第63卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.63, No.5
2020年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2020

文章编号: 0583-1431(2020)05-0523-08 **文献标识码:** A

TVS- 锥度量空间中的统计收敛

林艳芳 鲍玲鑫

福建农林大学计算机与信息学院 福州 350002
E-mail: yanfang_lin@foxmail.com; bolingxmu@sina.com

摘 要 本文研究 TVS- 锥度量空间中的统计收敛以及 TVS- 锥度量空间的统计完备性. 令 (X,E,P,d) 表示一个 TVS- 锥度量空间. 利用定义在有序 Hausdorff 拓扑向量空间 E 上的 Minkowski 函数 ρ, 证明了在 X 上存在一个通常意义下的度量 d_ρ, 使得 X 中的序列 (x_n) 在锥度量 d 意义下统计收敛到 $x \in X$, 当且仅当 (x_n) 在度量 d_ρ 意义下统计收敛到 x. 基于此, 我们证明了任意一个 TVS- 锥统计 Cauchy 序列是几乎处处 TVS- 锥 Cauchy 序列, 还证明了任意一个 TVS- 锥统计收敛的序列是几乎处处 TVS- 锥收敛的. 从而, TVS- 锥度量空间 (X,d) 是 d- 完备的, 当且仅当它是 d- 统计完备的. 基于以上结论, 通常度量空间中统计收敛的许多性质都可以平行地推广到锥度量空间中统计收敛的情形.

关键词 统计收敛; TVS- 锥度量空间; TVS- 锥统计 Cauchy 序列; Minkowski 函数; 统计完备

MR(2010) 主题分类 54A20, 40A35

中图分类 O177

Statistical Convergence in TVS-cone Metric Spaces

Yan Fang LIN Ling Xin BAO

School of Computer and Information, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002*, P. R. China*
E-mail: *yanfang_lin@foxmail.com*; *bolingxmu@sina.com*

Abstract The aims of this paper are to investigate the statistical convergence in TVS-cone metric spaces and to discuss statistical completeness of TVS-cone metric spaces. Let (X,E,P,d) be a TVS-cone metric space. By applying Minkowski function ρ in the ordered Hausdorff topological vector space E, we show that there exists a metric d_ρ (in usual sense) on X such that a sequence (x_n) in X is statistically convergent to $x \in X$ with respect to d if and only if it is statistically convergent to x with respect to d_ρ. We then show that every TVS-cone statistically Cauchy sequence is an almost usual TVS-cone Cauchy sequence, and every TVS-cone statistically convergent sequence is

收稿日期: 2019-11-27; 接受日期: 2020-01-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11501108);
福建省自然科学基金资助项目 (2019J01400); 福建农林大学杰出青年计划项目 (2016011)
通讯作者: 鲍玲鑫

an almost usual TVS-cone convergent sequence. As a result, a TVS-cone metric space (X, d) is d-complete if and only if it is d-statistically complete. Based on the results obtained above, many properties of statistical convergence in the metric space can be generalized in parallel to the statistical convergence in the cone metric space.

Keywords statistical convergence; TVS-cone metric space; TVS-cone statistically Cauchy sequence; Minkowski function; statistically complete
MR(2010) Subject Classification 54A20, 40A35
Chinese Library Classification O177

1 引言

统计收敛的概念分别由 Fast [8] 和 Steinhaus [19] 在 1951 年独立地引入, 它是通常意义下序列收敛概念的一种推广形式. 在过去的 60 余年中, 这一概念的许多推广形式及其在各个数学分支中的应用得到众多数学家们广泛的研究. 作为大量文献中的一个例子, 可见文 [1–6, 9, 12–17]. 拓扑空间 X 中的序列 (x_n) 称为统计收敛于 $x \in X$ 是指对 x 的任何邻域 U, $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\chi_{A_U}(j)=0$, 其中 $A_U=\{n\in\mathbb{N}: x_n\notin U\}$, χ_A 表示集合 A 的特征函数.

