第63卷第6期 数学学报中文版 Vol.63, No.6
2020年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2020

文章编号: 0583-1431(2020)06-0557-08 **文献标识码: A**

PT- 对称算子的表示及非正交量子态的区分

王文华

陕西师范大学民族教育学院 西安 710062
E-mail: wenhua@snnu.edu.cn

陈峥立

陕西师范大学数学与信息科学学院 西安 710062
E-mail: czl@snnu.edu.cn

宋 云

陕西师范大学计算机科学学院 西安 710062
E-mail: songyun09@163.com

摘 要 经典量子系统中的哈密尔顿为自伴算子, 这不仅保证了系统能量本征值全部为实数, 而且相应的本征态 (单位长度的特征向量) 构成了状态空间的一组正规正交基. 然而存在一类 PT- 对称的物理系统, 哈密尔顿的自伴性 (共轭转置) 被物理的 PT- 对称性所代替. 一个完整的 PT- 对称哈密尔顿, 其谱全部为实数且能构造一个合理的 CPT-内积. 本文研究一类 PT- 对称算子. 固定时间反演算子 T, 得到宇称算子 P 的矩阵表示, 进而给出每一组 PT- 对称哈密尔顿的具体表示形式. 作为应用, 选择一组确定的 $\{P,T\}$ 算子, 及 PT- 对称的哈密尔顿, 给出两个在传统量子力学中不正交的量子态区分的刻画.

关键词 PT- 对称; 复共轭; 区分; 内积; 正交

MR(2010) 主题分类 46C99, 70H11, 81P10

中图分类 O177.92

Representation of PT-symmetric Operator and Discrimination of Nonorthogonal Quantum States

Wen Hua WANG

School of Ethnic Education, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062*, P. R. China*
E-mail: *wenhua@snnu.edu.cn*

收稿日期: 2019-06-12; 接受日期: 2020-01-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11971283, 11871318, 11771009, 11601300, 61602291, 11571213); 陕西省科技厅项目 (2018KJXX-054) 及国家留学基金委资助
通讯作者: 陈峥立

Zheng Li CHEN

School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, P. R. China
E-mail: *czl@snnu.edu.cn*

Yun SONG

School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, P. R. China
E-mail: *songyun09@163.com*

Abstract Hamiltonian of a classical quantum system is a self-adjoint operator which ensures that the energy eigenvalues are real and the eigenstates (unit eigenvectors) form an orthonormal basis for the state space. However, there exists the parity-time-reversal (PT) symmetric physical system, the Hermiticity (transpose and complex conjugate) of a Hamiltonian is replaced by the physically transparent condition of PT-symmetry. If a Hamiltonian has an unbroken PT-symmetry, then the spectrum is real and further more one can construct a CPT inner product with a positive-definite inner product. In this paper, we discuss the PT-symmetric operator in the system. First, given the fixed time reversal operator T as the complex conjugation, the matrix representations of both the parity operator P and PT-symmetric Hamiltonian H are obtained. Then all possible concrete forms of P and the corresponding forms of H are expressed. Next, as an application, it is established that PT-symmetric quantum theory for realizing the discrimination of two quantum states which are not orthogonal in the conventional quantum mechanics.

Keywords PT-symmetric; complex conjugation; discrimination; inner product; orthogonal

MR(2010) 主题分类 46C99, 70H11, 81P10

中图分类 O177.92

1 引言

传统的量子力学, 量子系统的状态由一个自伴哈密尔顿决定的薛定谔方程描述. 哈密尔顿的自伴性不仅保证了系统遵循酉演化, 而且保证了系统的能量谱均为实数且相应的特征态 (单位长度的特征向量) 构成了系统空间的一组正规正交基. 然而, 确实存在一些物理系统, 其哈密尔顿不是自伴的, 但能量谱却都是实数. 1998 年, Bender 等人提出了一类非自伴哈密尔顿, 称为 PT-对称哈密尔顿 [2]. PT- 对称 (是指在宇称变换 P 和时间反演 T 下不变) 量子力学作为传统量子力学的推广, 已经发展成为一个受到高度关注的研究领域 [3–5, 14]. PT- 对称理论已经被广泛讨论并有了蓬勃的发展 [6, 9–12]. 在 PT- 对称量子力学中, 哈密尔顿的自伴性被 PT- 对称性所代替. 一般 PT- 对称哈密尔顿的特征值为实数或者共轭成对出现的复数, 完整的 PT- 对称哈密尔顿, 其特征值全部为实数. 若哈密尔顿具有完整的 PT- 对称性, 则它与一个线性算子 C 可换, 利用算子 C 可以构造一个正定内积, 因而, PT- 对称理论描述了具有正定概率且酉时间演化的一类新的量子理论.

