in\mathbb{C}^n;\,\|z-a\|=r\}$ 为球面, 其闭包为 $\overline{B}(a,r)=\{z\in\mathbb{C}^n;\,\|z-a\|\le r\}$.

令 $v\in\mathbb{C}^n:\|v\|=1$, $a\in\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ 中沿方向 $v$ 过点 $a$ 的复直线记为

$$l_{v,a}(\zeta)=\{z=a+\zeta v;\,\zeta\in\mathbb{C}\}.$$

设 $\Omega$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个区域, 符号 $\mathscr{C}(\Omega),\mathscr{H}(\Omega)$ 和 $\mathscr{M}(\Omega)$ 分别表示 $\Omega$ 上所有连续函数的集合、所有全纯函数的集合及所有亚纯函数的集合.

设 $f\in\mathscr{H}(\Omega), v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{C}^n:\|v\|=1$, $f_{z_i}(z)=\frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$, 分别令

$$\nabla f=(f_{z_1},\dots,f_{z_n}),\quad \langle v,\overline{\nabla f}\rangle=\sum_{i=1}^n v_if_{z_i}.$$

易见

$$\langle v,\overline{\nabla f(z)}\rangle=\lim_{\zeta\to 0}\frac{f(z+\zeta v)-f(z)}{\zeta}=\lim_{\zeta\to 0}\frac{f\circ l_{v,z}(\zeta)-f(z)}{\zeta},$$

即 $\langle v,\overline{\nabla f(z)}\rangle$ 可视为 $f$ 沿方向 $v$ 在点 $z$ 处的导数. 由 Cauchy–Buniakowsky–Schwarz 不等式 $|\langle v,\overline{\nabla f(z)}\rangle|\le\|v\|\cdot\|\overline{\nabla f(z)}\|$, 且等号成立当且仅当 $v$ 与 $\overline{\nabla f(z)}$ 线性相关, 故

$$\sup_{\|v\|=1}|\langle v,\overline{\nabla f(z)}\rangle|=\|\overline{\nabla f(z)}\|=\|\nabla f(z)\|,$$

即函数 $f$ 沿各方向在点 $z$ 处的导数的最大模为 $\|\nabla f(z)\|$.

**定义 1.1** 设 $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(\Omega)$, 如果对于 $\mathscr{F}$ 中的任一函数序列 $\{f_j(z)\}$, 或者可选出它的一子列 $\{f_{j_k}(z)\}$ 在 $\Omega$ 上内闭一致收敛于一全纯函数, 或者可选出它的一子列 $\{f_{j_k}(z)\}$ 在 $\Omega$ 上内闭一致发散于 $\infty$, 那么我们称 $\mathscr{F}$ 在区域 $\Omega$ 上正规.

**定义 1.2** 设 $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(\Omega)$, $z_0\in\Omega$. 若对于 $\mathscr{F}$ 在 $z_0$ 的某区域 $\Omega$ 上正规, 则称 $\mathscr{F}$ 在点 $z_0$ 处正规.

**注 1.3** 设 $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(\Omega)$, 则 $\mathscr{F}$ 在 $\Omega$ 上正规当且仅当 $\mathscr{F}$ 在 $\Omega$ 上的每一点处正规.

最近, Dovbush [6] 得到多复变全纯函数版的 Zalcman 引理.

**定理 B** 设区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(\Omega)$. 若 $\mathscr{F}$ 在 $z_0\in\Omega$ 处不正规, 则存在

(1) 函数列 $f_j\in\mathscr{F}$;

(2) 点列 $z_j, z_j\to z_0$;

(3) 正数列 $\rho_j\to 0$,

使得

$$g_j(z)=f_j(z_j+\rho_j z)\to g(z)$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上内闭一致收敛, 其中 $g\in\mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$ 不是常函数且 $g^{\#}(z)\le g^{\#}(0)=1$.