经典的统计收敛概念是在 $X=\mathbb{R}$ 中引入的, 此后出于各种各样的目的, 人们在更为一般的空间中定义统计收敛. 例如, 局部凸空间 [16], 包括赋予弱拓扑的 Banach 空间 [2, 6, 12, 13] 和一般拓扑空间 [17]. 最近, Li 等人 [15] 在锥度量空间中引入统计收敛的概念. 他们证明了锥度量空间 (X, d) 中的序列 (x_n) 统计收敛于 $x \in (X, d)$, 当且仅当它在自然密度意义下几乎处处收敛于 x, 即存在自然密度为 1 的自然数子集 $G \subset \mathbb{N}$, 使得 $(x_n)_{n\in G}$ 在通常意义下收敛于 x. 还证明了每一个统计完备的锥度量空间总是完备的. 那么很自然地有如下问题:

问题 1.1 完备的锥度量空间总是统计完备的吗?

本文第 2 节, 我们在更一般的 TVS- 锥度量空间中定义统计收敛的概念, 并证明了该定义的两个等价刻画.

第 3 节讨论了 TVS- 锥度量空间的统计完备性. 令 (X, E, P, d) 表示 TVS- 锥度量空间. 利用定义在有序 Hausdorff 拓扑向量空间 E 上的 Minkowski 函数 ρ, 证明了在 X 上存在一个通常意义下的度量 d_ρ, 使得 X 中的序列 (x_n) 在锥度量 d 意义下统计收敛到 $x \in X$, 当且仅当 (x_n) 在度量 d_ρ 意义下统计收敛到 x. 基于此, 证明了任意一个 TVS- 锥统计 Cauchy 序列是几乎处处 TVS- 锥 Cauchy 序列 (这里几乎处处是相对于自然密度而言). 证明了任意一个 TVS- 锥统计收敛的序列是几乎处处 TVS- 锥收敛的. 从而, TVS- 锥度量空间 (X, d) 是 d- 完备的, 当且仅当它是 d- 统计完备的.

基于上面的讨论, 在第 4 节中指出通常度量空间中统计收敛的相关性质都可以简单平行地推广到锥度量空间中统计收敛的情形.

2 TVS- 锥度量空间中的统计收敛

本文所有概念和记号都是统一的. 设 E 为实 Hausdorff 拓扑向量空间 (简记为 TVS), θ 为 E 的零向量. 设 P 为 E 的一个非空闭的真子集, 称 P 为 E 的一个凸锥, 如果 P 满足:

(i) $P\cap(-P)=\theta$;

(ii) $P+P\subset P$;

(iii) 对任意的 $\lambda\geq 0$, $\lambda P\subset P$.

如果凸锥 P 有非空的内点 (即 $\operatorname{int}P\neq\emptyset$), 则称 P 是实心的. 假定在下文中考虑的凸锥都是实心的. 给定一个凸锥 P, 定义 E 上的一个偏序 $\preceq$ 如下: 设 $a,b\in E$, $a\preceq b$ 当且仅当 $b-a\in P$. 用 $a\prec b$ 表示 $a\preceq b$ 且 $a\neq b$, $a\ll b$ 表示 $b-a\in\operatorname{int}P$. 记号 (E,P) 表示一个有序的 TVS.

定义 2.1 [7] 设 X 为非空集, (E,P) 为一个有序的 TVS. 向量值函数 $d:X\times X\to E$ 称为 X 上的一个 TVS- 锥度量, 如果满足以下条件:

(i) 对任意的 $x,y\in X$, 有 $\theta\preceq d(x,y)$, 且有 $d(x,y)=\theta$ 当且仅当 $x=y$;

(ii) 对任意的 $x,y\in X$, $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) 对任意的 $x,y,z\in X$, $d(x,z)\preceq d(x,y)+d(y,z)$.

称有序对 (X,E,P,d) 为 TVS- 锥度量空间, 简写为 (X,d).

定义 2.2 [7] 设 (X,d) 为 TVS- 锥度量空间, (x_n) 是 X 中的序列, $x\in X$.

(i) 如果对任意的 $\theta\ll c$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geq n_0$ 时, 有 $d(x_n,x)\ll c$, 则称 (x_n) TVS-锥收敛于 x, 记为 $d\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=x$.

