第63卷第5期 数学学报中文版 Vol.63, No.5
2020年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2020

文章编号: 0583-1431(2020)05-0495-10 **文献标识码: A**

三维 Keller–Segel–Navier–Stokes 方程弱解的整体存在性

陆生琪

三江学院数理部 南京 210012
E-mail: 001336@sju.edu.cn

陈淼超

巢湖学院应用数学学院 合肥 238000
E-mail: chenmiaochao@chu.edu.cn

刘其林

东南大学数学学院 南京 211189
E-mail: liuqlseu@126.com

摘　要　本文证明具有 logistic 源的一个 3 维 Keller–Segel–Navier–Stokes 方程弱解的整体存在性, 并研究了弱解的长时间行为.

关键词　趋化; Navier–Stokes; 弱解; 长时间行为
MR(2010) 主题分类　35D30, 35B40, 35Q30
中图分类　O175.29

Global Existence of Weak Solutions to a 3D Keller–Segel–Navier–Stokes System

Sheng Qi LU

Department of Mathematics and Physics, Sanjiang University,
Nanjing 210012*, P. R. China*
E-mail: 001336*@sju.edu.cn*

Miao Chao CHEN

School of Mathematics and Statistics, Chaohu University,
Hefei 238000*, P. R. China*
E-mail: *chenmiaochao@chu.edu.cn*

Qi Lin LIU

School of Mathematics, Southeast University, Nanjing 211189*, P. R. China*
E-mail: *liuqlseu@126.com*

收稿日期: 2019-07-01; 接受日期: 2020-01-08
基金项目: 安徽省重点大学自然科学基金 (KJ2017A453, KJ2017A454); 安徽省大学教学研究基金 (2016jyxm0693); 巢湖学院自然科学基金 (XLY-201503)

Abstract In this paper, we prove the global existence of weak solutions to a 3D Keller–Segel–Navier–Stokes system with logistic source. We also study the long time behavior of the solutions.

Keywords chemotaxis; Navier–Stokes; weak solutions; long time behavior
MR(2010) Subject Classification 35D30, 35B40, 35Q30
Chinese Library Classification O175.29

1 引言

本文研究如下的三维 Keller–Segel–Navier–Stokes 方程组 [9, 13]:

$$\partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla\pi - \Delta u = n\nabla\phi, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{1.2}$$

$$\partial_t n + u\cdot\nabla n - \Delta n + bn^2 - an = -\nabla\cdot(n\nabla p) - \nabla\cdot(n\nabla q), \tag{1.3}$$

$$\partial_t p + u\cdot\nabla p - \Delta p = -np, \tag{1.4}$$

$$\partial_t q + u\cdot\nabla q - \Delta q + q = n \text{ 在 } \Omega\times(0,\infty) \text{ 中}, \tag{1.5}$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial\nu} = \frac{\partial p}{\partial\nu} = \frac{\partial q}{\partial\nu} = 0 \text{ 在 } \partial\Omega\times(0,\infty) \text{ 中}, \tag{1.6}$$

$$(u,n,p,q)(\cdot,0) = (u_0,n_0,p_0,q_0)(\cdot) \ \text{ 在 } \Omega\subset\mathbb{R}^3 \text{ 中}, \tag{1.7}$$

这里 u 表示流体的速度, π 表示压力, n, p 和 q 分别表示变形虫、氧气和化学引诱剂的浓度. 位势 $\phi := \phi(x)$ 是一光滑函数. a 是实常数, b 是正常数. Ω 是一有界凸区域具有光滑边界 $\partial\Omega$, ν 是边界的单位外法向量.

当 $u = 0$ 时, 系统 (1.3), (1.4) 和 (1.5), 即为 Keller–Segel 方程组 [6–8]. Keller–Segel 方程组已有很多的研究结果 [1, 2, 4, 5, 10–12].

最近, 当 $q = 0$ 时, Fan 和 Zhao [3] 证明了一些爆破准则.

定义 1.1 设 $\Phi\in C^2([0,\infty))$ 是一非负函数, 在 $[0,\infty)$ 上 $\Phi' > 0$ 且 $\Phi(n_0)\in L^1(\Omega)$. 设 $\nabla n, \nabla p, \nabla q, \Delta p$ 和 Δq 可测,

$$\begin{aligned}&\Phi(n), \Phi''(n)|\nabla n|^2, \Phi(n)\Delta p, n\Phi'(n)\Delta p, \Phi(n)\Delta q, n\Phi'(n)\Delta q, n\Phi'(n) \ \text{ 和 } \ n^2\Phi'(n)\\ &\text{属于 } \ L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)),\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\Phi'(n)\nabla n, \Phi(n)\nabla p, \Phi(n)\nabla q \ \text{ 和 } \ \Phi(n)u \ \text{ 属于 } \ L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \tag{1.9}$$