张莎莎和涂振汉 [21] 将 Pang–Zalcman 引理推广至多复变全纯函数如下:

**定理 C** 设区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(\Omega)$. 若 $\mathscr{F}$ 在 $z_0\in\Omega$ 处不正规, 则对任意 $-1<\alpha<1$, 存在

(1) 函数列 $f_j\in\mathscr{F}$;

(2) 点列 $z_j, z_j\to z_0$;

(3) 正数列 $\rho_j\to 0$;

(4) 欧氏单位向量 $v_j\in\mathbb{C}^n$,

使得

$$g_j(\zeta)=\rho_j^{-\alpha}f_j(z_j+\rho_j v_j\zeta)\to g(\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛, 其中 $g\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$ 不是常函数.

定理 C 使得借助单复变值分布结果即可得到多复变函数的正规定则, 如可以得到涉及 Hayman 问题的如下正规定则 [21]:

**定理 D** 设区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(\Omega)$, $h\in\mathscr{C}(\Omega): h\neq 0$, $k\in\mathbb{Z}_{\ge 1}$. 若任意 $f\in\mathscr{F}$, $v\in\mathbb{C}^n: \|v\|=1$, 有 $f^k\cdot\langle v,\overline{\nabla f}\rangle\neq h(z)$, 则 $\mathscr{F}$ 在 $\Omega$ 上正规.

**定理 E** 设区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(\Omega)$, $h\in\mathscr{C}(\Omega): h\neq 0$, $k\in\mathbb{Z}_{\ge 3}$. 若任意 $f\in\mathscr{F}$, $v\in\mathbb{C}^n: \|v\|=1$, 有 $\langle v,\overline{\nabla f}\rangle-f^k\neq h(z)$, 则 $\mathscr{F}$ 在 $\Omega$ 上正规.

在利用定理 C 建立正规定则时, 往往要求条件沿任意方向都要成立. 而如果沿每个方向都满足条件, 根据如下单复变与多复变正规定则的关系 [2] 正规定则一般是自然成立的.

**定理 F** 设 $B(0,1)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的单位球, $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(B(0,1))$. 若将 $\mathscr{F}$ 限制在过原点的每条直线上正规, 则 $\mathscr{F}$ 正规.

在已知结果的基础上, 本文第 2 节给出多复变全纯函数族的 Pang–Zalcman 引理的另一种形式, 作为应用改进了上述涉及 Hayman 问题的正规定则 (见下面 3.1 节). 另外, 文 [5] 中得到一个关于多复变全纯函数族球面导数的正规定则, 在 3.2 节我们指出这个结果是错误的, 利用推广的引理我们证明了球面导数内闭一致有正下界的全纯函数族是正规的.

## 2 多复变 Pang–Zalcman 引理

下面回顾多复变全纯函数球面导数的概念. 设区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, $\varphi\in\mathscr{C}^2(\Omega)$ 具有二阶连续偏导数, 令

$$L_z(\varphi,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}v_i\overline{v}_j,$$

其中 $z\in\Omega, v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{C}^n$, 称之为 $\varphi$ 在 $z$ 点的 Levi 形式. 设 $f\in\mathscr{H}(\Omega)$, 令

$$f^{\#}(z)=\sup_{|v|=1}\sqrt{L_z\big(\log(1+|f|^2),v\big)}.$$

**注 2.1** 经计算

$$f^{\#}(z)=\sup_{\|v\|=1}\frac{|\langle v,\overline{\nabla f(z)}\rangle|}{1+|f(z)|^2}=\frac{\|\nabla f(z)\|}{1+|f(z)|^2},$$

显然它是亚纯函数的球面导数的推广.

多复变全纯函数的 Marty 定则 [6] 可叙述如下:

**定理 G** 设 $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(\Omega)$, 则 $\mathscr{F}$ 正规当且仅当对任意紧集 $K\subset\Omega$, 存在常数 $M(K)>0$, 使得

$$f^{\#}(z)\le M(K),\quad\forall\, z\in K,\quad f\in\mathscr{F}$$

成立.