(ii) 如果对任意的 $\theta\ll c$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得对所有 $m,n\geq n_0$, 有 $d(x_m,x_n)\ll c$ 成立, 则称 (x_n) 是一个 TVS- 锥 Cauchy 序列.

(iii) 如果 X 中的每个 TVS- 锥 Cauchy 序列是 TVS- 锥收敛的, 则称 (X,d) 是 TVS-锥完备的.

设 $A\subset\mathbb{N}$, $A^\sharp$ 表示 A 的势. 如果

$$\delta(A)\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{\{k\leq n:k\in A\}^\sharp}{n}$$

极限存在, 称极限值 $\delta(A)$ 为 A 的自然密度. 统计收敛的定义可以重新叙述为: 拓扑空间 X 中的序列 (x_n) 称为统计收敛到 $x\in X$, 如果对 x 的任何邻域 U, $\delta(A_U)=0$, 其中 $A_U=\{n\in\mathbb{N}:x_n\notin U\}$. 如果集合 A 满足 $\delta(A)=0$, 则称 A 为统计零集. 不难看出 $A\subset\mathbb{N}$ 是统计零集当且仅当 $\mathbb{N}\setminus A$ 具有自然密度 1.

Li 等人 [15] 在锥度量空间中定义了统计收敛, 下面将该定义在更为一般的 TVS- 锥度量空间中重新定义如下 (文献 [15] 中 E 为 Banach 空间).

定义 2.3 设 (X,d) 为 TVS- 锥度量空间, (x_n) 是 X 中的序列, $x\in X$.

(i) 如果对任意的 $\theta\ll c$, $\{n\in\mathbb{N}:d(x_n,x)\ll c\}$ 具有自然密度 1, 则称 (x_n) TVS- 锥统计收敛于 x, 记为 $d\text{-st-}\lim_{n\to\infty}x_n=x$.

(ii) 如果存在一个统计零集 $A\subset\mathbb{N}$, 使得 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus A}$ TVS- 锥收敛于 x, 则称 (x_n) 是几乎处处 TVS- 锥收敛于 x.

(iii) 如果对任意的 $\theta\ll c$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得 $\{n\in\mathbb{N}:d(x_n,x_{n_0})\preceq c\}$ 具有自然密度 1, 则称 (x_n) 是一个 TVS- 锥统计 Cauchy 序列.

(iv) 如果存在一个统计零集 $A\subset\mathbb{N}$, 使得 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus A}$ 是 TVS- 锥 Cauchy 序列, 则 (x_n) 是一个几乎处处 TVS- 锥 Cauchy 序列.

(v) 如果 X 中的每个 TVS- 锥统计 Cauchy 序列都是 TVS- 锥统计收敛的, 则称 (X,d) 是 TVS- 锥统计完备的.

注 2.4 (ii) 意味着 (i), 即如果 (x_n) 几乎处处 TVS- 锥收敛于 x 的, 则有 (x_n) TVS- 锥统计收敛于 x. 类似地, (iv) 意味着 (iii).

注 2.5 文 [14] 定义了最一般形式的统计收敛, 即理想收敛. 我们在这里没有定义 TVS- 锥度量空间中的理想 $\mathscr{I}$ (等价地, 滤子 $\mathscr{F}$) 收敛, 一个简单的原因是: 在理想 $\mathscr{I}$ 具有 AP 的假设下, 下文所有结果都可以平行地推广到相应理想收敛的情形 (关于 AP 的概念, 可参考文 [14]).

定义 2.3 中的符号 "$\ll$" 可以用符号 "$\prec$" 或者 "$\preceq$" 替代. 事实上, 任意给定 $\theta \ll c$, $(x_n) \subset X$ 以及 $x \in X$, 令

$$B(c,x,(x_n)) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n,x) \ll c\},$$
$$B'(c,x,(x_n)) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n,x) \prec c\},$$
$$B''(c,x,(x_n)) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n,x) \preceq c\}.$$

在这里分别简记为 $B(c)$, $B'(c)$ 和 $B''(c)$.

定理 2.6 设 (X,d) 为 TVS- 锥度量空间, (x_n) 是 X 中的序列, $x \in X$,则下面说法是等价的.

