第63卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.63, No.5
2020年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2020

文章编号: 0583-1431(2020)05-0465-24 **文献标识码:** A

可数 sofic 群的等距线性作用的维数

荣 祯

内蒙古财经大学统计与数学学院 呼和浩特 010070
E-mail: rongzhenboshi@sina.com

摘 要 我们对复 Banach 空间上的可数 sofic 群的等距线性作用提出了一种新的维数, 推广了复 Banach 空间上的可数顺从群的等距线性作用的 Voiculescu 维数, 并且在可数 sofic 群的情形回答了 Gromov 的一个问题.

关键词 sofic 群; 顺从群; Voiculescu 维数
MR(2010) 主题分类 46B03
中图分类 O177.2

Dimension for Isometric Linear Actions of Countable Sofic Groups

Zhen RONG

College of Statistics and Mathematics,
Inner Mongolia University of Finance and Economics, Hohhot 010070, *P. R. China*
E-mail: *rongzhenboshi@sina.com*

Abstract We introduce a new dimension for isometric linear actions of countable sofic groups on complex Banach spaces. This generalizes the Voiculescu dimension for isometric linear actions of countable amenable groups on complex Banach spaces, and answers a question of Gromov in the case of countable sofic groups.

Keywords sofic group; amenable group; Voiculescu dimension
MR(2010) Subject Classification 46B03
Chinese Library Classification O177.2

1 引言

设 G 是一个可数群, e_G 是 G 的单位元, X 是一个复 Banach 空间. 设 $1 \le p < +\infty$, 记

$$l^p(G,X) = \left\{ f : G \to X \,\middle|\, \sum_{s\in G} \|f(s)\|^p < +\infty \right\}.$$

$l^p(G,X)$ 关于范数 $\|\cdot\|_p$ 构成了一个复的 Banach 空间, 这里

$$\|f\|_p = \left(\sum_{s\in G} \|f(s)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (f \in l^p(G,X)).$$

收稿日期: 2019-09-04; 接受日期: 2019-12-03

G 在 $l^p(G,X)$ 上有一个自然的左平移作用: 对 $s\in G$ 以及 $f\in l^p(G,X)$, 定义 $sf\in l^p(G,X)$ 为 $(sf)(t)=f(s^{-1}t)$ $(t\in G)$. Gromov 在文 [4] 中提出了如下的问题: 设 V 和 W 是两个有限维的复 Banach 空间, 是否有 $l^p(G,V)$ 和 $l^p(G,W)$ 是 G- 同构 (存在一个线性的 G- 同变的同胚映射 $T: l^p(G,V)\to l^p(G,W)$, 这里 $T: l^p(G,V)\to l^p(G,W)$ 是 G- 同变是指 $T(sf)=sT(f)$ $(s\in G,\ f\in l^p(G,V))$) 当且仅当 $\dim_{\mathbb{C}}(V)=\dim_{\mathbb{C}}(W)$?

当 G 为可数顺从群时, 上述问题已经被研究过并且有肯定的回答. Voiculescu 在文 [14] 中对复 Banach 空间 X 上的可数顺从群 G 的等距线性作用 $G\curvearrowright X$ 提出了一个维数 $\mathrm{vdim}(G\curvearrowright X)$ (见本文第 4 节). 利用这个维数, 我们可以在可数顺从群的情形对上述问题给予肯定的回答.

在本文中, 我们对复 Banach 空间 X 上的可数 sofic 群 G 的等距线性作用 $G\curvearrowright X$ 提出了一个维数 $\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright X)$, 推广了 Voiculescu 维数.

首先, 利用文 [8] 建立起来的可数顺从群的 sofic 逼近的 Rokhlin 引理, 得到下述的主要定理.

定理 1.1 设 X 是一个复 Banach 空间, G 是一个可数顺从群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G\curvearrowright X$. 设 $\Sigma=\{\sigma_i: G\to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright X)=\mathrm{vdim}(G\curvearrowright X).$$

从而提出的维数 $\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright X)$ 推广了 Voiculescu 维数.

接下来, 对若干重要的等距线性作用计算了维数 $\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright X)$.

命题 1.2 设 X 是一个复 Banach 空间, G 是一个可数无限 sofic 群且在 X 上有一个紧的等距线性作用 $G\curvearrowright X$. 设 $\Sigma=\{\sigma_i: G\to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright X)=0.$$

命题 1.3 设 G 是一个可数 sofic 群且 $\Sigma=\{\sigma_i: G\to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则对所有的 $1\le p\le 2$,

$$\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n})=n.$$

最后作为这个维数的应用, 我们在可数 sofic 群的情形回答了 Gromov 提出的上述问题.

命题 1.4 设 G 是一个可数 sofic 群且 $1\le p<+\infty$. 设 V 和 W 是两个有限维复 Banach 空间, 则 $l^p(G,V)$ 和 $l^p(G,W)$ 是 G- 同构当且仅当 $\dim_{\mathbb{C}}(V)=\dim_{\mathbb{C}}(W)$.

本文结构如下. 第 2 节对复 Banach 空间 X 上的可数 sofic 群 G 的等距线性作用 $G\curvearrowright X$ 提出了一个维数 $\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright X)$. 第 3 节建立了 $\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright X)$ 的一些基本的性质. 第 4 节证明了如果 X 是一个复 Banach 空间, G 是一个可数顺从群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G\curvearrowright X$, 那么 $\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright X)=\mathrm{vdim}(G\curvearrowright X)$. 第 5 节计算了可数无限 sofic 群 G 作用下的紧的等距线性作用 $G\curvearrowright X$ 的维数 $\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright X)$. 第 6 节对所有的 $1\le p\le 2$ 计算了 $\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n})$. 第 7 节在可数 sofic 群的情形回答了 Gromov 提出的一个问题.

2 不变量的定义

记 $\mathbb{N}^*$ 为正整数的全体, $|F|$ 为集合 F 的基数. 对 $d\in\mathbb{N}^*$, 我们记 $[d]$ 为集合 $\{1,\ldots,d\}$, 记 $\mathrm{Sym}(d)$ 为 $[d]$ 的置换群.

定义 2.1 一个可数群 G 称为是顺从的, 如果对 G 的任意非空有限子集 K 和任意的 $\varepsilon>0$, 存在 G 的一个非空有限子集 F, 使得 $|KF\backslash F|<\varepsilon|F|$. 等价地, G 有一个左的 Følner 序列

$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, 亦即每个 F_n 是 G 的一个非空有限子集且对每个 $s\in G$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|sF_n\backslash F_n|}{|F_n|}=0.$$

有关顺从群的详细介绍请参考文献 [2].

下面列举一些顺从群的例子和非顺从群的例子.