且在 $D'(\Omega\times(0,\infty))$ 中 $\nabla\cdot u = 0$. 那么称 (n,p,q,u) 是 (1.3) 的一个 Φ- 弱下解 (Φ- 弱上解), 若

$$\begin{aligned}&-\int_0^\infty\int \Phi(n)\xi_t\,dx\,dt - \int\Phi(n_0)\xi(\cdot,0)\,dx \overset{(\geq)}{\leq} -\int_0^\infty\int\Phi''(n)|\nabla n|^2\xi\,dx\,dt\\ &-\int_0^\infty\int\Phi'(n)\nabla n\cdot\nabla\xi\,dx\,dt + \int_0^\infty\int\Phi(n)(\nabla p\cdot\nabla\xi + \Delta p\xi)dxdt\\ &-\int_0^\infty\int n\Phi'(n)\Delta p\xi\,dx\,dt + \int_0^\infty\int\Phi(n)(\nabla q\cdot\nabla\xi + \Delta q\xi)dxdt\\ &-\int_0^\infty\int n\Phi'(n)\Delta q\xi\,dx\,dt + a\int_0^\infty\int n\Phi'(n)\xi dxdt\\ &-b\int_0^\infty\int n^2\Phi'(n)\xi\,dx\,dt + \int_0^\infty\int\Phi(n)u\cdot\nabla\xi dxdt\end{aligned} \tag{1.10}$$

对所有非负 $\xi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ 都成立.

定义 1.2　设函数

$$\begin{cases} u \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty); W_0^{1,1}), \\ n \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times [0,\infty)), \\ p \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty), W^{1,1}), \\ q \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty); W^{1,1}) \end{cases}$$

满足

$$pu, qu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \ \text{ 且 } \ u \otimes u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times [0,\infty)),$$

以及 $n,p,q \geq 0$ 在 $\Omega \times (0,\infty)$ 中. 那么称 (n,p,q,u) 是 (1.1)–(1.5) 的一个广义解, 如果下列条件成立

$$\begin{aligned} &-\int_0^\infty\!\!\int p\xi_t dxdt - \int p_0\xi(\cdot,0)dx \\ &= -\int_0^\infty\!\!\int \nabla p \cdot \nabla\xi dxdt - \int_0^\infty\!\!\int np\xi dxdt + \int_0^\infty\!\!\int pu \cdot \nabla\xi dxdt \end{aligned} \tag{1.11}$$

对所有 $\xi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$,

$$\begin{aligned} &-\int_0^\infty\!\!\int q\xi_t dxdt - \int q_0\xi(\cdot,0)dx \\ &= -\int_0^\infty\!\!\int \nabla q \cdot \nabla\xi dxdt - \int_0^\infty\!\!\int q\xi dxdt + \int_0^\infty\!\!\int qu \cdot \nabla\xi dxdt \end{aligned} \tag{1.12}$$

对所有 $\xi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ 且

$$\begin{aligned} &-\int_0^\infty\!\!\int u \cdot \xi_t dxdt - \int u_0\xi(\cdot,0)dx \\ &= -\int_0^\infty\!\!\int \nabla u \cdot \nabla\xi dxdt + \int_0^\infty\!\!\int (u \otimes u) : \nabla\xi dxdt + \int_0^\infty\!\!\int n\nabla\phi \cdot \xi dxdt \end{aligned} \tag{1.13}$$

对所有满足 $\nabla \cdot \xi = 0$ 的 $\xi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, 并且如果存在 $\Phi_1, \Phi_2 \in C^2([0,\infty))$, 满足在 $[0,\infty)$ 上 $\Phi_1' > 0$ 和 $\Phi_2' > 0$, 那么 (n,p,q,u) 是 (1.3) 的一个 Φ_1- 弱下解和 Φ_2- 弱上解 (定义 1.1).

当 $p = 0$ 时, Winkler [13] 证明了弱解的整体存在性并研究了其渐近行为. 本文将把文 [13] 中的结果推广至 $p \neq 0$ 的情形. 我们将证明:

定理 1.3　设 $u_0 \in H_0^1 \cap H^2$, $n_0 \in C(\overline{\Omega})$, $p_0, q_0, \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\operatorname{div} u_0 = 0$, $n_0, p_0, q_0 \geq 0$ 在 Ω 中. 设 $\phi := \phi(x)$ 是一个光滑函数, 则对任意 $T > 0$, 问题 (1.1)–(1.7) 存在一个广义解 (u,n,p,q), 满足

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;H^1) \cap L^{\frac{10}{3}}(\Omega \times (0,T)), \\ &n \in L^2(\Omega \times (0,T)) \cap L^{\frac{16}{13}}(0,T;W^{1,\frac{16}{13}}), \\ &p \in L^{\frac{8}{5}}(0,T;W^{2,\frac{8}{5}}), \quad 0 \leq p \leq C, \\ &q \in L^\infty(0,T;L^6) \cap L^{\frac{8}{5}}(0,T;W^{2,\frac{8}{5}}). \end{aligned} \tag{1.14}$$

定理 1.4　设 $a > 0$ 且 b 充分大, 则存在一个零测集 $N \subset (0,\infty)$, 使得当 $(0,\infty) \setminus N \ni t \to \infty$ 时, 成立

$$\begin{aligned} &\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \to 0, \quad \left\| n(\cdot,t) - \frac{a}{b} \right\|_{L^1} \to 0, \\ &\|p(\cdot,t)\|_{L^2} \to 0, \quad \left\| q(\cdot,t) - \frac{a}{b} \right\|_{L^2} \to 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

注 1.5 当 $a \le 0$ 时, 可证明有类似结论, 此处从略.