(i) (x_n) TVS- 锥统计收敛于 x, 即对任意的 $\theta \ll c$, $B(c)$ 具有自然密度 1;

(ii) 对于任意的 $\theta \ll c$, $B'(c)$ 具有自然密度 1;

(iii) 对于任意的 $\theta \ll c$, $B''(c)$ 具有自然密度 1.

证明 对于任意的 $\theta \ll c$, 不难看出 $B(c) \subseteq B'(c) \subseteq B''(c)$, 从而有 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). 下面只需证明 (iii) $\Rightarrow$ (i). 对于任意的 $\theta \ll c$, 由 (iii) 可知 $\delta(\{n \in \mathbb{N} : d(x_n,x) \preceq \frac{c}{2}\}) = 1$. 此外, 注意到

$$a \preceq b \ \text{和} \ b \ll c \Rightarrow a \ll c,$$

从而有

$$\left\{n \in \mathbb{N} : d(x_n,x) \preceq \frac{c}{2}\right\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : d(x_n,x) \ll c\}.$$

这意味着 $B(c)$ 具有自然密度 1. 证毕.

在结束本节之前, 回顾下面一个例子.

例 2.7 [15] 设 $E = \mathbb{R}^2$ 并赋以通常的欧几里得范数, $P = \{(x,y) \in E : x, y \geq 0\}$, $X = \mathbb{R}$. X 上的锥度量 d_1 定义为

$$d_1(x,y) = \left(\left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|, \sqrt{3}\left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|\right), \quad x, y \in X,$$

则 (X,d_1) 不是统计完备的锥度量空间.

之所以如此, 本质上是因为 (X,d_1) 不是完备的锥度量空间. 如果在 X 上定义锥度量 d_2,

$$d_2(x,y) = (|x-y|, |x-y|), \quad x, y \in X,$$

不难证明 (X,d_2) 是完备的锥度量空间. 根据后续的定理 3.5, (X,d_2) 是统计完备的锥度量空间. 在下一节中将证明, 任意一个完备的锥度量空间总是统计完备的.

3 统计完备的锥度量空间

本节的目的是讨论 TVS- 锥度量空间的统计完备性. 我们需要一些关于 TVS- 锥度量空间可度量性的符号和基本事实. 设 V 是拓扑向量空间 E 的一个子集, 使得 $\theta \in \operatorname{int} V$, 则 V 是吸收的,

即对 E 中每个向量 a, 存在足够小的正实数 λ, 使得 $\lambda a \in V$. V 的 Minkowski 函数定义为

$$\rho_V(a) = \inf\{\lambda > 0 : a \in \lambda V\}, \quad a \in E.$$

ρ_V 是正齐次的. 如果 V 是凸的, 那么 ρ_V 是次线性的. 如果 V 是绝对凸的, 那么 ρ_V 是绝对齐次的. 此外, 如果 V 是 θ 的一个绝对凸邻域, 那么 ρ_V 是连续的, 且有

$$\{a \in E : \rho_V(a) < 1\} = \operatorname{int} V \subset V \subset \overline{V} = \{a \in E : \rho_V(a) \leq 1\}.$$

设 (X, E, P, d) 为 TVS- 锥度量空间. 对任意的 $a \preceq b$, 定义序区间 $[x, y]$ 为

$$[x, y] = \{z \in E : x \preceq z \preceq y\}.$$

任取 $e \in \operatorname{int} P$, 则

$$[-e, e] = (P - e) \cap (e - P) = \{x \in E : -e \preceq x \preceq e\}$$

是 θ 的一个绝对凸的邻域, ρ_e 表示 $[-e, e]$ 的 Minkowski 函数. 令 $d_\rho = \rho_e \circ d$. Kadelburg–Radenovic–Rakocevic [11] 证明了 d_ρ 是 X 上的一个通常意义下的度量, 并证明了以下结果.

定理 3.1 [11] 设 (X, d) 是 TVS- 锥度量空间, d_ρ 是如上定义的度量. 设 (x_n) 是 X 中的一个序列, $x \in X$, 则

(i) d-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 当且仅当 d_ρ-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(ii) (x_n) 是 d-Cauchy 序列当且仅当它是 d_ρ-Cauchy 序列.