例 2.2 (1) 每个有限群都是顺从群.

(2) 每个可数交换群都是顺从群.

(3) 每个可数可解群都是顺从群.

(4) 由 n $(n\geq 2)$ 个元素所生成的自由群 $\mathbb{F}_n$ 不是顺从群.

定义 2.3 一个可数群 G 称为是剩余有限的, 如果对于任意的 $s\neq t\in G$, 存在一个有限群 H 和一个同态 $\varphi: G\to H$, 使得 $\varphi(s)\neq\varphi(t)$.

有关剩余有限群的详细介绍请参考文献 [2].

下面列举一些剩余有限群的例子和非剩余有限群的例子.

例 2.4 (1) 每个有限群都是剩余有限群.

(2) 每个有限生成的交换群都是剩余有限群.

(3) 由 n $(n\geq 2)$ 个元素所生成的自由群 $\mathbb{F}_n$ 是剩余有限群.

(4) 有理数加群 $(\mathbb{Q},+)$ 不是剩余有限群.

Gottschalk 在文 [3] 中提出了一个公开问题: 是不是每个可数群都为 surjunctive 群? 有关 surjunctive 群的具体定义请参考文献 [2]. 为了研究这个问题, Gromov 在文 [5] 中引入了 sofic 群的概念, 同时他证明了每个可数 sofic 群是 surjunctive 群.

定义 2.5 一个可数群 G 称为是 sofic 群, 如果存在 G 的一个 sofic 逼近序列 $\Sigma=\{\sigma_i: G\to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$, 亦即下述三个条件都满足:

(1) 对任意的 $s,t\in G$, 有 $\lim_{i\to\infty}\frac{|\{a\in[d_i]:\sigma_i(s)\sigma_i(t)(a)=\sigma_i(st)(a)\}|}{d_i}=1$;

(2) 对任意不同的 $s,t\in G$, 有 $\lim_{i\to\infty}\frac{|\{a\in[d_i]:\sigma_i(s)(a)=\sigma_i(t)(a)\}|}{d_i}=0$;

(3) $\lim_{i\to\infty}d_i=+\infty$.

有关 sofic 群的详细介绍请参考文献 [2, 9, 12, 13].

下面列举一些 sofic 群的例子.

例 2.6 (1) 每个有限群都是 sofic 群.

(2) 每个可数无限顺从群都是 sofic 群.

设 G 是一个可数无限顺从群, 从而 G 有一个左的 Følner 序列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$. 对于每个 $s\in G$ 和 $n\in\mathbb{N}^*$, 我们选取一个双射 $\tau_n(s): F_n\backslash s^{-1}F_n\to F_n\backslash sF_n$. 定义映射 $\sigma_n: G\to \mathrm{Sym}(F_n)$ 如下:

$$\sigma_n(s)(t)=\begin{cases} st, & t\in F_n\cap s^{-1}F_n,\\ \tau_n(s)(t), & t\in F_n\backslash s^{-1}F_n.\end{cases}$$

于是 $\Sigma=\{\sigma_n: G\to\mathrm{Sym}(F_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 从而 G 是 sofic 群.

(3) 每个可数无限剩余有限群都是 sofic 群.

设 G 是一个可数无限剩余有限群, 从而存在一列具有有限指标的正规子群 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $H_1\supseteq\cdots H_n\supseteq\cdots$ 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty}H_n=\{e_G\}$.

定义映射 $\sigma_n : G \to \mathrm{Sym}(G/H_n)$ 如下:

$$\sigma_n(s)(tH_n) = stH_n,$$

于是 $\Sigma = \{\sigma_n : G \to \mathrm{Sym}(G/H_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 从而 G 是 sofic 群.

是否每个可数群都是 sofic 群, 这仍然是一个悬而未决的问题. 在过去的几年里, 可数顺从群作用的熵理论和平均维数理论已经被推广到可数 sofic 群的作用 [1, 6–10].

设 G 是一个可数群, $d \in \mathbb{N}^*$, σ 是一个从 G 到 $\mathrm{Sym}(d)$ 的映射, 我们把 $\sigma(s)(a)$ 记作 $\sigma_s(a)$ 或者 sa. 我们称 σ 是 G 的一个足够好的 sofic 逼近, 如果对 G 的某个大的有限子集 F 总有

(1) 对所有的 $s, t \in F$, $\frac{|\{a\in[d]:\sigma(s)\sigma(t)(a)=\sigma(st)(a)\}|}{d}$ 非常接近 1;

(2) 对所有不同的 $s, t \in F$, $\frac{|\{a\in[d]:\sigma(s)(a)=\sigma(t)(a)\}|}{d}$ 非常接近 0.

定义 2.7 设 V 是一个 Banach 空间. 设 A 是 V 的一个非空子集且 $\varepsilon > 0$, 一个非空子集 $W \subseteq V$ 称为是 ε- 包含 A, 记为 $A \subseteq_\varepsilon W$, 如果对每个 $u \in A$, 存在某个 $v \in W$, 使得 $\|u - v\| < \varepsilon$. 设 A 是 V 的一个非空有限子集, 我们记 $d_\varepsilon(A)$ 为 ε- 包含 A 的线性子空间的最小维数.

$d_\varepsilon(A)$ 是由 Voiculescu 在文 [14] 中首先引入的.

下文中, 总是假定 X 是一个复 Banach 空间, G 是一个可数 sofic 群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$. 我们固定 G 的一个 sofic 逼近序列 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$. 也固定 $\mathbb{N}^*$ 上的一个超滤子 ω, 使得 ω 是自由的, 这意味着对任意的 $j \in \mathbb{N}^*$ 有 $\{i \in \mathbb{N}^* : i \geq j\} \in \omega$. 我们记 $F(X)$ 为 X 的非空有限子集的全体, $F(G)$ 为 G 的非空有限子集的全体.

定义 2.8 设 $A, B \in F(X)$, $F \in F(G)$, $\varepsilon > 0$ 以及 $c > 0$. 设 $d \in \mathbb{N}^*$ 且 σ 是一个从 G 到 $\mathrm{Sym}(d)$ 的映射.

我们在线性空间上 X^d 赋予 l_1- 范数

$$\|(x_1, \ldots, x_d)\|_1 = \|x_1\| + \cdots + \|x_d\|.$$

对任意的 $i \in [d]$ 以及 $x \in X$, 记 $\delta_i x \in X^d$ 为在第 i 个位置取值为 x, 在其余位置取值为 0.

记 $X(F, B, \sigma)$ 为由 $\delta_j b - \delta_{sj} sb$ $(s \in F,\ j \in [d],\ b \in B)$ 所张成的线性子空间.