2 一些准备工作

记 $P: L^2(\Omega) \to L^2_\sigma(\Omega)$ 为 Helmholtz 投影, $D(A) := H^1_0 \cap H^2$, $A := -P\Delta$ 为 Stokes 算子在 $L^2_\sigma(\Omega)$ 中的实现 (realization). $\varepsilon \in (0,1)$ 为常数, 用 $Yu := (1+\varepsilon A)^{-1}u$ 表示 Yosida 逼近. 考虑如下逼近问题

$$\partial_t u + Yu \cdot \nabla u + \nabla \pi - \Delta u = n \nabla \phi, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{2.2}$$

$$\partial_t n + u \cdot \nabla n - \Delta n + bn^2 - an = -\nabla \cdot \frac{n}{1+\varepsilon n} \nabla p - \nabla \cdot \frac{n}{1+\varepsilon n} \nabla q, \tag{2.3}$$

$$\partial_t p + u \cdot \nabla p - \Delta p = -np, \tag{2.4}$$

$$\partial_t q + u \cdot \nabla q - \Delta q + q = n \text{ 在 } \Omega \times (0,\infty) \text{ 中}, \tag{2.5}$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial \nu} = \frac{\partial p}{\partial \nu} = \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 \text{ 在 } \partial\Omega \times (0,\infty) \text{ 中}, \tag{2.6}$$

$$(u,n,p,q)(\cdot,0) = (u_0,n_0,p_0,q_0)(\cdot) \text{ 在 } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ 中}. \tag{2.7}$$

引理 2.1 [13] 对任意 $\varepsilon \in (0,1)$, 问题 (2.1)–(2.7) 存在唯一古典解 $(u_\varepsilon, n_\varepsilon, p_\varepsilon, q_\varepsilon, \pi_\varepsilon)$, 满足

$$u_\varepsilon, n_\varepsilon, p_\varepsilon, q_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$$

且

$$\pi_\varepsilon \in C^{1,0}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)),$$

并且在 $\Omega \times (0,\infty)$ 中, 有 $n_\varepsilon, p_\varepsilon, q_\varepsilon \ge 0$ 以及 $p_\varepsilon \le C$.

在下文中, 我们用 C 表示一个不依赖于 ε、时间 t 以及 T 的正常数. 由和文 [13] 相同的计算过程 (此处我们不再赘述), 可以证明对任意 $t > 0$, 有

$$\int n_\varepsilon(x,t)dx \le m := \max\left\{\int n_0 dx, \frac{a|\Omega|}{b}\right\}, \quad \forall t > 0, \tag{2.8}$$

$$\int_t^{t+1}\int n_\varepsilon^2(x,s)dxds \le \frac{a+1}{b}m, \quad \forall t > 0, \tag{2.9}$$

$$\int q_\varepsilon(x,t)dx \le \max\left\{\int q_0 dx, m\right\}, \quad \forall t > 0, \tag{2.10}$$

$$\int q_\varepsilon^6(x,t)dx \le C, \quad \forall t > 0, \tag{2.11}$$

$$\int |u_\varepsilon(x,t)|^2 dx \le C, \quad \forall t > 0, \tag{2.12}$$

$$\int_t^{t+1}\int |\nabla u_\varepsilon(x,s)|^2 dxds \le C, \quad \forall t > 0, \tag{2.13}$$

$$\int_t^{t+1}\int |u_\varepsilon(x,s)|^{\frac{10}{3}} dxds \le C, \quad \forall t > 0, \tag{2.14}$$

$$\int |\nabla q_\varepsilon(x,t)|^{\frac{4}{3}} dx \le C, \quad \forall t > 0, \tag{2.15}$$

$$\int_t^{t+1}\int (|\nabla q_\varepsilon|^2 + 1)^{-\frac{1}{3}} |D^2 q_\varepsilon|^2 dxds \le C, \quad \forall t > 0, \tag{2.16}$$

$$\int_t^{t+1}\int |\nabla q_\varepsilon(x,s)|^{\frac{8}{3}}d\,xd\,s \le C, \quad \forall\, t>0, \tag{2.17}$$

$$\int_t^{t+1}\int q_\varepsilon^8(x,s)d\,xd\,s \le C, \quad \forall\, t>0, \tag{2.18}$$

$$\int_t^{t+1}\int |D^2 q_\varepsilon(x,s)|^{\frac{8}{5}}d\,xd\,s \le C, \quad \forall\, t>0, \tag{2.19}$$

$$\int |\nabla p_\varepsilon(x,t)|^{\frac{4}{3}}d\,x \le C, \quad \forall\, t>0, \tag{2.20}$$

$$\int_t^{t+1}\int (|\nabla p_\varepsilon(x,s)|^{\frac{8}{3}} + |\nabla^2 p_\varepsilon(x,s)|^{\frac{8}{5}})d\,xd\,s \le C, \quad \forall\, t>0, \tag{2.21}$$