(iii) (X, d) 是完备的当且仅当 (X, d_ρ) 是完备的.

Minkowski 函数的性质和 TVS- 锥度量空间的可度量化的更多细节, 可参考 Holmes [10] 和 Kadelburg 等人 [11] 的文献. 下面将证明统计收敛版本的 Kadelburg–Radenovic–Rakocevic 定理.

定理 3.2 设 (X, d) 为 TVS- 锥度量空间, 符号 e, ρ_e 和 d_ρ 如上定义. 设 (x_n) 是 X 中的一个序列, $x \in X$, 则

(i) d-st-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 当且仅当 d_ρ-st-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(ii) (x_n) 是 d- 统计 Cauchy 序列当且仅当它是 d_ρ- 统计 Cauchy 序列.

(iii) (X, d) 是 d- 统计完备的当且仅当 (X, d_ρ) 是 d- 统计完备的.

证明 假设 (x_n) TVS- 锥统计收敛于 x. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 注意到 d_ρ 的定义,

$$\{n \in \mathbb{N} : d_\rho(x_n, x) < \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \ll \varepsilon e\}$$

具有自然密度 1. 因此 d_ρ-st-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$. 反过来, 假设 (x_n) d_ρ- 统计收敛到 x. 对任意的 $c \gg \theta$, 注意到

$$c = \lim_{n\to\infty} \left(c - \frac{1}{n} e\right) \in \operatorname{int} P,$$

存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $c - \frac{1}{n_0} e \in \operatorname{int} P$, 即 $\frac{1}{n_0} e \ll c$. 意味着

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \ll c\} \supseteq \left\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \ll \frac{1}{n_0} e\right\} = \left\{n \in \mathbb{N} : d_\rho(x_n, x) < \frac{1}{n_0}\right\}.$$

从而有

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \ll c\}) \geq \delta\left(\left\{n \in \mathbb{N} : d_\rho(x_n, x) < \frac{1}{n_0}\right\}\right) = 1.$$

这证明了

$$d\text{-st-}\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

从而 (i) 成立. 类似地可以证明 (ii). (iii) 可由 (i) 与 (ii) 直接得到. 证毕.

如果 $\mathbb{N}$ 的一个子集族 $\mathscr{F}$ 满足:

(i) $\emptyset \notin \mathscr{F}$;

(ii) $A,\ B \in \mathscr{F}$, 有 $A \cap B \in \mathscr{F}$;

(iii) $A \in \mathscr{F}$ 且 $A \subset B \subset \mathbb{N}$, 有 $B \in \mathscr{F}$, 则称 $\mathscr{F}$ 为 $\mathbb{N}$ 上的一个滤子. 令 $\mathscr{F}_1 = \{A \subset \mathbb{N} : A$ 具有自然密度 1, 即 $\delta(A) = 1\}$, 则不难验证 $\mathscr{F}_1$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个滤子.

引理 3.3 假设 (X, d) 是一个 TVS- 锥度量空间, (x_n) 是 X 中的一个序列, 则 (x_n) 是 TVS- 锥统计 Cauchy 序列当且仅当它是一个几乎处处 TVS- 锥 Cauchy 序列.

证明 充足性由注 2.4 即得.

往证必要性. 假设 (x_n) 是一个 TVS- 锥统计 Cauchy 序列. 记号 $e \in \mathrm{int}P$, ρ_e 以及 d_ρ 如上定义. 为了证明 (x_n) 一个几乎处处 TVS- 锥 Cauchy 序列, 根据定理 3.1, 只需证明存在一个自然密度为 1 的子集 $G \subset \mathbb{N}$, 使得 $(x_n)_{n\in G}$ 在度量 d_ρ 意义下是一个 Cauchy 序列. 事实上, 根据定理 3.2, (x_n) 在度量 d_ρ 意义下是一个统计 Cauchy 序列. 从而可以选择 $N, N_1 \in \mathbb{N}$, 使得

$$B_0 \equiv \{n \in \mathbb{N} : d_\rho(x_N, x_n) \le 1\} \in \mathscr{F}_1,$$
$$B_1' \equiv \left\{n \in \mathbb{N} : d_\rho(x_{N_1}, x_n) \le \frac{1}{2}\right\} \in \mathscr{F}_1.$$