设 $\alpha\in\mathbb{R}$, $0<r<1$, 为叙述方便定义

$$F(z,t)=\frac{(1-\|z\|^2/r^2)^{1+\alpha}t^{1+\alpha}\|\nabla f(z)\|}{(1-\|z\|^2/r^2)^{2\alpha}t^{2\alpha}+|f(z)|^2},$$

其中 $z\in B(0,1)$, $0<t\le 1$.

我们的证明需要建立如下引理.

**引理 2.2** 设 $f\in\mathscr{H}(B(0,1))$, $-\infty<\alpha<1$, $0<r<1$. 若存在 $z^*\in B(0,r)$, 使得

$$F(z^*,1)>1, \tag{2.1}$$

则存在 $w_0\in B(0,r)$, $0<t<1$, 使得

$$\sup_{\|z\|<r}F(z,t)=F(w_0,t)=1. \tag{2.2}$$

**证明** 令 $E=\{(z,t); z\in B(0,r),\ 0<t\le 1\}$, 则 $F(z,t)\in\mathscr{C}(E)$. 我们断言

$$\limsup_{(1-\|z\|^2/r^2)t\to 0}F(z,t)=0. \tag{2.3}$$

为此取 $z_j\in B(0,r)$, $0<t_j<1$ 且 $(1-\|z_j\|^2/r^2)t_j\to 0$. 不妨设 $z_j\to z_0\in\overline{B}(0,r)$.

注意到 $-\infty<\alpha<1$, 则

$$\limsup_{j\to\infty}F(z_j,t_j)\le\limsup_{j\to\infty}(1-\|z_j\|^2/r^2)^{1-\alpha}t_j^{1-\alpha}\|\nabla f(z_j)\|=0.$$

故断言成立.

令

$$U = \{(z,t) \in E;\ F(z,t) > 1\},$$

由条件 (2.1) 有 $(z^*,1) \in U$, 故 $U \neq \emptyset$. 记 $t_0 = \inf\{t; (z,t) \in U\}$, 由断言 (2.3) 知 $t_0 > 0$. 取 $w_0 : (w_0,t_0) \in \overline{U}$. 由断言 (2.3) 知 $w_0 \in B(0,r)$. 所以由 $F \in \mathscr{C}(E)$, 有

$$\sup_{\|z\|<r} F(z,t) = F(w_0,t) = 1.$$

所以该引理得证. 证毕.

若 $f(z) \neq 0$, 则上述引理的结论对 $-1 < \alpha < +\infty$ 均成立.

**引理 2.3** 设 $f \in \mathscr{H}(B(0,1))$, $-1 < \alpha < +\infty$, $0 < r < 1$, 且对任意 $z \in B(0,1)$, $f(z) \neq 0$. 若存在 $z^* \in B(0,r)$, 使得

$$F(z^*,1) > 1,$$

则存在 $w_0 \in B(0,r)$, $0 < t < 1$, 使得

$$\sup_{\|z\|<r} F(z,t) = F(w_0,t) = 1.$$

**证明** 在引理 2.2 的证明过程中, 注意到此时 $f(z_0) \neq 0$, $-1 < \alpha < +\infty$, 则

$$\limsup_{j\to\infty} F(z_j,t_j) \leq \limsup_{j\to\infty} (1 - \|z_j\|^2/r^2)^{1+\alpha} t_j^{1+\alpha} \frac{\|\nabla f(z_j)\|}{|f(z_j)|^2} = 0.$$

断言仍成立, 因此类似地可得结论. 证毕.

受定理 A–C 的启发, 我们得到多复变全纯函数的 Pang–Zalcman 引理.