$$\int_t^{t+1}\int n_\varepsilon^{-\frac{5}{4}}|\nabla n_\varepsilon|^2 d\,xd\,s \le C, \quad \forall\, t>0, \tag{2.22}$$

$$\int_t^{t+1}\int |\nabla n_\varepsilon|^{\frac{16}{13}}d\,xd\,s \le C, \quad \forall\, t>0, \tag{2.23}$$

$$\int_0^T \|\partial_t n_\varepsilon\|_{(W^{3,2})^*}d\,t \le C(T+1), \quad \forall\, T>0, \tag{2.24}$$

$$\int_0^T\int (|\partial_t q_\varepsilon|^{\frac{40}{27}} + |\partial_t p_\varepsilon|^{\frac{40}{27}})d\,xd\,t \le C(T+1), \quad \forall\, T>0, \tag{2.25}$$

$$\int_0^T \|\partial_t u_\varepsilon\|^{\frac{4}{3}}_{(W^{1,2}_{0,\sigma})^*}d\,t \le C(T+1), \quad \forall\, T>0. \tag{2.26}$$

3 定理 1.3 的证明

设 X 为 Banach 空间, 为了方便记号, 在下文中, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 分别用记号

$$f_\varepsilon \to f \text{ 在 } X \text{ 中}$$

以及

$$f_\varepsilon \rightharpoonup f \text{ 在 } X \text{ 中},$$

表示 f_ε 在 X 中强收敛到 f 以及 f_ε 在 X 中弱收敛到 f. 现在, 我们能够通过适当地取子列过程得到如下在适当拓扑空间中的收敛性.

引理 3.1 [13] 当 $j\to\infty$ 时, 存在子列 $\varepsilon := \varepsilon_j \to 0$, 使得

$$n_\varepsilon \text{ 在 } \Omega\times(0,\infty) \text{ 中几乎处处收敛于 } n, \tag{3.1}$$

$$\forall\, 1\le p<2, \text{ 有 } n_\varepsilon \to n \text{ 在 } L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.2}$$

$$n_\varepsilon \rightharpoonup n \text{ 在 } L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.3}$$

$$\nabla n_\varepsilon \rightharpoonup \nabla n \text{ 在 } L^{\frac{16}{13}}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.4}$$

$$\forall\, \beta\in\left(0,\frac{3}{8}\right], \text{ 有 } \nabla(n_\varepsilon+1)^\beta \rightharpoonup \nabla(n+1)^\beta \text{ 在 } L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.5}$$

$$q_\varepsilon \text{ 在 } \Omega\times(0,\infty) \text{ 中几乎处处收敛于 } q, \tag{3.6}$$

$$\forall\, r\in[1,8), \text{ 有 } q_\varepsilon \to q \text{ 在 } L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.7}$$

$$\nabla q_\varepsilon \rightharpoonup \nabla q \text{ 在 } L^{\frac{8}{3}}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.8}$$

$$D^2 q_\varepsilon \rightharpoonup D^2 q \text{ 在 } L^{\frac{8}{5}}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.9}$$

$$p_\varepsilon \text{ 在 } \Omega\times(0,\infty) \text{ 中几乎处处收敛于 } p, \tag{3.10}$$

$$\forall\, s\in[1,\infty),\ \text{有}\ p_\varepsilon \to p \text{ 在 } L^{s}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.11}$$

$$\nabla p_\varepsilon \rightharpoonup \nabla p \text{ 在 } L^{\frac{8}{3}}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.12}$$

$$D^2 p_\varepsilon \rightharpoonup D^2 p \text{ 在 } L^{\frac{8}{5}}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.13}$$

$$u_\varepsilon \to u \text{ 在 } L^{2}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.14}$$

$$u_\varepsilon(\cdot,t) \to u(\cdot,t) \text{ 在 } L^2(\Omega)\text{中对几乎处处 } t>0, \tag{3.15}$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ 在 } L^{\frac{10}{3}}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.16}$$

且有
$$\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u \text{ 在 } L^{2}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.17}$$

这里极限函数 n,q,p 和 u 满足 (1.14) 以及在 $\Omega\times(0,\infty)$ 中几乎处处满足 $n\geq 0$, $q\geq 0$ 和 $0\leq p\leq C$.

引理 3.2 [13] 极限函数 n,q,p 和 u 满足 (1.11), (1.12) 和 (1.13).