记 $X(F, B, c, \sigma)$ 为集合

$$\Big\{u \in X(F, B, \sigma) : \text{存在 } \alpha_{sjb} \in \mathbb{C}\ (s \in F,\ j \in [d],\ b \in B) \text{ 且 } \sum_{s\in F}\sum_{j\in[d]}\sum_{b\in B} |\alpha_{sjb}| \leq c, \text{使得}$$

$$u = \sum_{s\in F}\sum_{j\in[d]}\sum_{b\in B} \alpha_{sjb}(\delta_j b - \delta_{sj} sb)\Big\}.$$

记

$$\dim_\varepsilon(A, F, B, c, \sigma) = \inf\big\{\dim_{\mathbb{C}} U : U \text{ 是 } X^d \text{的一个线性子空间, 且满足}$$
$$\{\delta_i a : i \in [d],\ a \in A\} \subseteq_\varepsilon U + X(F, B, c, \sigma)\big\}.$$

定义 2.9 设 $A, B \in F(X)$, $F \in F(G)$, $\varepsilon > 0$ 以及 $c > 0$, 我们定义

$$\dim_{\Sigma,\omega}(A, \varepsilon \,|\, F, B, c) = \lim_{i\to\omega} \frac{\dim_\varepsilon(A, F, B, c, \sigma_i)}{d_i}.$$

定义 2.10 设 $A \in F(X)$, $\varepsilon > 0$, 我们定义

$$\dim_{\Sigma,\omega}(A, \varepsilon) = \inf_{F\in F(G)} \inf_{B\in F(X)} \inf_{c>0} \dim_{\Sigma,\omega}(A, \varepsilon \,|\, F, B, c).$$

定义 2.11 定义

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X)=\sup_{A\in F(X)}\sup_{\varepsilon>0}\dim_{\Sigma,\omega}(A,\varepsilon).$$

如果这个等距线性作用 $G\curvearrowright X$ 需要被强调, 那么我们把 $\dim_{\Sigma,\omega}(X)$ 记为 $\dim_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright X)$.

定义 2.12 设 Y 是 X 的一个线性子空间. 定义

$$\dim_{\Sigma,\omega}(Y\,|\,X)=\sup_{A\in F(Y)}\sup_{\varepsilon>0}\inf_{F\in F(G)}\inf_{B\in F(X)}\inf_{c>0}\lim_{i\to\omega}\frac{\dim_{\varepsilon}(A,F,B,c,\sigma_i)}{d_i}.$$

3 $\dim_{\Sigma,\omega}(X)$ 的主要性质

我们证明的第一条性质是在具有稠密值域的 G- 同变的有界线性映射下维数是减少的.

命题 3.1 设 X,Y 是两个复 Banach 空间. 设 G 是一个可数 sofic 群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G\curvearrowright X$, 在 Y 上也有一个等距的线性作用 $G\curvearrowright Y$. 设 $\Sigma=\{\sigma_i:G\to\mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列. 假设存在一个 G- 同变的有界线性映射 $T:X\to Y$ 且具有稠密的值域, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(Y)\le\dim_{\Sigma,\omega}(X).$$

证明 设 $A\in F(Y)$ 且 $\varepsilon>0$. 我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(A,(\|T\|+1)\varepsilon)\le\dim_{\Sigma,\omega}(X).$$

由于 $T(X)$ 在 Y 中是稠密的, 我们可以找到某个 $B\in F(X)$, 使得对每个 $y\in A$ 存在某个 $x\in B$, 使得 $\|y-T(x)\|<\varepsilon$. 我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(A,(\|T\|+1)\varepsilon)\le\dim_{\Sigma,\omega}(B,\varepsilon).$$

设 $F\in F(G),D\in F(X)$ 且 $c>0$. 我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(A,(\|T\|+1)\varepsilon\,|\,F,T(D),c)\le\dim_{\Sigma,\omega}(B,\varepsilon\,|\,F,D,c).$$

设 $d\in\mathbb{N}^*$ 且 σ 是一个从 G 到 $\mathrm{Sym}(d)$ 的映射. 我们只需证明

$$\dim_{(\|T\|+1)\varepsilon}(A,F,T(D),c,\sigma)\le\dim_{\varepsilon}(B,F,D,c,\sigma).$$

设 $\widetilde{T}:X^d\to Y^d$ 定义为

$$\widetilde{T}(x_1,\dots,x_d)=(T(x_1),\dots,T(x_d)).$$

注意到 $\widetilde{T}$ 是有界的且 $\|\widetilde{T}\|\le\|T\|$. 设 $U\subseteq X^d$ 是一个线性子空间且满足 $\{\delta_ib:i\in[d],\,b\in B\}\subseteq_{\varepsilon}U+X(F,D,c,\sigma)$ 以及

$$\dim_{\mathbb{C}}U=\dim_{\varepsilon}(B,F,D,c,\sigma).$$

从而

$$\{\delta_ia:i\in[d],\,a\in A\}\subseteq_{(\|T\|+1)\varepsilon}\widetilde{T}(U)+Y(F,T(D),c,\sigma).$$

所以

$$\dim_{(\|T\|+1)\varepsilon}(A,F,T(D),c,\sigma)\le\dim_{\varepsilon}(B,F,D,c,\sigma).$$

证毕.

推论 3.2 设 X, Y 是两个复 Banach 空间. 设 G 是一个可数 sofic 群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$, 在 Y 上也有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright Y$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列. 假设存在一个线性 G- 同变的同胚映射 $T : X \to Y$, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) = \dim_{\Sigma,\omega}(Y).$$

证明 由命题 3.1 直接得到. 证毕.

推论 3.3 设 X 是一个复 Hilbert 空间. 设 G 是一个可数 sofic 群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列. 设 $Y \subseteq X$ 是一个闭的 G- 不变线性子空间, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(Y) \leq \dim_{\Sigma,\omega}(X).$$

证明 设 $P : X \to Y$ 为由 X 到 Y 上的正交投影算子. 注意到 P 是有界的、满的、G- 同变的. 由命题 3.1 有

$$\dim_{\Sigma,\omega}(Y) \leq \dim_{\Sigma,\omega}(X).$$

证毕.

接下来汇总一些 $\dim_{\Sigma,\omega}(X)$ 的基本性质.