**定理 2.4** 设区域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$. 若 $\mathscr{F}$ 在 $z_0 \in \Omega$ 处不正规, 则对任意 $-\infty < \alpha < 1$, 存在

(1) 函数列 $f_j \in \mathscr{F}$;

(2) 点列 $z_j, z_j \to z_0$;

(3) 正数列 $\rho_j \to 0$,

使得

$$g_j(z) = \rho_j^{-\alpha} f_j(z_j + \rho_j z) \to g(z)$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上内闭一致收敛, 其中 $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$ 不是常函数且满足

$$g^{\#}(z) \leq g^{\#}(0) = 1.$$

**证明** 为方便叙述, 不妨设 $\Omega = B(0,1)$, $z_0 = 0$. 因 $\mathscr{F}$ 在 $z = 0$ 处不正规, 由定理 G, 存在 $f_j \in \mathscr{F}$, $r^* : 0 < r^* < 1$, $z_j^* \in B(0,r^*)$, 使得

$$f_j^{\#}(z_j^*) = \frac{\|\nabla f(z_j^*)\|}{1 + |f_j(z_j^*)|^2} \to \infty. \tag{2.4}$$

记

$$F_j(z,t) = \frac{(1 - \|z\|^2/r^2)^{1+\alpha} t^{1+\alpha} \|\nabla f_j(z)\|}{(1 - \|z\|^2/r^2)^{2\alpha} t^{2\alpha} + |f_j(z)|^2}.$$

固定 $r: r^* < r < 1$, 则

$$F_j(z_j^*, 1) \geq (1 - \|z_j^*\|^2/r^2)^{1+\alpha} f_j^{\#}(z_j^*), \tag{2.5}$$

故由 (2.4), (2.5) 知 $F_j(z_j^*, 1) \to \infty$. 由引理 2.2 知, 存在 $z_j \in B(0, r)$, $t_j: 0 < t_j < 1$, 使得

$$\sup_{\|z\|<r} F_j(z, t_j) = F_j(z_j, t_j) = 1. \tag{2.6}$$

特别地, 有

$$1 \geq F_j(z_j^*, t_j) \geq t_j^{1+\alpha} F_j(z_j^*, 1).$$

再由 $F(z_j^*, 1) \to \infty$, 注意到 $0 < t_j < 1$, 可得 $t_j \to 0$.

令

$$\rho_j = (1 - \|z_j\|^2/r^2) t_j, \tag{2.7}$$

则

$$\frac{\rho_j}{r - \|z_j\|} \to 0 \quad (j \to \infty). \tag{2.8}$$

定义

$$g_j(z) = \rho_j^{-\alpha} f_j(z_j + \rho_j z),$$

其中 $\|z\| < R_j := \frac{r - |z_j|}{\rho_j}$.

下证 $\{g_j(z)\}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上正规. 为此, 任取 $R > 0$, $\|z\| \leq R$, 由 (2.8) 知 $R_j \to \infty$, 故 $j$ 充分大后有 $\|z\| \leq R < R_j$, 从而 $\|z_j + \rho_j z\| \leq \|z_j\| + \rho_j \|z\| < r$. 因为

$$\|z_j\|^2 - 2\rho_j R - \rho_j^2 R^2 \leq \|z_j + \rho_j z\|^2 \leq \|z_j\|^2 + 2\rho_j R + \rho_j^2 R^2,$$

再由 (2.8) 有 $\frac{1 - \|z_j\|^2/r^2}{1 - \|z_j + \rho_j z\|^2/r^2}$ 关于 $\|z\| \leq R$ 一致收敛于 1. 因此经过简单的计算, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 由 $g_j(z), F_j(z, t)$ 的定义及 (2.7), $j$ 充分大后有