引理 3.3 n 是 (1.3) 的一个 Φ- 弱下解, 这里

$$\Phi(s):=s,\quad s\geq 0. \tag{3.18}$$

证明 (2.3) 两端同乘以 $\xi\in C_0^\infty(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$ 并分部积分, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$\begin{aligned}
b\int_0^\infty\!\!\int n_\varepsilon^2\xi\,dx\,dt=&\int_0^\infty\!\!\int n_\varepsilon\partial_t\xi\,dx\,dt+\int n_0\xi(x,0)\,dx-\int_0^\infty\!\!\int \nabla n_\varepsilon\cdot\nabla\xi\,dx\,dt\\
&+\int_0^\infty\!\!\int \frac{n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon}\nabla p_\varepsilon\cdot\nabla\xi\,dx\,dt+\int_0^\infty\!\!\int \frac{n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon}\nabla q_\varepsilon\cdot\nabla\xi\,dx\,dt\\
&+a\int_0^\infty\!\!\int n_\varepsilon\xi\,dx\,dt+\int_0^\infty\!\!\int n_\varepsilon u_\varepsilon\cdot\nabla\xi\,dx\,dt.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

利用 (3.2) 和 (3.4), 当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to 0$ 时, 有

$$\int_0^\infty\!\!\int n_\varepsilon\partial_t\xi\,dx\,dt\to\int_0^\infty\!\!\int n\partial_t\xi\,dxdt,\quad \int_0^\infty\!\!\int \nabla n_\varepsilon\cdot\nabla\xi\,dx\,dt\to\int_0^\infty\!\!\int \nabla n\cdot\nabla\xi\,dx\,dt$$

以及

$$\int_0^\infty\!\!\int n_\varepsilon\xi\,dx\,dt\to\int_0^\infty\!\!\int n\xi\,dx\,dt.$$

进一步地, 在 (3.2) 中取 $r:=\frac{8}{5}<2$, 当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to 0$ 时, 有

$$\frac{n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon}\to n \text{ 在 } L^{\frac{8}{5}}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中},$$

因此, 由 (3.8) 和 (3.12) 知, 当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to 0$ 时, 有

$$\int_0^\infty\!\!\int \frac{n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon}\nabla q_\varepsilon\cdot\nabla\xi\,dx\,dt\to\int_0^\infty\!\!\int n\nabla q\cdot\nabla\xi\,dx\,dt,$$

$$\int_0^\infty\!\!\int \frac{n_\varepsilon}{1+\varepsilon n_\varepsilon}\nabla p_\varepsilon\cdot\nabla\xi\,dx\,dt\to\int_0^\infty\!\!\int u\nabla p\cdot\nabla\xi\,dx\,dt.$$

在 (3.2) 中取 $r:=\frac{10}{7}<2$, 并利用 (3.14) 可得当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to 0$ 时, 有

$$\int_0^\infty\!\!\int n_\varepsilon u_\varepsilon\cdot\nabla\xi\,dx\,dt\to\int_0^\infty\!\!\int nu\cdot\nabla\xi\,dx\,dt.$$

由 (3.2) 中的几乎处处收敛, ξ 的非负性及 Fatou 引理, 可得

$$\begin{aligned} b\int_0^\infty\int n^2\xi dxdt &\le \liminf_{\varepsilon=\varepsilon_j\to 0}\left\{b\int_0^\infty\int n_\varepsilon^2\xi dxdt\right\} \\ &= \int_0^\infty\int n\partial_t\phi dxdt - \int n_0\xi(x,0)dx - \int_0^\infty\int \nabla n\cdot\nabla\xi dxdt \\ &\quad + \int_0^\infty\int n\nabla p\cdot\nabla\xi dxdt + \int_0^\infty\int n\nabla q\cdot\nabla\xi dxdt + a\int_0^\infty\int n\xi dxdt \\ &\quad + \int_0^\infty\int nu\cdot\nabla\xi dxdt. \end{aligned}$$

证毕.

引理 3.4 [13] 设 $\alpha\in\left(0,\frac{3}{4}\right)$, 则当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to 0$ 时, 有

$$\forall r\in\left[1,\frac{2}{\alpha}\right),\quad (n_\varepsilon+1)^\alpha\to(n+1)^\alpha \text{ 在 } L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.20}$$

$$\forall r\in\left[1,\frac{2}{(\alpha-\frac{3}{8})_+}\right),\quad (n_\varepsilon+1)^{\alpha-\frac{3}{8}}\to(n+1)^{\alpha-\frac{3}{8}} \text{ 在 } L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.21}$$

$$\forall r\in\left[1,\frac{2}{\alpha}\right),\quad n_\varepsilon(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}\to n(n+1)^{\alpha-1} \text{ 在 } L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.22}$$

$$\forall r\in\left[1,\frac{2}{\alpha+1}\right),\quad n_\varepsilon^2(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}\to n^2(n+1)^{\alpha-1} \text{ 在 } L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}, \tag{3.23}$$

并且令

$$\psi_\varepsilon(s):=\alpha\int_0^s\frac{d\sigma}{(\sigma+1)^{1-\alpha}(1+\varepsilon\sigma)^2},\quad s\ge 0,\quad 0<\varepsilon<1, \tag{3.24}$$

则 $\forall r\in\left[1,\frac{2}{\alpha}\right)$, 有

$$\frac{n_\varepsilon}{(n_\varepsilon+1)^{1-\alpha}(1+\varepsilon n_\varepsilon)}\to\frac{n}{(n+1)^{1-\alpha}} \text{ 在 } L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中} \tag{3.25}$$

以及

$$\psi_\varepsilon(n_\varepsilon)\to(n+1)^\alpha \text{ 在 } L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) \text{ 中}. \tag{3.26}$$

由此可证如下引理.