一个量子系统对应一个复的希尔伯特空间 $\mathscr{K}$. 在 PT- 对称量子力学中, P 是一个有界的线

性算子, T 为一个有界的复共轭算子. 若算子 P,T 满足 $P^2=T^2=I$ 且 $PT=TP$, 则称 $\{P,T\}$ 为 $\mathscr{K}$ 中的一个 PT- 框架 [8]. 设 $\{P,T\}$ 为空间 $\mathscr{K}$ 中给定的一个 PT- 框架, 若一个线性算子 H 与 P,T 的乘积算子 PT 可换, 即 $[H,PT]=HPT-PTH=0$, 则称 H 为 $\mathscr{K}$ 上的一个 PT- 对称算子. 如果 H 为 PT- 对称的且它的特征态均为 PT 的特征态, 那么称 H 具有完整的 PT- 对称性. 在此基础上, 引入一个有界线性算子 C 满足: (i) $CPT=TPC, C^2=I$; (ii) PC 是一个传统内积下的正算子, 则称 $\{C,P,T\}$ 为空间中的一个 CPT- 框架. 从而, 建立了空间 $\mathscr{K}$ 上的一个正定内积 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{CPT}$ (CPT 内积), 即 $\langle x\,|\,y\rangle_{CPT}=\langle PCx\,|\,y\rangle=\langle x\,|\,PCy\rangle$, $\forall\, x,y\in\mathscr{K}$.

众所周知, 量子态的区分与所定义的内积有关 [1, 7, 13]. 特别地, 提取量子系统中加密在未知量子态上的信息, 就需要进行可观测量的测量, 那么测量结果 (成功的概率) 就提供了系统状态上的某些信息. 相互正交的量子态通过测量能以确定的概率区分它们. 两个量子态是否正交取决于它们的内积是否为零. 由于 PT- 对称理论为量子系统提供了新的内积, 因此, 它有助于实现传统内积下不正交的量子态区分.

关于两个量子态的区分可以限制在由这两个量子态生成的 2 维子空间中讨论, 并且 2 维系统中的量子态具有几何表示, 即 Bloch 球面表示. 因而, 本文讨论希尔伯特空间 $\mathbb{C}^2$ 上的 PT- 对称表示. 固定时间反演 T 为复共轭算子, 给出相应的宇称算子 P 的具体形式, 以及给定 PT- 框架下, PT- 对称哈密尔顿 H 的矩阵表示. 接着, 选择一组 $\{P,T\}$ 框架和带有两个参数的 PT- 对称哈密尔顿 H, 构造一个 CPT- 内积, 从而实现传统不正交的两个量子态区分.

2 PT- 对称算子的表示

由于有限维希尔伯特空间中的任意一个线性算子在给定一组正规正交基下都具有相应的矩阵表示且表示惟一, 那么在本文中算子与其矩阵表示将不加区分.

设时间反演 $T: T\varphi=\overline{\varphi}$ 为反线性算子 (复共轭算子) [15], 其形式为

$$T\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\varphi_1}\\ \overline{\varphi_2}\end{pmatrix},\quad \forall\,\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2, \tag{2.1}$$

则对于任意 $M=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\ m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, 有 $TMT=\overline{M}$.