命题 3.4 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个可数 sofic 群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则下述事实是成立的:

(1) 如果 Y_1, Y_2 是 X 的两个线性子空间且 $Y_1 \subseteq Y_2$, 那么

$$\dim_{\Sigma,\omega}(Y_1 \,|\, X) \leq \dim_{\Sigma,\omega}(Y_2 \,|\, X).$$

(2) 如果 Y_1, Y_2 是 X 的两个线性子空间, 那么

$$\dim_{\Sigma,\omega}(Y_1 + Y_2 \,|\, X) \leq \dim_{\Sigma,\omega}(Y_1 \,|\, X) + \dim_{\Sigma,\omega}(Y_2 \,|\, X).$$

(3) 如果 Y 是 X 的一个闭的 G- 不变的线性子空间, 那么

$$\dim_{\Sigma,\omega}(Y \,|\, X) \leq \dim_{\Sigma,\omega}(Y).$$

(4) 如果 $\{X_j\}_{j \in J}$ 是一个由 X 的线性子空间构成的单调增加的网, 那么

$$\dim_{\Sigma,\omega}\left(\bigcup_{j \in J} X_j \,\middle|\, X \right) = \sup_{j \in J} \dim_{\Sigma,\omega}(X_j \,|\, X).$$

接下来证明维数在直和下是次可加的.

命题 3.5 设 X, Y 是两个复 Banach 空间. 设 G 是一个可数 sofic 群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$, 在 Y 上也有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright Y$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X \oplus Y) \leq \dim_{\Sigma,\omega}(X) + \dim_{\Sigma,\omega}(Y).$$

证明 设 $A \in F(X \oplus Y)$ 且 $\varepsilon > 0$. 我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(A, \varepsilon) \leq \dim_{\Sigma,\omega}(X) + \dim_{\Sigma,\omega}(Y).$$

设 $\pi_1: X\oplus Y\to X$ 定义为 $\pi_1(x,y)=x$. 设 $\pi_2: X\oplus Y\to Y$ 定义为 $\pi_2(x,y)=y$. 我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(A,\varepsilon)\leq \dim_{\Sigma,\omega}\Big(\pi_1(A),\frac{\varepsilon}{2}\Big)+\dim_{\Sigma,\omega}\Big(\pi_2(A),\frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

设 $F_1,F_2\in F(G), B_1\in F(X), B_2\in F(Y)$ 且 $c_1,c_2>0$. 我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(A,\varepsilon)\leq \dim_{\Sigma,\omega}\Big(\pi_1(A),\frac{\varepsilon}{2}\,\Big|\,F_1,B_1,c_1\Big)+\dim_{\Sigma,\omega}\Big(\pi_2(A),\frac{\varepsilon}{2}\,\Big|\,F_2,B_2,c_2\Big).$$

设 $l_1: X\to X\oplus Y$ 定义为 $l_1(x)=(x,0)$. 设 $l_2: Y\to X\oplus Y$ 定义为 $l_2(y)=(0,y)$. 我们只需证明

$$\begin{aligned}&\dim_{\Sigma,\omega}(A,\varepsilon\,|\,F_1\cup F_2,l_1(B_1)\cup l_2(B_2),c_1+c_2)\\ &\quad\leq \dim_{\Sigma,\omega}\Big(\pi_1(A),\frac{\varepsilon}{2}\,\Big|\,F_1,B_1,c_1\Big)+\dim_{\Sigma,\omega}\Big(\pi_2(A),\frac{\varepsilon}{2}\,\Big|\,F_2,B_2,c_2\Big).\end{aligned}$$

设 $d\in\mathbb{N}^*$ 且 σ 是一个从 G 到 $\mathrm{Sym}(d)$ 的映射. 我们只需证明

$$\begin{aligned}&\dim_{\varepsilon}(A,F_1\cup F_2,l_1(B_1)\cup l_2(B_2),c_1+c_2,\sigma)\\ &\quad\leq \dim_{\frac{\varepsilon}{2}}(\pi_1(A),F_1,B_1,c_1,\sigma)+\dim_{\frac{\varepsilon}{2}}(\pi_2(A),F_2,B_2,c_2,\sigma).\end{aligned}$$

设 $\widetilde{l_1}: X^d\to(X\oplus Y)^d$ 定义为 $\widetilde{l_1}(x_1,\dots,x_d)=(l_1(x_1),\dots,l_1(x_d))$. 再设 $\widetilde{l_2}: Y^d\to(X\oplus Y)^d$ 定义为 $\widetilde{l_2}(y_1,\dots,y_d)=(l_2(y_1),\dots,l_2(y_d))$. 又设 $U\subseteq X^d$ 是一个线性子空间且满足 $\{\delta_i x: i\in[d],\ x\in\pi_1(A)\}\subseteq_{\frac{\varepsilon}{2}} U+X(F_1,B_1,c_1,\sigma)$ 以及

$$\dim_{\mathbb{C}}U=\dim_{\frac{\varepsilon}{2}}(\pi_1(A),F_1,B_1,c_1,\sigma).$$

设 $V\subseteq Y^d$ 是一个线性子空间且满足 $\{\delta_i y: i\in[d],\ y\in\pi_2(A)\}\subseteq_{\frac{\varepsilon}{2}} V+Y(F_2,B_2,c_2,\sigma)$ 以及

$$\dim_{\mathbb{C}}V=\dim_{\frac{\varepsilon}{2}}(\pi_2(A),F_2,B_2,c_2,\sigma).$$

从而

$$\{\delta_i\zeta: i\in[d],\zeta\in A\}\subseteq_{\varepsilon}\widetilde{l_1}(U)+\widetilde{l_2}(V)+(X\oplus Y)(F_1\cup F_2,l_1(B_1)\cup l_2(B_2),c_1+c_2,\sigma).$$

所以

$$\begin{aligned}&\dim_{\varepsilon}(A,F_1\cup F_2,l_1(B_1)\cup l_2(B_2),c_1+c_2,\sigma)\\ &\quad\leq \dim_{\frac{\varepsilon}{2}}(\pi_1(A),F_1,B_1,c_1,\sigma)+\dim_{\frac{\varepsilon}{2}}(\pi_2(A),F_2,B_2,c_2,\sigma).\end{aligned}$$

证毕.

推论 3.6 设 X 是一个复 Hilbert 空间. 设 G 是一个可数 sofic 群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G\curvearrowright X$. 设 $\Sigma=\{\sigma_i: G\to\mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列. 设 $Y\subseteq X$ 是一个闭 G- 不变线性子空间, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X)\leq\dim_{\Sigma,\omega}(Y)+\dim_{\Sigma,\omega}(X/Y).$$

证明 由命题 3.5 有

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X)\leq\dim_{\Sigma,\omega}(Y)+\dim_{\Sigma,\omega}(Y^{\perp}),$$

这里 $Y^{\perp}$ 代表 Y 的正交补.

由于 $Y^{\perp}$ 和 X/Y 是 G- 同构的, 由推论 3.2 有

$$\dim_{\Sigma,\omega}(Y^{\perp})=\dim_{\Sigma,\omega}(X/Y).$$

所以

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) \leq \dim_{\Sigma,\omega}(Y) + \dim_{\Sigma,\omega}(X/Y).$$

证毕.