$$\begin{aligned}
g_j^{\#}(z) &= \frac{\|\nabla g_j(z)\|}{1 + |g_j(z)|^2} \\
&= \frac{\rho_j^{1-\alpha} \|\nabla f_j(z_j + \rho_j z)\|}{1 + \rho_j^{-2\alpha} |f_j(z_j + \rho_j z)|^2} \\
&= \frac{\rho_j^{1+\alpha} \|\nabla f_j(z_j + \rho_j z)\|}{\rho_j^{2\alpha} + |f_j(z_j + \rho_j z)|^2} \\
&= \frac{(1 - \|z_j\|^2/r^2)^{1+\alpha} t_j^{1+\alpha} \|\nabla f_j(z_j + \rho_j z)\|}{(1 - \|z_j\|^2/r^2)^{2\alpha} t_j^{2\alpha} + |f_j(z_j + \rho_j z)|^2} \\
&\leq (1 + \varepsilon) \frac{(1 - \|z_j + \rho_j z\|^2/r^2)^{1+\alpha} t_j^{1+\alpha} \|\nabla f_j(z_j + \rho_j z)\|}{(1 - \|z_j + \rho_j z\|^2/r^2)^{2\alpha} t_j^{2\alpha} + |f_j(z_j + \rho_j z)|^2} \\
&= (1 + \varepsilon) F_j(z_j + \rho_j z, t_j) \\
&\leq (1 + \varepsilon) \sup_{\|z\|<r} F_j(z, t_j) \\
&= (1 + \varepsilon).
\end{aligned}$$

由定理 G, $\{g_j(z)\}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上正规. 通过选取子列不妨设 $g_j(z) \to g(z)$, 再由 (2.6) 有

$$g_j^{\#}(0) = F_j(z_j, t_j) = 1,$$

故 $g$ 不是常函数且满足

$$g^{\#}(z) \leq g^{\#}(0) = 1.$$

此处 $\|z_j\| < r$, 利用文 [11, 引理 4.1] 的证明方法可以进一步选取出 $z_j \to z_0$. 故定理得证. 证毕.

由证明过程及引理 2.3 可见, 若 $f \neq 0$, $f \in \mathscr{F}$, 则定理结论对 $-1 < \alpha < +\infty$ 均成立, 即得

**定理 2.5** 设区域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$, 且 $f \neq 0$, $f \in \mathscr{F}$. 若 $\mathscr{F}$ 在 $z_0 \in \Omega$ 处不正规, 则对任意 $-1 < \alpha < +\infty$, 存在

(1) 函数列 $f_j \in \mathscr{F}$;

(2) 点列 $z_j, z_j \to z_0$;

(3) 正数列 $\rho_j \to 0$,

使得

$$g_j(z) = \rho_j^{-\alpha} f_j(z_j + \rho_j z) \to g(z)$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上内闭一致收敛, 其中 $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$ 不是常函数且满足 $g^{\#}(z) \leq g^{\#}(0) = 1$.

## 3 应用

利用上面获得的多复变 Pang–Zalcman 引理, 我们将定理 D 和定理 E 分别改进如下.

**定理 3.1** 设区域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$, $h \in \mathscr{C}(\Omega)$ : $h \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 若任意 $f \in \mathscr{F}$, $1 \leq i \leq n$, 有 $f^k \cdot f_{z_i} \neq h(z)$, 则 $\mathscr{F}$ 在 $\Omega$ 上正规.

**证明** 假设 $\mathscr{F}$ 在 $z_0 \in \Omega$ 不正规, 则由定理 2.4, 取 $\alpha = \frac{1}{k+1}$, 存在 $f_j \in \mathscr{F}$, $z_j \to z_0$, $\rho_j \to 0$, 使得

$$g_j(z) = \rho_j^{-\frac{1}{k+1}} f_j(z_j + \rho_j z)$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上内闭一致收敛于一个非常数函数 $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$.

由于

$$g_j^k(z) \frac{\partial g_j(z)}{\partial z_i} - h(z_j + \rho_j z) \Rightarrow g^k(z) \frac{\partial g(z)}{\partial z_i} - h(z_0),$$

其中 $z \in \mathbb{C}^n$, $1 \leq i \leq n$, $j \to \infty$, 而

$$f_j^k(z_j + \rho_j z) \frac{\partial f_j(z_j + \rho_j z)}{\partial z_i} - h(z_j + \rho_j z) = g_j^k(z) \frac{\partial g_j(z)}{\partial z_i} - h(z_j + \rho_j z) \neq 0.$$