令 $B_1 = B_0 \cap B_1'$, 则 $B_1 \in \mathscr{F}_1$. 现在选取 $N_2 \in \mathbb{N}$, 使得

$$B_2' \equiv \left\{n \in \mathbb{N} : d_\rho(x_{N_2}, x_n) \le \frac{1}{4}\right\} \in \mathscr{F}_1.$$

令 $B_2 = B_1 \cap B_2'$, 则 $B_2 \in \mathscr{F}_1$. 归纳地, 可以得到 $\mathbb{N}$ 的一个单调不增的子集列 (B_m), 使得

$$B_m \in \mathscr{F}_1 \text{ 以及 } \sup\{d_\rho(x_k, x_n) : x_k, x_n \in B_m\} \le \frac{1}{2^{m-1}} \text{ 对所有的 } m \in \mathbb{N}.$$

对任意的 $m \in \mathbb{N}$, 由于 $\delta(B_m) = 1$, 取一个充分大的 $i_m \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{1}{n}\{k \le n : k \notin B_m\}^\sharp < \frac{1}{m} \text{ 对所有的 } n > i_m.$$

令 $G_m = B_m \cap (i_m, i_{m+1}]$, $m = 1, 2, \ldots$, 且令 $G = \bigcup_{m=1}^\infty G_m$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $m_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $\frac{1}{2^{m_0-1}} < \varepsilon$. 一方面, 对任意的 $m, n \in G$ 且 $m, n > i_{m_0}$, 有

$$d_\rho(x_m, x_n) < \frac{1}{2^{m_0-1}} < \varepsilon.$$

这意味着 $(x_n)_{n\in G}$ 在度量 d_ρ 意义下是一个 Cauchy 序列. 另一方面, 对任意充分大的 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $m(n) \in \mathbb{N}$, 使得 $i_{m(n)} < n \le i_{m(n)+1}$. 从而有

$$\frac{1}{n}\{k \le n : k \notin G\}^\sharp \le \frac{1}{n}\{k \le n : k \notin B_{m(n)}\}^\sharp < \frac{1}{m(n)}.$$

注意到当 $n \to \infty$ 有 $m(n) \to \infty$, 从而有

$$0 \le \delta(\mathbb{N}\backslash G) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{k \le n : k \notin G\}^\sharp \le \lim_{m(n)\to\infty} \frac{1}{m(n)} = 0.$$

所以 $\delta(\mathbb{N}\backslash G) = 0$, 即 G 具有自然密度 1. 证毕.

以下两个定理回答了引言中提出的问题.

定理 3.4 假设 (X,d) 是一个完备的 TVS- 锥度量空间, 则以下说法是等价的.

(i) (x_n) 是 TVS- 锥统计收敛序列.

(ii) (x_n) 是 TVS- 锥统计 Cauchy 序列.

(iii) (x_n) 是几乎处处 TVS- 锥 Cauchy 序列.

(iv) (x_n) 是几乎处处 TVS- 锥收敛序列.

证明 (i)⇒(ii) 假设 (x_n) TVS- 锥统计收敛于 $x \in X$. 对任意的 $c \gg \theta$, 则

$$\left\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \ll \frac{c}{2}\right\}$$

具有自然密度 1. 选取 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $d(x_{n_0}, x) \ll \frac{c}{2}$, 且注意到

$$d(x_n, x_{n_0}) \preceq d(x_n, x) + d(x_{n_0}, x),$$

则有

$$\left\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \ll \frac{c}{2}\right\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_{n_0}) \ll c\}.$$

从而

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_{n_0}) \ll c\}$$

具有自然密度 1. 这意味着 (x_n)是一个 TVS- 锥统计 Cauchy 序列.

(ii)⇒(iii) 由引理 3.3 即得.

(iii)⇒(iv) 由 (X,d) 的完备性即得.

(iii)⇒(iv) 由注 2.4 即得. 证毕.