最后给出 $\dim_{\Sigma,\omega}(X)$ 的一些有用的界, 这可以帮助我们随后计算一些具体的例子.

命题 3.7 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个可数 sofic 群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) \geq \sup_{A\in F(X)} \sup_{\varepsilon>0} \inf_{F\in F(G)} \inf_{B\in F(X)} \lim_{i\to\omega} \frac{d_\varepsilon(\{\delta_j a + X(F,B,\sigma_i) : j\in[d_i],\, a\in A\})}{d_i}.$$

证明 这是显然的. 证毕.

命题 3.8 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个可数 sofic 群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列. 假设 S 是 X 的一个非空有限子集且动力生成了 X, 亦即 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{gx : g\in G,\, x\in S\}$ 在 X 中是稠密的, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) \leq |S|.$$

证明 记 $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. 设 $\theta > 0$. 我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) \leq n + \theta.$$

设 $A \in F(X)$ 且 $\varepsilon > 0$. 我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(A, 2\varepsilon) \leq n + \theta.$$

选取 $0 < \tau < 1$ 且 $\tau \cdot |A| \leq \theta$. 记 $A = \{f_1, \ldots, f_m\}$. 对每个 $1 \leq k \leq m$, 存在 $\alpha_{kvl} \in \mathbb{C}$ 以及 $g_{kvl} \in G$ $(1 \leq l \leq q_{kv}, 1 \leq v \leq n)$, 使得

$$\left\| f_k - \sum_{v=1}^{n} \sum_{l=1}^{q_{kv}} \alpha_{kvl} g_{kvl} x_v \right\| < \varepsilon.$$

记 $h_k = \sum_{v=1}^{n} \sum_{l=1}^{q_{kv}} \alpha_{kvl} g_{kvl} x_v$, 则 $\|f_k - h_k\| < \varepsilon$. 记 $B = \{h_1, \ldots, h_m\}$.

记 $F = \{g_{kvl} \,|\, 1 \leq l \leq q_{kv}, 1 \leq v \leq n, 1 \leq k \leq m\}$. 我们可以找到 $c > 0$, 使得

$$\max_{1\leq k\leq m} \sum_{v=1}^{n} \sum_{l=1}^{q_{kv}} |\alpha_{kvl}| \leq c.$$

我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(A, 2\varepsilon \,|\, F, S, c) \leq n + \theta.$$

设 $\sigma : G \to \mathrm{Sym}(d)$ 是 G 的一个足够好的 sofic 逼近, 使得 $|W| \geq (1-\tau)d$, 这里

$$W = \{i \in [d] : \text{对} s \in F \cup \{e_G\} \text{有} \sigma_s \sigma_{s^{-1}}(i) = \sigma_{e_G}(i) = i\}.$$

我们只需证明

$$\frac{\dim_{2\varepsilon}(A, F, S, c, \sigma)}{d} \leq n + \theta.$$

由于 $\dim_{2\varepsilon}(A, F, S, c, \sigma) \leq \dim_{\varepsilon}(B, F, S, c, \sigma)$, 我们只需证明

$$\frac{\dim_{\varepsilon}(B, F, S, c, \sigma)}{d} \leq n + \theta.$$

注意到

$$\begin{aligned}\dim_\varepsilon(B,F,S,c,\sigma) &\le \inf\{\dim_{\mathbb{C}}U:\{\delta_i a: i\in W,\, a\in B\}\subseteq_\varepsilon U+X(F,S,c,\sigma)\}\\ &\quad+\inf\{\dim_{\mathbb{C}}U:\{\delta_i a: i\in [d]\backslash W,\, a\in B\}\subseteq_\varepsilon U+X(F,S,c,\sigma)\}\\ &\le \inf\{\dim_{\mathbb{C}}U:\{\delta_i a: i\in W,\, a\in B\}\subseteq_\varepsilon U+X(F,S,c,\sigma)\}+d\theta.\end{aligned}$$

我们只需证明

$$\inf\{\dim_{\mathbb{C}}U:\{\delta_i a: i\in W,\, a\in B\}\subseteq_\varepsilon U+X(F,S,c,\sigma)\}\le dn.$$

我们声称

$$\{\delta_i a: i\in W,\, a\in B\}\subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_i x: i\in[d],\, x\in S\}+X(F,S,c,\sigma).$$

对任意的 $i\in W$ 以及 $1\le k\le m$, 有

$$\begin{aligned}\delta_i h_k &= \delta_i\bigg(\sum_{v=1}^{n}\sum_{l=1}^{q_{kv}}\alpha_{kvl}g_{kvl}x_v\bigg)\\ &=\sum_{v=1}^{n}\sum_{l=1}^{q_{kv}}\alpha_{kvl}\delta_i g_{kvl}x_v=\sum_{v=1}^{n}\sum_{l=1}^{q_{kv}}\alpha_{kvl}\delta_{\sigma_{g_{kvl}}\sigma_{g_{kvl}^{-1}}(i)}g_{kvl}x_v\\ &=\sum_{v=1}^{n}\sum_{l=1}^{q_{kv}}\alpha_{kvl}\big(\delta_{\sigma_{g_{kvl}}\sigma_{g_{kvl}^{-1}}(i)}g_{kvl}x_v-\delta_{\sigma_{g_{kvl}^{-1}}(i)}x_v\big)+\sum_{v=1}^{n}\sum_{l=1}^{q_{kv}}\alpha_{kvl}\delta_{\sigma_{g_{kvl}^{-1}}(i)}x_v.\end{aligned}$$

注意到

$$\delta_i h_k\in \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_i x: i\in[d],\, x\in S\}+X(F,S,c,\sigma).$$

这就证明了

$$\{\delta_i a: i\in W,\, a\in B\}\subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_i x: i\in[d],\, x\in S\}+X(F,S,c,\sigma).$$

所以

$$\inf\{\dim_{\mathbb{C}}U:\{\delta_i a: i\in W,\, a\in B\}\subseteq_\varepsilon U+X(F,S,c,\sigma)\}\le dn.$$

证毕.

4 可数顺从群的情形

本节假定 X 是一个复 Banach 空间, G 是一个可数顺从群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G\curvearrowright X$.

先回顾一下 Voiculescu 在文 [14] 中提出的维数 $\operatorname{vdim}(X)$.