因此, 由 Hurwitz 定理 (见文 [17, 13 页]), 对 $1 \leq i \leq n$,

$$g^k(z) \frac{\partial g(z)}{\partial z_i} \equiv h(z_0), \quad \text{或} \quad g^k(z) \frac{\partial g(z)}{\partial z_i} \neq h(z_0).$$

若对 $1 \leq i \leq n$, $g^k(z) \frac{\partial g(z)}{\partial z_i} \neq h(z_0)$, 则由亚纯函数 Picard 型定理有 $g$ 是关于每个变量是一个常数, 从而 $g$ 是一个常数. 不失一般性, 设对 $1 \leq i \leq i_0$, 有

$$g^k(z) \frac{\partial g(z)}{\partial z_i} \equiv h(z_0);$$

对 $i_0 < i \leq n$, 有

$$g^k(z) \frac{\partial g(z)}{\partial z_i} \neq h(z_0).$$

则由亚纯函数 Picard 型定理有

$$g^{k+1}(z)=(k+1)h(z_0)(z_1+\cdots+z_{i_0})+c,$$

其中 $c$ 是一个常数. 这导致矛盾. 所以 $\mathscr{F}$ 在 $\Omega$ 上正规. 证毕.

**定理 3.2** 设区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(\Omega)$, $h\in\mathscr{C}(\Omega)$ : $h\neq 0$, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 3}$. 若任意 $f\in\mathscr{F}$, $1\leq i\leq n$, 有 $f_{z_i}-f^k\neq h(z)$, 则 $\mathscr{F}$ 在 $\Omega$ 上正规.

**证明** 假设 $\mathscr{F}$ 在 $z_0\in\Omega$ 不正规, 则由定理 2.4, 取 $\alpha=\frac{1}{1-k}$, 存在 $f_j\in\mathscr{F}$, $z_j\to z_0$, $\rho_j\to 0$, 使得

$$g_j(z)=\rho_j^{\frac{1}{k-1}}f_j(z_j+\rho_j z)$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上内闭一致收敛于一个非常数函数 $g\in\mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$.

由于

$$\frac{\partial g_j(z)}{\partial z_i}-g_j^k(z)-\rho_j^{\frac{k}{k-1}}h(z_j+\rho_j z)\Rightarrow\frac{\partial g(z)}{\partial z_i}-g^k(z),$$

其中 $z\in\mathbb{C}^n$, $1\leq i\leq n$, $j\to\infty$. 而

$$\frac{\partial g_j(z)}{\partial z_i}-g_j^k(z)=\rho_j^{\frac{k}{k-1}}\left[\frac{\partial f_j(z_j+\rho_j z)}{\partial z_i}-f_j^k(z_j+\rho_j z)\right]\neq\rho_j^{\frac{k}{k-1}}h(z_j+\rho_j z).$$

因此, 由 Hurwitz 定理, 对 $1\leq i\leq n$,

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z_i}-g^k(z)\equiv 0,\quad\text{或}\quad\frac{\partial g(z)}{\partial z_i}-g^k(z)\neq 0.$$

若对 $1\leq i\leq n$, $\frac{\partial g(z)}{\partial z_i}-g^k(z)\neq 0$, 令 $G(z)=\frac{1}{g(z)}$, 则

$$G^{k-2}(z)\frac{\partial G}{\partial z_i}\neq -1,\quad 1\leq i\leq n,$$

则由亚纯函数 Picard 型定理, $g$ 关于每个变量是一个常数, 从而 $g$ 是一个常数. 因此, 不妨设对 $1\leq i\leq i_0$, 有 $\frac{\partial g(z)}{\partial z_i}-g^k(z)\equiv 0$; 对 $i_0<i\leq n$, 有 $\frac{\partial g(z)}{\partial z_i}-g^k(z)\neq 0$, 则由亚纯函数 Picard 型定理, 有

$$\frac{1}{g^{k-1}}(z)=(1-k)(z_1+\cdots+z_{i_0})+c,$$

其中 $c$ 是一个常数. 这导致矛盾. 故 $\mathscr{F}$ 在 $\Omega$ 上正规. 证毕.