宇称算子 P 满足 $P^2=I$ 且 $PT=TP$, 因而 P 是一个可逆的实算子, 即 $P=\overline{P}=P^{-1}$. 令 $P=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}$, 其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. P 的行列式为 $|P|=ad-bc\neq 0$, 且 $P^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\ -c&a\end{pmatrix}$. 从而, 我们得到

$$\begin{cases} a(ad-bc)=d;\\ b(ad-bc)=-b;\\ c(ad-bc)=-c;\\ d(ad-bc)=a.\end{cases}$$

情况 1 当 $b=0$, $c=0$, 有 $a^2d=d$, $d^2a=a$. 那么 $a^2=1$, $d^2=1$. 因而 $P=\begin{pmatrix}a&0\\ 0&d\end{pmatrix}$, 其中 $a,d\in\{1,-1\}$.

情况 2 当 $b\neq 0$, 有 $ad-bc=-1$, $a=-d$. 那么 $-a^2-bc=-1$, $c=\frac{1-a^2}{b}$. 因而 $P=\begin{pmatrix}a&b\\ \frac{1-a^2}{b}&-a\end{pmatrix}$.

情况 3 当 $c\neq 0$, 有 $ad-bc=-1$, $a=-d$. 那么 $-a^2-bc=-1$, $b=\frac{1-a^2}{c}$. 因而 $P=\begin{pmatrix}a&\frac{1-a^2}{c}\\ c&-a\end{pmatrix}$.

因此, 固定算子 T 如 (2.1) 式, 我们得到算子 P 的所有可能形式. 值得注意的是算子 P 在传统意义下不一定是自伴的. 进一步, 我们讨论在每一对 $\{P,T\}$- 框架下, PT- 对称的哈密尔顿 H 的矩阵形式. 由于 $[H,PT]=0$ 且 T 如 (2.1) 式所示, 那么 H 满足 $HP=PTHT=P\overline{H}$.

设 $H=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, 其中 $x,y,z,w\in\mathbb{C}$, 我们有下列结论.

情况 i 若 $P=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, 其中 $a\in\{1,-1\}$, 则 $H=\bar{H}$.

情况 ii 若 $P=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, 其中 $a\in\{1,-1\}$, 则 $x=\bar{x}$, $w=\bar{w}$, $-y=\bar{y}$, $-z=\bar{z}$, 因而 $x,w\in\mathbb{R}$, $y,z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

情况 iii 若 $P=\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $b\neq 0$, 则

$$\begin{cases} a\bar{x}+b\bar{z}=ax+\dfrac{1-a^2}{b}y; \\ a\bar{y}+b\bar{w}=bx-ay; \\ \dfrac{1-a^2}{b}\bar{x}-a\bar{z}=az+\dfrac{1-a^2}{b}w; \\ \dfrac{1-a^2}{b}\bar{y}-a\bar{w}=bz-aw. \end{cases}$$

当 $a=0$ 时, 有 $x=\bar{w}$, $\bar{y}=b^2z$.

否则, 有 $x-\bar{x}=\bar{w}-w$, $z+\bar{z}=\frac{(1-a^2)(\bar{x}-w)}{ab}$, $y+\bar{y}=\frac{b(x-\bar{w})}{a}$. 令 $x=\alpha+\mathrm{i}\gamma$, $w=\beta-\mathrm{i}\gamma$, $z=\frac{(1-a^2)(\alpha-\beta)}{2ab}+\mathrm{i}\theta$, $y=\frac{b(\alpha-\beta)}{2a}+\mathrm{i}\vartheta$, 其中 $\alpha,\beta,\gamma,\theta,\vartheta\in\mathbb{R}$. 那么 $\theta=-\frac{2a\gamma}{b}-\frac{(1-a^2)\vartheta}{b^2}$.

情况 iv 设 $P=\begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$, 其中 $a,c\in\mathbb{R}$ 且 $c\neq 0$, 同理, 分情况讨论.

当 $a=0$ 时, 有 $x=\bar{w}$ 和 $\bar{z}=c^2y$.