对 $K\in F(G)$ 以及 $\delta>0$, 记 $B(K,\delta)=\{F\in F(G):|KF\backslash F|<\delta|F|\}$. 设 $\varphi:F(G)\to\mathbb{R}$ 是一个实值函数, 我们称当 $F\in F(G)$ 越来越左不变时, $\varphi(F)$ 收敛于 $c\in\mathbb{R}$, 记为 $\lim_F\varphi(F)=c$, 如果对任意的 $\varepsilon>0$ 存在某个 $K\in F(G)$ 以及 $\delta>0$, 使得对任意的 $F\in B(K,\delta)$, 有

$$|\varphi(F)-c|<\varepsilon.$$

下述次可加结果是有名的 Ornstein–Weiss 引理 [11].

命题 4.1 如果 $\varphi: F(G)\to\mathbb{R}$ 是一个实值函数且满足:

(1) 对任意的 $F\in F(G)$, 有 $0\le\varphi(F)<+\infty$;

(2) 对任意的 $F,F'\in F(G)$ 且 $F\subseteq F'$, 有 $\varphi(F)\le\varphi(F')$;

(3) 对任意的 $F\in F(G)$ 以及 $s\in G$, 有 $\varphi(Fs)=\varphi(F)$;

(4) 对任意的 $F,F'\in F(G)$ 且 $F\cap F'=\emptyset$, 有 $\varphi(F\cup F')\le\varphi(F)+\varphi(F')$,

则当 $F\in F(G)$ 越来越左不变时, $\frac{1}{|F|}\varphi(F)$ 收敛于某个极限 b.

引理 4.2 设 $A\in F(X)$ 且 $\varepsilon>0$. 定义 $\varphi_{A,\varepsilon}: F(G)\to\mathbb{R}$ 为 $\varphi_{A,\varepsilon}(F)=d_\varepsilon(F^{-1}A)$, 则下述事实是成立的:

(1) 对任意的 $F\in F(G)$, 有 $0\le\varphi_{A,\varepsilon}(F)<+\infty$;

(2) 对任意的 $F_1,F_2\in F(G)$ 且 $F_1\subseteq F_2$, 有 $\varphi_{A,\varepsilon}(F_1)\le\varphi_{A,\varepsilon}(F_2)$;

(3) 对任意的 $F\in F(G)$ 以及 $s\in G$, 有 $\varphi_{A,\varepsilon}(Fs)=\varphi_{A,\varepsilon}(F)$;

(4) 对任意的 $F_1,F_2\in F(G)$, 有 $\varphi_{A,\varepsilon}(F_1\cup F_2)\le\varphi_{A,\varepsilon}(F_1)+\varphi_{A,\varepsilon}(F_2)$.

证明 论断 (1)–(4) 是明显的. 证毕.

由命题 4.1 和引理 4.2, 我们有 $\lim_F\frac{\varphi_{A,\varepsilon}(F)}{|F|}$ 存在.

定义 4.3 设 $A\in F(X)$ 且 $\varepsilon>0$, 我们定义

$$\mathrm{vdim}(A,\varepsilon)=\lim_F\frac{d_\varepsilon(F^{-1}A)}{|F|},\quad \mathrm{vdim}(X)=\sup_{A\in F(X)}\sup_{\varepsilon>0}\mathrm{vdim}(A,\varepsilon).$$

如果这个等距线性作用 $G\curvearrowright X$ 需要被强调, 那么我们把 $\mathrm{vdim}(X)$ 记作 $\mathrm{vdim}(G\curvearrowright X)$.

本节证明对可数顺从群 G 的等距线性作用 $G\curvearrowright X$, $\dim_{\Sigma,\omega}(X)$ 和 Voiculescu 维数 $\mathrm{vdim}(X)$ 是相等的.

定理 4.4 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个可数顺从群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G\curvearrowright X$. 设 $\Sigma=\{\sigma_i: G\to\mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^\infty$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X)=\mathrm{vdim}(X).$$

定理 4.4 可以由命题 4.9 以及 4.15 直接得到.

我们需要多次用到下述的 Rokhlin 引理.

引理 4.5[8] 设 G 是一个可数顺从群. 设 $0\le\tau<1$, $0<\eta<1$, $\delta>0$, K 是 G 的一个非空有限子集, 则存在 $l\in\mathbb{N}^*$ 以及 G 的非空有限子集 $F_1,\dots,F_l$ 且对任意的 $k=1,\dots,l$, 有 $|KF_k\backslash F_k|<\delta|F_k|$, 使得对 G 的任意足够好的 sofic 逼近 $\sigma: G\to\mathrm{Sym}(d)$ 以及每个集合 $W\subseteq[d]$, 且 $|W|\ge(1-\tau)d$, 都存在 $C_1,\dots,C_l\subseteq W$, 使得

(1) 对每个 $k=1,\dots,l$, 映射 $(s,c)\mapsto\sigma_s(c)$ 从 $F_k\times C_k$ 到 $\sigma(F_k)C_k$ 是双射;

(2) $\sigma(F_1)C_1,\dots,\sigma(F_l)C_l$ 是两两互不相交且 $|\bigcup_{k=1}^l\sigma(F_k)C_k|\ge(1-\tau-\eta)d$.

注 4.6 设 G 是一个有限群. 注意到满足 $|GF\backslash F|<\frac{1}{|G|}|F|$ 的唯一非空有限子集 F 是 G. 由引理 4.5 我们可以推出下述的结论: 设 $0\le\tau<1$ 且 $0<\eta<1$, 则对 G 的任意足够好的 sofic 逼近 $\sigma: G\to\mathrm{Sym}(d)$ 以及每个集合 $W\subseteq[d]$ 且 $|W|\ge(1-\tau)d$, 存在 $C\subseteq W$, 使得映射 $(s,c)\mapsto\sigma_s(c)$ 从 $G\times C$ 到 $\sigma(G)C$ 是双射且 $|\sigma(G)C|\ge(1-\tau-\eta)d$.

我们首先对可数无限顺从群 G 证明 $\dim_{\Sigma,\omega}(X)=\mathrm{vdim}(X)$.