引理 3.5 设 $\alpha\in\left(0,\frac{3}{4}\right)$, 则 n 是 (3.1) 的一个 Φ- 弱上解, 这里

$$\Phi(s):=(s+1)^\alpha,\quad s\ge 0. \tag{3.27}$$

证明 首先, 有

$$\begin{aligned} \partial_t(n_\varepsilon+1)^\alpha &= \alpha(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}\Delta n_\varepsilon \\ &\quad -\frac{\alpha}{(n_\varepsilon+1)^{1-\alpha}(1+\varepsilon n_\varepsilon)}\nabla n_\varepsilon\cdot\nabla p_\varepsilon - \alpha\frac{n_\varepsilon}{(n_\varepsilon+1)^{1-\alpha}(1+\varepsilon n_\varepsilon)}\Delta p_\varepsilon \\ &\quad -\frac{\alpha}{(n_\varepsilon+1)^{1-\alpha}(1+\varepsilon n_\varepsilon)^2}\nabla n_\varepsilon\cdot\nabla q_\varepsilon - \alpha\frac{n_\varepsilon}{(n_\varepsilon+1)^{1-\alpha}(1+\varepsilon n_\varepsilon)}\Delta q_\varepsilon \\ &\quad +\alpha a n_\varepsilon(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1} - \alpha b n_\varepsilon^2(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1} \\ &\quad - u_\varepsilon\cdot\nabla(n_\varepsilon+1)^\alpha,\quad x\in\Omega,\quad t>0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

这里, 注意到

$$\frac{\alpha}{(n_\varepsilon+1)^{1-\alpha}(1+\varepsilon n_\varepsilon)^2}\nabla n_\varepsilon=\nabla\psi_\varepsilon(n_\varepsilon).$$

(3.28) 两端同时乘以任意非负函数 $\xi\in C_0^\infty(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$ 并分部积分, 则对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty\!\!\int(n_\varepsilon+1)^\alpha\partial_t\xi d\,xd\,t-\int(n_0+1)^\alpha\xi(x,0)d\,x\\
&=\alpha(1-\alpha)\int_0^\infty\!\!\int(n_\varepsilon+1)^{\alpha-2}|\nabla n_\varepsilon|^2\xi d\,xd\,t\\
&\quad-\alpha\int_0^\infty\!\!\int(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}\nabla n_\varepsilon\cdot\nabla\xi d\,xd\,t\\
&\quad+\int_0^\infty\!\!\int\psi_\varepsilon(n_\varepsilon)\nabla p_\varepsilon\cdot\nabla\xi d\,xd\,t+\int_0^\infty\!\!\int\psi_\varepsilon(n_\varepsilon)\Delta p_\varepsilon\xi d\,xd\,t\\
&\quad-\alpha\int_0^\infty\!\!\int\frac{n_\varepsilon}{(n_\varepsilon+1)^{1-\alpha}(1+\varepsilon n_\varepsilon)}\Delta p_\varepsilon\xi d\,xd\,t\\
&\quad+\int_0^\infty\!\!\int\psi_\varepsilon(n_\varepsilon)\nabla q_\varepsilon\cdot\nabla\xi d\,xd\,t+\int_0^\infty\!\!\int\psi_\varepsilon(n_\varepsilon)\Delta q_\varepsilon\xi d\,xd\,t\\
&\quad-\alpha\int_0^\infty\!\!\int\frac{n_\varepsilon}{(n_\varepsilon+1)^{1-\alpha}(1+\varepsilon n_\varepsilon)}\Delta q_\varepsilon\xi d\,xd\,t\\
&\quad+\alpha a\int_0^\infty\!\!\int n_\varepsilon(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}\xi d\,xd\,t-\alpha b\int_0^\infty\!\!\int n_\varepsilon^2(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}\xi d\,xd\,t\\
&\quad+\int_0^\infty\!\!\int(n_\varepsilon+1)^\alpha u_\varepsilon\cdot\nabla\xi d\,xd\,t.
\end{aligned}\tag{3.29}$$

利用 (3.20), (3.22) 和 (3.23) 知, 当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to0$ 时, $(n_\varepsilon+1)^\alpha$, $n_\varepsilon(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}$ 以及 $n_\varepsilon^2(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}$ 在 $L^1(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$ 中分别强收敛于 $(n+1)^\alpha$, $n(n+1)^{\alpha-1}$ 以及 $n(n+1)^{\alpha-1}$. 再由引理 3.4 知, 当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to0$ 时, 有

$$\int_0^\infty\!\!\int(n_\varepsilon+1)^\alpha\partial_t\xi d\,xd\,t\to\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha\partial_t\xi d\,xd\,t,\tag{3.30}$$

$$\alpha a\int_0^\infty\!\!\int n_\varepsilon(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}\xi d\,xd\,t\to\alpha a\int_0^\infty\!\!\int n(n+1)^{\alpha-1}\xi d\,xd\,t,\tag{3.31}$$

$$\alpha b\int_0^\infty\!\!\int n_\varepsilon^2(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}\xi d\,xd\,t\to\alpha b\int_0^\infty\!\!\int n^2(n+1)^{\alpha-1}\xi d\,xd\,t.\tag{3.32}$$