当 $a\neq 0$ 时, 有 $\mathrm{Im}(x)=-\mathrm{Im}(w)$, $\mathrm{Re}(y)=\frac{(1-a^2)(\mathrm{Re}(x)-\mathrm{Re}(w))}{2ac}$, $\mathrm{Re}(z)=\frac{c(\mathrm{Re}(x)-\mathrm{Re}(w))}{2a}$ 且 $\mathrm{Im}(y)=\frac{2a\mathrm{Im}(w)}{c}-\frac{1-a^2}{c^2}\mathrm{Im}(z)$.

因而, 我们有下面的定理.

定理 2.1 设 T 为希尔伯特空间 $\mathscr{K}=\mathbb{C}^2$ 上的复共轭算子, 定义为 (2.1) 式, 则宇称算子 P 以及 PT- 对称哈密尔顿的所有可能形式如下.

(i) $P=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, 其中 $a\in\{1,-1\}$, 且相应的 $H=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, 其中 $x,y,z,w\in\mathbb{R}$.

(ii) $P=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, 其中 $a\in\{1,-1\}$, 且相应的 $H=\begin{pmatrix} x & \mathrm{i}y \\ \mathrm{i}z & w \end{pmatrix}$, 其中 $x,y,z,w\in\mathbb{R}$.

(iii) $P=\begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $b\neq 0$, 且相应的 $H=\begin{pmatrix} x & b^2\bar{z} \\ z & \bar{x} \end{pmatrix}$, 其中 $x,z\in\mathbb{C}$.

(iv) $P=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 其中 $b\neq 0$, 且相应的 $H=\begin{pmatrix} x-\mathrm{i}\frac{bz}{2} & \frac{b(x-w)}{2}+\mathrm{i}y \\ \mathrm{i}z & w+\mathrm{i}\frac{bz}{2} \end{pmatrix}$, 其中 $x,y,z,w\in\mathbb{R}$.

(v) $P=\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $b\neq 0$, 且相应的 $H=\begin{pmatrix} x+\mathrm{i}\frac{bz}{2} & \frac{b(w-x)}{2}+\mathrm{i}y \\ \mathrm{i}z & w-\mathrm{i}\frac{bz}{2} \end{pmatrix}$, 其中 $x,y,z,w\in\mathbb{R}$.

(vi) $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$, 其中 $c\neq 0$, 且相应的 $H=\begin{pmatrix} x-\mathrm{i}\frac{cy}{2} & \mathrm{i}y \\ \frac{c(x-w)}{2}+\mathrm{i}z & w+\mathrm{i}\frac{cy}{2} \end{pmatrix}$, 其中 $x,y,z,w\in\mathbb{R}$.

(vii) $P=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c\neq 0$, 且相应的 $H=\begin{pmatrix} x+\mathrm{i}\frac{cy}{2} & \mathrm{i}y \\ \frac{c(w-x)}{2}+\mathrm{i}z & w-\mathrm{i}\frac{cy}{2} \end{pmatrix}$, 其中 $x,y,z,w\in\mathbb{R}$.

(viii) $P=\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, 其中 $b\neq 0$, $a\notin\{-1,0,1\}$, 有

$$H=\begin{pmatrix} \alpha+\mathrm{i}\gamma & \dfrac{b(\alpha-\beta)}{2a}+\mathrm{i}\vartheta \\ \dfrac{(1-a^2)(\alpha-\beta)}{2ab}-\mathrm{i}\left(\dfrac{2a\gamma}{b}+\dfrac{(1-a^2)\vartheta}{b^2}\right) & \beta-\mathrm{i}\gamma \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\vartheta\in\mathbb{R}$.

注 2.2 在任何有限维的希尔伯特空间中, 只要时间反演 T 作用在向量上是指将向量中的每个元素变成共轭元素, 那么算子 P 一定是实矩阵, 即矩阵中的每个元素为实数. 由于算子 P 是对合的, 则其特征值为 ±1. 若算子 P 是自伴的, 则存在酉矩阵 V, 使得 $VPV^\dagger=\left(\begin{smallmatrix}I&0\\0&-I\end{smallmatrix}\right)=P_0$. 令 $H_0=VHV^\dagger$, $T_0=VTV^\dagger$, 则 $P_0^2=T_0^2=I$. 同时, $[P,T]=0$ 当且仅当 $[P_0,T_0]=0$, 从而 H 是 PT- 对称的当且仅当 H_0 是 P_0T_0- 对称的.