引理 4.7 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个可数顺从群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) \leq \mathrm{vdim}(X).$$

证明 设 $\theta > 0$. 我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) \leq \mathrm{vdim}(X) + 2\theta.$$

设 $A \in F(X)$ 且 $\varepsilon > 0$. 我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(A,\varepsilon) \leq \mathrm{vdim}(A,\varepsilon) + 2\theta.$$

选取 G 的一个非空有限子集 K 以及 $\delta > 0$, 使得对 G 的任意非空有限子集 F' 且 $|KF' \backslash F'| < \delta|F'|$, 有

$$\frac{d_\varepsilon(F'^{-1}A)}{|F'|} \leq \mathrm{vdim}(A,\varepsilon) + \theta.$$

选取 $0 < \tau < 1$ 且 $\tau \cdot |A| \leq \theta$. 由引理 4.5, 存在 $l \in \mathbb{N}^*$ 以及 G 的非空有限子集 $F_1, \ldots, F_l$, 且对任意的 $k = 1, \ldots, l$ 有 $|KF_k \backslash F_k| < \delta|F_k|$, 使得对 G 的任意足够好的 sofic 逼近 $\sigma : G \to \mathrm{Sym}(d)$ 以及每个集合 $W \subseteq [d]$ 且 $|W| \geq (1 - \frac{\tau}{2})d$, 都存在 $C_1, \ldots, C_l \subseteq W$, 使得

(1) 对每个 $k = 1, \ldots, l$, 映射 $(s, c) \mapsto \sigma_s(c)$ 从 $F_k \times C_k$ 到 $\sigma(F_k)C_k$ 是双射;

(2) $\sigma(F_1)C_1, \ldots, \sigma(F_l)C_l$ 两两互不相交且 $|\bigcup_{k=1}^{l} \sigma(F_k)C_k| \geq (1 - \tau)d$.

记 $F = \bigcup_{k=1}^{l} F_k$ 以及 $B = \bigcup_{k=1}^{l} F_k^{-1}A$. 设 $\sigma : G \to \mathrm{Sym}(d)$ 是 G 的一个足够好的 sofic 逼近, 则我们可以找到以上的 $C_1, \ldots, C_l \subseteq [d]$.

我们只需证明

$$\frac{\dim_\varepsilon(A, F, B, 1, \sigma)}{d} \leq \mathrm{vdim}(A,\varepsilon) + 2\theta.$$

记 $Z = [d] \backslash \bigcup_{k=1}^{l} \sigma(F_k)C_k$, 则 $|Z| \leq \tau d$.

对每个 $m \in \{1, \ldots, d\}$, 设 $l_m : X \to X^d$ 定义为 $l_m(x) = \delta_m x$. 由于 X^d 上赋予 l_1- 范数, 从而对任意的 $m \in \{1, \ldots, d\}$ 以及 $x \in X$ 有 $\|l_m(x)\| = \|x\|$.

对任意的 $k \in \{1, \ldots, l\}$, 设 $V_k \subseteq X$ 是一个线性子空间且满足 $F_k^{-1}A \subseteq_\varepsilon V_k$ 以及 $\dim_{\mathbb{C}}(V_k) = d_\varepsilon(F_k^{-1}A)$.

我们声称

$$\{\delta_i a : i \in [d],\, a \in A\} \subseteq_\varepsilon \left(\sum_{k=1}^{l} \sum_{m \in C_k} l_m(V_k) + \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j a : j \in Z,\, a \in A\} \right) + X(F, B, 1, \sigma).$$

我们分两种情形.

情形 1 如果 $i \in Z$ 且 $x \in A$, 则 $\delta_i x \in \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j a : j \in Z,\, a \in A\}$ 且 $\|\delta_i x - \delta_i x\| = 0 < \varepsilon$.

情形 2 如果 $i \in \bigcup_{k=1}^{l} \sigma(F_k)C_k$ 且 $x \in A$, 我们可以找到一个唯一的 $n \in \{1, \ldots, l\}$, 使得 $i \in \sigma(F_n)C_n$. 于是存在 $t \in F_n$ 以及 $p \in C_n$, 使得 $i = \sigma_t(p)$.

由于 $t^{-1}x \in F_n^{-1}A$ 且 $F_n^{-1}A \subseteq_\varepsilon V_n$, 存在某个 $\nu \in V_n$, 使得 $\|t^{-1}x - \nu\| < \varepsilon$. 从而

$$\begin{aligned} \|\delta_i x - (\delta_{\sigma_t(p)} x - \delta_p t^{-1} x + l_p(\nu))\| &= \|\delta_p t^{-1} x - l_p(\nu)\| = \|l_p(t^{-1}x - \nu)\| \\ &= \|t^{-1}x - \nu\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

注意到 $\delta_{\sigma_t(p)}x-\delta_p t^{-1}x+l_p(\nu)\in\sum_{k=1}^{l}\sum_{m\in C_k}l_m(V_k)+X(F,B,1,\sigma)$. 这就证明了

$$\{\delta_i a: i\in[d],\, a\in A\}\subseteq_\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{l}\sum_{m\in C_k}l_m(V_k)+\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j a: j\in Z, a\in A\}\right)+X(F,B,1,\sigma).$$

所以

$$\begin{aligned}\dim_\varepsilon(A,F,B,1,\sigma)&\le\dim_{\mathbb{C}}\left(\sum_{k=1}^{l}\sum_{m\in C_k}l_m(V_k)+\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j a: j\in Z,\, a\in A\}\right)\\&\le\sum_{k=1}^{l}\sum_{m\in C_k}\dim_{\mathbb{C}}(V_k)+\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j a: j\in Z,\, a\in A\})\\&\le\sum_{k=1}^{l}|C_k|d_\varepsilon(F_k^{-1}A)+|Z|\cdot|A|\\&\le\sum_{k=1}^{l}|C_k|(\mathrm{vdim}(A,\varepsilon)+\theta)|F_k|+\tau\cdot|A|\cdot d\\&\le d(\mathrm{vdim}(A,\varepsilon)+\theta)+d\theta\\&=d(\mathrm{vdim}(A,\varepsilon)+2\theta).\end{aligned}$$

证毕.

引理 4.8 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个可数无限顺从群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G\curvearrowright X$. 设 $\Sigma=\{\sigma_i: G\to\mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X)\ge\mathrm{vdim}(X).$$

证明 由命题 3.7 有

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X)\ge\sup_{A\in F(X)}\sup_{\varepsilon>0}\inf_{F\in F(G)}\inf_{B\in F(X)}\lim_{i\to\omega}\frac{d_\varepsilon(\{\delta_j a+X(F,B,\sigma_i): j\in[d_i],\, a\in A\})}{d_i}.$$

我们只需证明

$$\sup_{A\in F(X)}\sup_{\varepsilon>0}\inf_{F\in F(G)}\inf_{B\in F(X)}\lim_{i\to\omega}\frac{d_\varepsilon(\{\delta_j a+X(F,B,\sigma_i): j\in[d_i],\, a\in A\})}{d_i}\ge\mathrm{vdim}(X).$$

设 $\theta>0$. 我们只需证明

$$\sup_{A\in F(X)}\sup_{\varepsilon>0}\inf_{F\in F(G)}\inf_{B\in F(X)}\lim_{i\to\omega}\frac{d_\varepsilon(\{\delta_j a+X(F,B,\sigma_i): j\in[d_i],\, a\in A\})}{d_i}\ge\mathrm{vdim}(X)-4\theta.$$