注意到, Marty 表明一族亚纯函数的球面导数内闭一致有上界时, 该函数族正规. Grahl 和 Nevo 在文 [7] 中获得一有趣的结果: 球面导数内闭一致有正的下界的亚纯函数族也是正规的.

**定理 H** 设区域 $D\subset\mathbb{C}$, $\varepsilon>0$, 则

$$\mathscr{F}=\left\{f\in\mathscr{M}(D); f^{\#}(z)\geq\varepsilon,\, z\in D\right\}$$

在 $D$ 上正规.

最近, Dovbush [5] 利用定理 F 将其推广至多变量情形.

**定理 I** 设 $\varepsilon>0$, 则

$$\mathscr{F}=\left\{f\in\mathscr{H}(\Omega);\frac{|\langle v,\overline{\nabla f}(z)\rangle|}{1+|f(z)|^2}\geq\varepsilon\|v\|^2,\, z\in\Omega,\, v\in\mathbb{C}^n\right\}$$

在 $\Omega$ 上正规.

遗憾的是我们发现该定理是错误的. 下面指出定理 I 中的 $\mathscr{F}=\emptyset$. 注意到

$$\mathscr{F}=\left\{f\in\mathscr{H}(\Omega);\frac{|\langle v,\,\overline{\nabla f(z)}\rangle|}{1+|f(z)|^2}\geq\varepsilon,\,z\in\Omega,\,v\in\mathbb{C}^n:\|v\|=1\right\},$$

即要求沿各方向 $v$, $\frac{|\langle v,\,\overline{\nabla f(z)}\rangle|}{1+|f(z)|^2}$ 均有正的下界. 下面说明任意 $z\in\Omega$ 总存在 $v=v(z)\in\mathbb{C}^n:\|v\|=1$, 使得

$$|\langle v,\overline{\nabla f(z)}\rangle|=0.$$

为此, 任取 $z\in\Omega$, 令 $\varphi(v)=\langle v,\,\overline{\nabla f(z)}\rangle$, $v\in\mathbb{C}^n:\|v\|=1$. 任意固定 $v_0\in\mathbb{C}^n:\|v_0\|=1$, 则 $\varphi(v_0)\in\mathbb{C}$, 若 $\varphi(v_0)\neq0$, 设其一个幅角为 $\theta_0$, 则

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}\varphi(v_0)=\varphi(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}v_0)\in\mathbb{R},$$

所以 0 介于 $\varphi(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}v_0)$ 与 $\varphi(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}v_0)$ 之间, 由连续函数的介值性可见, 存在 $v^*\in\mathbb{C}^n:v^*\neq0$, 使得 $\varphi(v^*)=0$, 从而

$$\varphi\left(\frac{v^*}{\|v^*\|}\right)=0.$$

利用我们推广的引理和原亚纯函数时的处理办法可将定理 H 推广至多复变全纯函数情形, 得到

$$\mathscr{F}=\left\{f\in\mathscr{H}(\Omega);\ \frac{\|\nabla f(z)\|}{1+|f(z)|^2}\geq\varepsilon,\,z\in\Omega\right\}$$

在 $\Omega$ 上正规, 即

**定理 3.3** 设区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, $\varepsilon>0$, 则

$$\mathscr{F}=\left\{f\in\mathscr{H}(\Omega);\ f^{\#}(z)\geq\varepsilon,\,z\in\Omega\right\}$$

在 $\Omega$ 上正规.