进一步, 对于一个给定的 PT- 框架 $\{P,T\}$, 所有的 PT- 对称哈密尔顿形成了一个代数群:

(1) 若 A 和 B 都是 PT- 对称的, 则 $A\pm B$, AB 和 BA 都是 PT- 对称的;

(2) 若 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 都是 PT- 对称的, 则 $\sum_{j=1}^n a_jA_j$ $(a_j\in\mathbb{R})$ 和 $\prod_{n_j}A_{n_j}$ ($\{n_j\}$ 是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的任意重排) 都是 PT- 对称的;

(3) 若 A 是可逆的 PT- 对称算子, 则 A^{-1} 也是 PT- 对称的;

(4) 若 A 是 PT- 对称的, 则 A^T 是 P^TT^T- 对称的, $A^\dagger$ 是 $P^\dagger T^\dagger$- 对称的.

3 非正交量子态的区分

基于前面在希尔伯特空间 $\mathscr{K}=\mathbb{C}^2$ 上的讨论, 下面给出一个量子态区分的应用. 我们采用狄拉克符号 $|\cdot\rangle$ 来表示一个量子态, $\langle\cdot|$ 表示这个态的共轭转置. 传统的量子力学中, 两个量子态能够区分当且仅当两个量子态正交, 即两个量子态的内积为零. 然而, 在 PT- 对称量子力学中, 对于完整的 PT- 对称哈密尔顿, 通过构造一个有界的线性算子 C, 使得两个在传统内积下不正交的量子态在 CPT- 内积下正交. 那么我们就可以实现不正交量子态的区分. 下面, 我们给出具体的实现过程.

设 $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ 为空间 $\mathbb{C}^2$ 中的两个量子态且 $|\langle\psi_1\,|\,\psi_2\rangle|=\cos\epsilon$, 其中 $\epsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$. 显然, 这两个量子态在传统量子理论下是不可区分的. 我们的目标是构造 CPT- 内积使得 $|\psi_1\rangle$ 与 $|\psi_2\rangle$ 正交.

在讨论之前, 我们选择合适的参数, 使得 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的表示形式一致. 令

$$|\psi_1\rangle=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix},\quad |\psi_2\rangle=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta+2\epsilon}{2}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\dfrac{\theta+2\epsilon}{2}\end{pmatrix},\quad \theta\in[0,\pi],\quad \phi\in[0,2\pi].$$

设时间反演 T 如 (2.1) 式所示, 宇称算子 $P=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$, H 为 PT- 对称的哈密尔顿. 由定理 2.1, H 具有的形式为 $H=\left(\begin{smallmatrix}w&\mathrm{i}s\\\mathrm{i}t&r\end{smallmatrix}\right)$, 其中 $r,s,t,w\in\mathbb{R}$. 为了方便, 我们选择 $w=3r$, $s=t$. 令

$$H=\begin{pmatrix}3r&\mathrm{i}s\\ \mathrm{i}s&r\end{pmatrix},\tag{3.1}$$

其中 r,s 为实数且 $|r|>|s|$, 这样保证了 H 具有完整的 PT- 对称.

通过计算, H 的两个特征态分别为

$$|\varepsilon_1\rangle=\alpha\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r-\sqrt{r^2-s^2}}\\ \mathrm{i}\dfrac{1}{s}\end{pmatrix},\quad |\varepsilon_2\rangle=\beta\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r+\sqrt{r^2-s^2}}\\ \mathrm{i}\dfrac{1}{s}\end{pmatrix},$$

其中 $\frac{1}{\alpha^2}=(\frac{1}{r-\sqrt{r^2-s^2}})^2-\frac{1}{s^2}$, $\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{s^2}-(\frac{1}{r+\sqrt{r^2-s^2}})^2$. 从而构造线性算子 C 为

$$C=(|\varepsilon_1\rangle\langle\varepsilon_1|+|\varepsilon_2\rangle\langle\varepsilon_2|)P=\begin{pmatrix}\frac{r}{u} & \mathrm{i}\frac{s}{u}\\ \mathrm{i}\frac{s}{u} & -\frac{r}{u}\end{pmatrix},$$