定理 3.5 设 (X,d) 是一个完备的 TVS- 锥度量空间, 则 X 是 d- 统计完备的.

证明 这由定理 3.4 即可推出. 证毕.

4 总结

需要指出的是, 我们证明了锥度量空间中定义的统计收敛等价于通常度量意义下的统计收敛. 基于此, 通常度量空间中统计收敛的许多性质都可以平行地推广到锥度量空间中统计收敛的情形.

例如, 作为定理 3.2 的进一步应用, 下面证明统计收敛研究领域中的一个重要结论.

定理 4.1 假设 (X,d) 是一个 TVS- 锥度量空间, (x_n) 是 X 的一个序列和 $x \in X$, 则 (x_n) TVS- 锥统计收敛于 x, 当且仅当它几乎处处 TVS- 锥收敛到 x.

证明 充分性只是注 2.4 的一部分.

往证必要性. 假设 (x_n) TVS- 锥统计收敛于 x, 根据定理3.2, (x_n) d_ρ- 统计收敛于 x. 注意到 (X,d_ρ) 度量空间, (X,d_ρ) 是一个第一可数空间. 根据文 [17, 定理 2.2], (x_n) 在 d_ρ 几乎处处收敛于 x. 再次利用定理 3.2, (x_n) 在 d 意义下几乎处处收敛于 x. 证毕.

注 4.2 定理 4.1 意味着在定理 3.4 中关于 (i)⇔(iv) 的证明可以去掉完备性的假设.

注 4.3 利用定理 3.2, Li 等人 [15] 提出的许多关于锥度量空间统计完备性的结果均可以简化证明.

参 考 文 献

[1] Bao L., Cheng L., On statistical measure theory, *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **20**: 413–424.

[2] Bao L., On weak filter convergence and the Radon–Riesz type theorem, *Acta Mathematica Scientia*, 2016, **36**(1): 215–219.

[3] Cheng L., Lin G., Lan Y., et al. Measure theory of statistical convergence, *Sci. China Ser. A.*, 2008, **51**(2): 2285–2303.

[4] Cheng L., Lin G., Shi H., On real-valued measures of statistical type and their applications to statistical convergence, *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, **50**: 116–122.

[5] Connor J., On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, *Canad. Math. Bull.*, 1989, **32**(2): 194–198.

[6] Connor J., Ganichev M., Kadets V., A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence, *J. Math. Anal. Appl.*, 2000, **244**(1): 251–261.

[7] Du W., A note on cone metric fixed point theory and its equivalence, *Nonlinear Anal.*, 2010, **72**: 2259–2261.

[8] Fast H., Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.*, 1951, **2**: 241–244.

[9] Fridy J., On statistical convergence, *Analysis*, 1985, **5**: 301–313.

[10] Holmes R. B., Geometric Functional Analysis and Its Applications, Springer-Verlag, New York, 1975.

[11] Kadelburg Z., Radenovic S., Rakocevic V., A note on equivalence of some metric and cone metric fixed point results, *Applied Mathematics Letters*, 2011, **24**(2): 370–374.

[12] Kadets V., Weak cluster points of a sequence and covering by cylinder, *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 2004, **11**(2): 161–168.

[13] Kadets V., Leonov A., Orhan C., weak statistical convergence and weak filter convergence for unbounded sequences, *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, **371**: 414–424.

[14] Kostyrko P., Šalát T., Wilczyński W., et al., I-convergence, *Real Anal. Exchange*, 2000/2001, **26**: 669–689.

[15] Li K., Lin S., Ge Y., On statistical convergence in cone metric spaces, *Topology and Its Applications*, 2015, **196**: 641–651.

[16] Maddox I. J., Statistical convergence in a locally convex space, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1988, **104**: 141–145.

[17] Maio G. D., Kocinac L. D. R., Statistical convergence in topology, *Topology and its Applications*, 2008, **156**: 28–45.

[18] Šalát T., On statistically convergent sequences of real numbers, *Math. Slovaca*, 1980, **30**(2): 139–150.

[19] Steinhaus H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloq. Math.*, 1951, **2**: 73–74.