在 (3.26) 和 (3.25) 中取 $r:=\frac{8}{3}$ 则由 $\alpha<\frac{3}{4}$ 知 $\frac{8}{3}<\frac{2}{\alpha}$, 并注意由 (3.9) 和 (3.13) 知 $(\Delta p_\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_j\to0}$ 和 $(\Delta q_\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_j\to0}$ 在 $L^{\frac{8}{5}}_{\rm loc}(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$ 中弱收敛, 故当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to0$ 时, 有

$$\int_0^\infty\!\!\int\psi_\varepsilon(n_\varepsilon)\Delta p_\varepsilon\xi d\,xd\,t\to\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha\Delta p\xi d\,xd\,t,\tag{3.33}$$

$$\int_0^\infty\!\!\int\psi_\varepsilon(n_\varepsilon)\Delta q_\varepsilon\xi d\,xd\,t\to\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha\Delta q\xi d\,xd\,t,\tag{3.34}$$

以及

$$\alpha\int_0^\infty\!\!\int\frac{n_\varepsilon}{(n_\varepsilon+1)^{1-\alpha}(1+\varepsilon n_\varepsilon)}\Delta p_\varepsilon\xi d\,xd\,t\to\int_0^\infty\!\!\int n(n+1)^{\alpha-1}\Delta p\xi d\,xd\,t,\tag{3.35}$$

$$\alpha\int_0^\infty\!\!\int\frac{n_\varepsilon}{(n_\varepsilon+1)^{1-\alpha}(1+\varepsilon n_\varepsilon)}\Delta q_\varepsilon\xi d\,xd\,t\to\int_0^\infty\!\!\int n(n+1)^{\alpha-1}\Delta q\xi d\,xd\,t.\tag{3.36}$$

类似地, 在 (3.26) 中取 $r:=\frac{8}{5}<\frac{2}{\alpha}$, 并再次利用 $(\Delta p_\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_j\to0}$ 和 $(\Delta q_\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_j\to0}$ 在 $L^{\frac{8}{5}}_{\rm loc}(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$

的弱收敛性知, 当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to 0$ 时, 有

$$\int_0^\infty\!\!\int \psi_\varepsilon(n_\varepsilon)\nabla p_\varepsilon\cdot\nabla\xi dxdt\to\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha\nabla p\cdot\nabla\xi dxdt, \tag{3.37}$$

$$\int_0^\infty\!\!\int \psi_\varepsilon(n_\varepsilon)\nabla q_\varepsilon\cdot\nabla\xi dxdt\to\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha\nabla q\cdot\nabla\xi dxdt. \tag{3.38}$$

在 (3.20) 中取 $r:=\frac{10}{7}<\frac{2}{\alpha}$, 并利用 u_ε 在 $L^{\frac{10}{3}}_{\rm loc}(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$ 的收敛性质知, 当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to 0$ 时, 有

$$\int_0^\infty\!\!\int(n_\varepsilon+1)^\alpha u_\varepsilon\cdot\nabla\xi dxdt\to\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha u\cdot\nabla\xi dxdt. \tag{3.39}$$

接下来, 在 (3.29) 右端第二个积分中, 利用

$$\nabla(n_\varepsilon+1)^{\frac{3}{8}}=\frac{3}{8}(n_\varepsilon+1)^{-\frac{5}{8}}\nabla n_\varepsilon,$$

得到

$$\alpha\int_0^\infty\!\!\int(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}\nabla n_\varepsilon\cdot\nabla\xi dxdt=\frac{8}{3}\alpha\int_0^\infty\!\!\int(n_\varepsilon+1)^{\alpha-\frac{3}{8}}\nabla(n_\varepsilon+1)^{\frac{3}{8}}\cdot\nabla\xi dxdt,$$

从而在 (3.5) 中取 $\beta:=\frac{3}{8}$, 在 (3.21) 中取 $r:=2<\frac{2}{(\alpha-\frac{3}{8})_+}$, 可得当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\alpha\int_0^\infty\!\!\int(n_\varepsilon+1)^{\alpha-1}\nabla n_\varepsilon\cdot\nabla\xi dxdt&\to\frac{8}{3}\alpha\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^{\alpha-\frac{3}{8}}\nabla(n+1)^{\frac{3}{8}}\cdot\nabla\xi dxdt\\&=\alpha\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^{\alpha-1}\nabla n\cdot\nabla\xi dxdt.\end{aligned} \tag{3.40}$$