其中 $u=\sqrt{r^2-s^2}$. 值得注意的是, 算子 C 的构造并不是唯一的. 那么利用 CPT 算子, 有

$$\langle\psi_1|_{CPT}=:\langle\psi_1|PC=\frac{1}{u}\begin{pmatrix} r\cos\frac{\theta}{2}-\mathrm{i}s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2} & \mathrm{i}s\cos\frac{\theta}{2}+r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

和

$$\langle\psi_2|_{CPT}=:\langle\psi_2|PC=\frac{1}{u}\begin{pmatrix} r\cos\lambda-\mathrm{i}s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\lambda & \mathrm{i}s\cos\lambda+r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\lambda\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda=\frac{\theta+2\epsilon}{2}$, 以及

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle_{CPT}=\langle\psi_1|PC|\psi_2\rangle=\frac{1}{u}(r\cos\epsilon-s\sin\phi\sin(\theta+\epsilon)+\mathrm{i}s\cos\phi\sin\epsilon).$$

从而

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle_{CPT}=0\Leftrightarrow r\cos\epsilon-s\sin\phi\sin(\theta+\epsilon)=s\cos\phi\sin\epsilon=0.$$

由于 $0<\cos\epsilon<1$ 可知 $\sin\epsilon\neq0$, 这就需要

$$\cos\phi=0. \tag{3.2}$$

从而

$$\frac{r}{s}=\begin{cases}\dfrac{\sin(\theta+\epsilon)}{\cos\epsilon}, & \phi=\dfrac{\pi}{2};\\ -\dfrac{\sin(\theta+\epsilon)}{\cos\epsilon}, & \phi=\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

由 $|r|>|s|$ 得到 $|\sin(\theta+\epsilon)|>|\cos\epsilon|$, 那么有 $\frac{\pi}{2}-2\epsilon<\theta<\frac{\pi}{2}$.

事实上, 两个量子态是否能区分取决于量子测量后的概率是否为 1. 接下来, 我们构造相应的投影测量来实现量子态的区分. 先分别计算 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的 CPT- 范数. 为了计算方便, 选取 $\phi=\frac{\pi}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{2}-\epsilon$ 以及 $s=r\cos\epsilon$.

$$\|\,|\psi_1\rangle\|_{CPT}^2=\langle\psi_1\,|\,\psi_1\rangle_{CPT}=\frac{1}{u}(r-s\sin\phi\sin\theta)=\frac{1}{u}(r-s\cos\epsilon).$$

类似地

$$\||\psi_2\rangle\|_{CPT}^2=\langle\psi_2\,|\,\psi_2\rangle_{CPT}=\frac{1}{u}(r-s\sin\phi\sin(\theta+2\epsilon))=\frac{1}{u}(r-s\cos\epsilon).$$

从而, $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 在 CPT- 内积下的单位化分别为

$$|\tilde{\psi}_1\rangle=\sqrt{\frac{u}{r-s\cos\epsilon}}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi-2\epsilon}{4}\\ \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi-2\epsilon}{4}\end{pmatrix}\quad 和 \quad |\tilde{\psi}_2\rangle=\sqrt{\frac{u}{r-s\cos\epsilon}}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi+2\epsilon}{4}\\ \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi+2\epsilon}{4}\end{pmatrix}.$$

同时

$$\langle\tilde{\psi}_1|_{CPT}=\frac{1}{\sqrt{u(r-s\cos\epsilon)}}\begin{pmatrix} r\cos\dfrac{\pi-2\epsilon}{4}-s\sin\dfrac{\pi-2\epsilon}{4} & \mathrm{i}s\cos\dfrac{\pi-2\epsilon}{4}-\mathrm{i}r\sin\dfrac{\pi-2\epsilon}{4}\end{pmatrix},$$

$$\langle\tilde{\psi}_2|_{CPT}=\frac{1}{\sqrt{u(r-s\cos\epsilon)}}\begin{pmatrix} r\cos\dfrac{\pi+2\epsilon}{4}-s\sin\dfrac{\pi+2\epsilon}{4} & \mathrm{i}s\cos\dfrac{\pi+2\epsilon}{4}-\mathrm{i}r\sin\dfrac{\pi+2\epsilon}{4}\end{pmatrix}.$$