**证明** 假设 $\mathscr{F}$ 在 $z_0\in\Omega$ 不正规, 则由定理 2.4, 取 $\alpha=-2$, 存在 $f_j\in\mathscr{F}$, $z_j\to z_0$, $\rho_j\to0$, 使得

$$g_j(z)=\rho_j^2f_j(z_j+\rho_jz)$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上内闭一致收敛于一个非常数函数 $g\in\mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$. 取 $z^*\in\mathbb{C}^n:g(z^*)\neq0$, 而

$$\begin{aligned}\|\nabla g_j(z^*)\|&=\rho_j^3\|\nabla f_j(z_j+\rho_jz^*)\|\\&=\frac{1}{\rho_j}|g_j^2(z^*)|\frac{\|\nabla f_j(z_j+\rho_jz^*)\|}{|f_j(z_j+\rho_jz^*)|^2}\\&\geq\frac{1}{\rho_j}|g_j^2(z^*)|f_j^{\#}(z_j+\rho_jz^*)\\&\geq\frac{1}{\rho_j}|g_j^2(z^*)|\varepsilon\to\infty\quad(j\to\infty).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\nabla g_j(z^*)\to\nabla g(z^*)\in\mathbb{C}\quad(j\to\infty).$$

矛盾. 故 $\mathscr{F}$ 在 $\Omega$ 上正规. 证毕.

**致谢** 感谢稿件评审人提出有益的建议.

# 参考文献

[1] Aladro G., Krantz S. G., A criterion for normality in $\mathbb{C}^n$, *J. Math. Anal. Appl.*, 1991, **161**: 1–8.

[2] Alexander H., Volumes of images of varieties in projective space and in Grassmannians, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, **189**: 237–237.

[3] Bergweiler W., Bloch's Principle, *Computational Methods & Function Theory*, 2006, **6**(1): 77–108.

[4] Chen H. H., Gu Y. X., An improvement of Marty's criterion and its applications, *Sci. China Ser. A*, 1993, **36**: 674–681.

[5] Dovbush P. V., On a normality criterion of Mandelbrojt, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2014, **59**(10): 1388–1394.

[6] Dovbush P. V., Zalcman's lemma in $\mathbb{C}^n$, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2020, **65**(5): 796–800.

[7] Grahl J. , Nevo S., Spherical derivatives and normal families, *J. Anal. Math*, 2012, **117**(1): 119–128.

[8] Gu Y. X., Pang X. C., Fang M. L., Normal Family Theory and Its Application, Scinece Press, Beijing, 2007.

[9] Gul S., Nevo S., Creating limit functions by the Pang–Zalcman lemma, *Kodai Math. J.*, 2012, **35**(10): 283–310.

[10] Li S. Y., Xie H. C., On normal families of meromorphic functions. *Acta Math. Sinica, Chin. Series* 1986, **29**(4): 468–476.

[11] Nevo S., Applications of Zalcman's lemma to $\mathscr{Q}_m$-normal families, *Analysis*, 2001, **21**: 289–325.

[12] Pang X. C., Bloch's principle and normal criterion, *Science in China, Ser. A*, 1989, **32**(7): 782–791.

[13] Pang X. C., On normal criterion of meromorphic functions, *Science in China, Ser. A*, 1990, **33**(5): 521–527.

[14] Pang X. C., Zalcman L., Normal families and shared values, *Bull. London Math. Soc.*, 2000, **32**: 325–331.

[15] Schwick W., Normality criteria for families of meromorphic functions, *J. Analyse Math.,* 1989, **52**: 241–289.

[16] Schiff J. L., Normal Families, Universitext, Springer, New York, 1993.

[17] Shi J. H., Function Theory of Several Complex Variables, Higher Education Press, Beijing, 1996.

[18] Steinmetz N., Nevanlinna Theory, Normal Families, and Algebraic Differential Equations, Springer, New York, 2017.

[19] Zalcman L., A heuristic principle in complex function theory, *Amer. Math. Monthly*, 1975, **82**(8): 813–818.

[20] Zalcman L., Normal families: new perspectives, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1998, **35**: 215–230.

[21] Zhang S. S., Tu Z. H., Normal families of holomorphic mappings of several complex variables into $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *Acta Math. Sinica, Chin. Series*, 2010, **53**(6): 1045–1050.