再一次在 (3.5) 中取 $\beta:=\frac{\alpha}{2}$, 利用 $L^2(\Omega\times(0,\infty))$ 范数的弱下半连续性, 由 (3.29)–(3.40) 可得, 对任意 ξ 有

$$\begin{aligned}&\alpha(1-\alpha)\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^{\alpha-2}|\nabla n|^2\xi dxdt\\&=\frac{4(1-\alpha)}{\alpha}\int_0^\infty\!\!\int|\nabla(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}|^2\xi dxdt\\&\le\liminf_{\varepsilon=\varepsilon_j\to 0}\left\{\frac{4(1-\alpha)}{\alpha}\int_0^\infty\!\!\int|\nabla(n_\varepsilon+1)^{\frac{\alpha}{2}}|^2\xi dxdt\right\}\\&=-\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha\partial_t\xi dxdt-\int(n_0+1)^\alpha\xi(x,0)dx\\&\quad+\alpha\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^{\alpha-1}\nabla n\cdot\nabla\xi dxdt-\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha\nabla p\cdot\nabla\xi dxdt\\&\quad-\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha\Delta p\xi dxdt+\alpha\int_0^\infty\!\!\int n(n+1)^{\alpha-1}\Delta p\xi dxdt\\&\quad-\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha\nabla q\cdot\nabla\xi dxdt-\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha\Delta q\xi dxdt\\&\quad+\alpha\int_0^\infty\!\!\int n(n+1)^{\alpha-1}\Delta q\xi dxdt-\alpha a\int_0^\infty\!\!\int n(n+1)^{\alpha-1}\xi dxdt\\&\quad+\alpha b\int_0^\infty\!\!\int n^2(n+1)^{\alpha-1}\xi dxdx-\int_0^\infty\!\!\int(n+1)^\alpha u\cdot\nabla\xi dxdt.\end{aligned}$$

由 Φ 的定义知, n 是一个上解. 证毕.

现在我们能够证明定理 1.3.

定理 1.3 的证明 由引理 3.1, 3.2, 3.3 和引理 3.5 即知定理 1.3 成立. 证毕.

4 定理 1.4 的证明

给定正数 n^*, 定义

$$\eta(s) := s - n^* - n^* \ln \frac{s}{n^*}, \quad s > 0, \tag{4.1}$$

则 η 是凸函数, 并且满足 $\eta(n^*) = \eta'(n^*) = 0$, 从而 $\eta(s) \geq 0$, $s > 0$. 特别地, 定义

$$f(n, p, q) := \int \eta(n) dx + \frac{k}{2} \int p^2 dx + \frac{B}{2} \int (q - n^*)^2 dx, \tag{4.2}$$

这里 B, k 是两个任意正常数, n, p, q 是非负连续函数. 易知 $f(n^*, 0, n^*) = 0$.

引理 4.1 取 $b > 0$ 充分大, $n^* := \frac{a}{b}$, 则存在 $k > 0$, $B > 0$ 和 $C > 0$, 使得对任意 $t > 0$ 和 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有

$$\frac{d}{dt} f + C \left\{ \int \left[\frac{|\nabla n_\varepsilon|^2}{n_\varepsilon^2} + |\nabla p_\varepsilon|^2 + |\nabla q_\varepsilon|^2 + (n_\varepsilon - n^*)^2 + n_\varepsilon p_\varepsilon^2 + (q_\varepsilon - n^*)^2 \right] dx \right\} \leq 0. \tag{4.3}$$

证明 与文 [13] 中的证明完全类似, 在此省略. 证毕.

定理 1.4 的证明 其证明与文 [13] 中完全一样, 从略.

参 考 文 献

[1] Biler P., Global solutions to some parabolic-elliptic systems of chemotaxis, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 2009, **9**: 347–359.

[2] Corrias L., Perthame B., Zaag H., Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis systems in high space dimensions, *Milan J. Math.*, 2004, **72**: 1–28.

[3] Fan J., Zhao K., Improved extensibility criteria and global well-posedness of a coupled chemotaxis-fluid model on bounded domains, *Discrete Contin. Dyn. Syst. B*, 2018, **23**(9): 3949–3967.

[4] Horstmann D., From 1970 until present: the Keller–Segel model in chemotaxis and its consequences: I. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 2003, **105**: 103–165.

[5] Hillen T., Painter K., A user's guide to PDE models for chemotaxis, *J. Math. Biol.*, 2009, **58**: 183–217.

[6] Keller E., Segel L., Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, *J. Theor. Biol.*, 1970, **26**: 399–415.

[7] Keller E., Segel L., Model for chemotaxis, *J. Theor. Biol.*, 1971, **30**: 225–234.

[8] Keller E., Segel L., Traveling bands of chemotactic bacteria: a theoretical analysis, *J. Theor. Biol.*, 1971, **30**: 235–248.

[9] Kozono H., Miura M., Sugiyama Y., Existence and uniqueness theorem on mild solutions to the Keller–Segel system coupled with the Navier–Stokes fluid, *J. Funct. Anal.*, 2016, **270**: 1663–1683.

[10] Sleeman B., Ward M., Wei J., Existence, stability, and dynamics of spike patterns in a chemotaxis model, *SIAM J. Appl. Math.*, 2005, **65**: 790–817.

[11] Wrzosek D., Long time behaviour of solutions to a chemotaxis model with volume filling effect, *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math.*, 2006, **136**: 431–444.

[12] Winkler M., Global solutions in a fully parabolic chemotaxis system with singular sensitivity, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2011, **34**: 176–190.

[13] Winkler M., A three-dimensional Keller–Segel–Navier–Stokes system with logistic source: global weak solutions and asymptotic stablization. *J. Funct. Anal.*, 2019, **276**: 1339–1401.