那么, 两个投影测量算子分别为

$$|\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1|_{CPT}$$

$$=\frac{1}{r-s\cos\epsilon}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi-2\epsilon}{4}\left(r\cos\frac{\pi-2\epsilon}{4}-s\sin\frac{\pi-2\epsilon}{4}\right) & \mathrm{i}\cos\frac{\pi-2\epsilon}{4}\left(s\cos\frac{\pi-2\epsilon}{4}-r\sin\frac{\pi-2\epsilon}{4}\right)\\ \mathrm{i}\sin\frac{\pi-2\epsilon}{4}\left(r\cos\frac{\pi-2\epsilon}{4}-s\sin\frac{\pi-2\epsilon}{4}\right) & \sin\frac{\pi-2\epsilon}{4}\left(r\sin\frac{\pi-2\epsilon}{4}-s\cos\frac{\pi-2\epsilon}{4}\right)\end{pmatrix}$$

和

$$|\tilde{\psi}_2\rangle\langle\tilde{\psi}_2|_{CPT}$$

$$=\frac{1}{r-s\cos\epsilon}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi+2\epsilon}{4}\left(r\cos\frac{\pi+2\epsilon}{4}-s\sin\frac{\pi+2\epsilon}{4}\right) & \mathrm{i}\cos\frac{\pi+2\epsilon}{4}\left(s\cos\frac{\pi+2\epsilon}{4}-r\sin\frac{\pi+2\epsilon}{4}\right)\\ \mathrm{i}\sin\frac{\pi+2\epsilon}{4}\left(r\cos\frac{\pi+2\epsilon}{4}-s\sin\frac{\pi+2\epsilon}{4}\right) & \sin\frac{\pi+2\epsilon}{4}\left(r\sin\frac{\pi+2\epsilon}{4}-s\cos\frac{\pi+2\epsilon}{4}\right)\end{pmatrix},$$

且满足完备性方程

$$|\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1|_{CPT}+|\tilde{\psi}_2\rangle\langle\tilde{\psi}_2|_{CPT}=I.$$

令 $M_1=|\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1|_{CPT}$, $M_2=|\tilde{\psi}_2\rangle\langle\tilde{\psi}_2|_{CPT}$, 则 $M_i|\psi_j\rangle=\delta_{ij}|\psi_j\rangle$ $(i,j=1,2)$. 因而, 投影量子测量 $\{M_1,M_2\}$ 在 CPT- 内积下可以区分量子态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$.

最后, 我们给一个具体实例来说明 PT- 对称量子态区分.

基于上述的算子 P,T 和相应的哈密尔顿 H, 选取的两个量子态分别为

$$|\psi_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |\psi_2\rangle=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$

则 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 在传统内积下不是正交的, 即 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle=\frac{1}{2}\neq 0$, 那么他们在传统量子系统中是不可区分的.

根据 CPT- 内积, 得到 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle_{CPT}=\langle\psi_1|PC|\psi_2\rangle=\frac{1}{2u}(r-\sqrt{3}s)$. 令 $s=1$, $r=\sqrt{3}$, 则 PT- 对称哈密尔顿 H 和算子 C 分别为

$$H=\begin{pmatrix}3\sqrt{3} & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & \sqrt{3}\end{pmatrix},\quad C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

将 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 在 CPT- 内积下单位化.

$$|\tilde{\psi}_1\rangle=\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |\tilde{\psi}_2\rangle=\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$

$$\langle\tilde{\psi}_1|_{CPT}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}, & \mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \langle\tilde{\psi}_2|_{CPT}=\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

因此, 我们得到

$$|\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1|_{CPT}=\begin{pmatrix}1 & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad |\tilde{\psi}_2\rangle\langle\tilde{\psi}_2|_{CPT}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

令 $M_k=|\tilde{\psi}_k\rangle\langle\tilde{\psi}_k|_{CPT}$, $M_k^{CPT}=(PC)^{-1}M_k^{\dagger}(PC)$ $(k=1,2)$, 则

$$M_k^{CPT}=M_k,\quad M_k^2=M_k,\quad M_1+M_2=I.$$

因而, $\{M_1, M_2\}$ 是一个投影测量, 其中 $M_k|\psi_l\rangle = \delta_{kl}|\psi_l\rangle$ $(k, l = 1, 2)$. 从而

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{和} \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

在 CPT- 内积下是可区分的.

4 结论

本文讨论了在 2 维量子系统中, 给定时间反演算子 T 为复共轭算子, 得到了宇称算子 P 和相应的 PT- 对称哈密尔顿 H 的所有可能的具体形式. 当 T 为另一种形式

$$T\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\varphi_2} \\ \overline{\varphi_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2,$$

类似地, 可以得到算子 P 和 H 的所有形式. 那么也可以选择某个框架 $\{P, T\}$ 及 H, 建立相应的 CPT- 内积, 从而解决量子态的区分问题. 进一步, 所有的讨论可以类似地推广到高维空间. 对于 PT- 对称量子态区分, 我们选择的完整 PT- 对称哈密尔顿依赖于所要区分的量子态. 例如, 如果要区分的量子态分别为 $|0\rangle = \binom{1}{0}$ 和 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$. 那么, 我们得选择不同于 (3.1) 式的其他哈密尔顿, 因为参数 $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$, 这与 (3.2) 矛盾.

参 考 文 献

[1] Barnett S. M., Croke S., Quantum state discrimination, *Adv. Opt. Photonics*, 2009, **1**(2): 238–278.

[2] Bender C. M., Boettcher S., Real spectra in non-hermitian Haniltonians having *PT*-symmetry, *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **80**: 5243–5246.

[3] Bender C. M., Boettcher S., Meisinger P. N., *PT*-symmetric quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, 1999, **40**(5): 2201–2229.

[4] Bender C. M., Brody D. C., Jones H. F., Complex extension of quantum mechanics, *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **89**: 270401.

[5] Bender C. M., Brody D. C., Jones H. F., Must a Hamiltonian be Hermitian? *Amer. J. Phys.*, 2003, **71**: 1095–1102.

[6] Bender C. M., Hook D. W., Conjecture on the analyticity of *PT*-symmetric potentials and the reality of their spectra, *J. Phys. A*, 2008, **41**: 392005.

[7] Bender C. M., Brody D. C., *PT*-symmetric quantum state discrimination, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 2013, **371**: 20120160.

[8] Cao H. X., Guo Z. H., Chen Z. L., *CPT*-frames for *PT*-symmetric Hamiltonians, *Commun. Theor. Phys.*, 2013, **60**: 328–334.

[9] Chong Y. D., Ge L., Stone A. D., *PT*-symmetry breaking and laser-absorber modes in optical scattering systems, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, **106**: 093902.

[10] Gong J. B., Wang Q. H., Time dependent *PT*-symmetric quantum mechanics, *J. Phys. A*, 2013, **46**: 485302.

[11] Huang M. Y., Yang Y., Wu J. D., *PT*-symmetric theory in two dimensional spaces, 2016, arXiv: 1609.02255v2.

[12] Huang Y. F., Cao H. X., Wang W. H., Unitary evolution and adiabatic theorem of pseudo self-adjoint quantum systems (in Chinese), *Acta Math. Sin.*, 2019, **62**: 469–478.

[13] Jaeger G., Shimony A., Optimal distinction between two nonorthogonal quantum states, *Phys. Lett. A*, 2004, **330**(5): 377–383.

[14] Mostafazadeh A., Pseudo-Hermiticity versus *PT*-symmetry III: Equivalence of pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, *J. Math. Phys.*, 2002, **43**: 3944–3951.

[15] Uhlmann A., Anti-(conjugate) linearity, *Sci. China G*, 2016, **59**(3): 630301.