设 $A\in F(X)$ 且 $\varepsilon>0$. 我们只需证明

$$\inf_{F\in F(G)}\inf_{B\in F(X)}\lim_{i\to\omega}\frac{d_\varepsilon(\{\delta_j a+X(F,B,\sigma_i): j\in[d_i],\, a\in A\})}{d_i}\ge\mathrm{vdim}(A,\varepsilon)-4\theta.$$

设 $F\in F(G)$ 且 $B\in F(X)$. 选取 G 的一个非空有限子集 K 且 $K\supseteq F$ 以及 $\delta>0$, 使得对 G 的任意非空有限子集 F' 且 $|KF'\backslash F'|<\delta|F'|$, 有

$$\frac{d_\varepsilon(F'^{-1}A)}{|F'|}\ge\mathrm{vdim}(A,\varepsilon)-\theta.$$

选取 $0<\tau<1$, 使得 $(\mathrm{vdim}(A,\varepsilon)-\theta)(1-\tau)\ge\mathrm{vdim}(A,\varepsilon)-2\theta$ 且 $\tau\cdot|F|\cdot|B|\le\theta$.

由引理 4.5 知存在 $l \in \mathbb{N}^*$ 以及 G 的非空有限子集 $F_1, \dots, F_l$ 且对任意的 $k = 1, \dots, l$, 有 $|KF_k \backslash F_k| < \min(\delta, \tau)|F_k|$, 使得对 G 的任意足够好的 sofic 逼近 $\sigma : G \to \mathrm{Sym}(d)$, 以及每个集合 $W \subseteq [d]$ 且 $|W| \geq (1 - \frac{\tau}{2})d$, 都存在 $C_1, \dots, C_l \subseteq W$, 使得

(1) 对每个 $k = 1, \dots, l$, 映射 $(s, c) \mapsto \sigma_s(c)$ 从 $F_k \times C_k$ 到 $\sigma(F_k)C_k$ 是双射;

(2) $\sigma(F_1)C_1, \dots, \sigma(F_l)C_l$ 两两互不相交且 $|\bigcup_{k=1}^{l} \sigma(F_k)C_k| \geq (1 - \tau)d$.

设 $\sigma : G \to \mathrm{Sym}(d)$ 是 G 的一个足够好的 sofic 逼近, 使得 $|W| \geq (1 - \frac{\tau}{2})d$, 这里

$$W = \left\{ i \in [d] : \text{ 对任意的 } t \in F,\ s \in \bigcup_{k=1}^{l} F_k \text{ 有 } \sigma_t \sigma_s(i) = \sigma_{ts}(i) \right\},$$

则我们可以找到以上的 $C_1, \dots, C_l \subseteq W$.

我们只需证明

$$\frac{d_\varepsilon(\{\delta_i a + X(F, B, \sigma) : i \in [d],\ a \in A\})}{d} \geq \mathrm{vdim}(A, \varepsilon) - 4\theta.$$

记 $M = \{(s, j) \in F \times \bigcup_{k=1}^{l} \sigma(F_k)C_k : j \in \bigcup_{k=1}^{l} \sigma(F_k \cap s^{-1}F_k)C_k\}$.

记 $X^\dagger(F, B, \sigma)$ 为由 $\delta_j b - \delta_{sj} sb$ ($s \in F$, $j \in \bigcup_{k=1}^{l} \sigma(F_k)C_k$, $b \in B$) 所张成的线性子空间, $X^\ddagger(F, B, \sigma)$ 为由 $\delta_j b - \delta_{sj} sb$ ($s \in F$, $j \in [d] \backslash \bigcup_{k=1}^{l} \sigma(F_k)C_k$, $b \in B$) 所张成的线性子空间, $X^\sharp(F, B, \sigma)$ 为由 $\delta_j b - \delta_{sj} sb$ ($(s, j) \in (F \times \bigcup_{k=1}^{l} \sigma(F_k)C_k) \backslash M$, $b \in B$) 所张成的线性子空间.

论断 I

$$d_\varepsilon(\{\delta_i a + X(F, B, \sigma) : i \in [d],\ a \in A\}) \geq d_\varepsilon(\{\delta_i a + X^\dagger(F, B, \sigma) : i \in [d],\ a \in A\}) - d\theta.$$

记 $\pi_1 : X^d \to X^d / X(F, B, \sigma)$ 以及 $\pi_2 : X^d \to X^d / X^\dagger(F, B, \sigma)$ 为商映射.

设 $V \subseteq X^d / X(F, B, \sigma)$ 是一个线性子空间且满足 $\{\delta_i a + X(F, B, \sigma) : i \in [d],\ a \in A\} \subseteq_\varepsilon V$ 以及 $\dim_{\mathbb{C}} V = d_\varepsilon(\{\delta_i a + X(F, B, \sigma) : i \in [d],\ a \in A\})$, 则我们可以找到一个线性子空间 $\overline{V} \subseteq X^d$, 使得 $\pi_1(\overline{V}) = V$ 且 $\dim_{\mathbb{C}} \overline{V} = \dim_{\mathbb{C}} V$. 从而

$$\{\delta_i a + X^\dagger(F, B, \sigma) : i \in [d],\ a \in A\} \subseteq_\varepsilon \pi_2(\overline{V} + X^\ddagger(F, B, \sigma)).$$

所以

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(\{\delta_i a + X^\dagger(F, B, \sigma) : i \in [d],\ a \in A\}) &\leq \dim_{\mathbb{C}}(\overline{V} + X^\ddagger(F, B, \sigma)) \\ &\leq d_\varepsilon(\{\delta_i a + X(F, B, \sigma) : i \in [d],\ a \in A\}) + \tau \cdot |F| \cdot |B| \cdot d \\ &\leq d_\varepsilon(\{\delta_i a + X(F, B, \sigma) : i \in [d],\ a \in A\}) + d\theta. \end{aligned}$$

这就证明了论断 I.

现在我们只需证明

$$\frac{d_\varepsilon(\{\delta_i a + X^\dagger(F, B, \sigma) : i \in [d],\ a \in A\})}{d} \geq \mathrm{vdim}(A, \varepsilon) - 3\theta.$$

由于 G 是无限的, 存在映射 $\psi_k : C_k \to G$ ($k = 1, \dots, l$), 使得映射 Ψ 从 $\bigsqcup_{k=1}^{l} F_k \times C_k$ 到 G 把 $(s, c) \in F_k \times C_k$ 映为 $s\psi_k(c)$ 是单射. 记 $\widetilde{F}$ 为 Ψ 的值域. 由于对每个 $k = 1, \dots, l$, 都有 $|KF_k \backslash F_k| < \delta |F_k|$, 从而 $|K\widetilde{F} \backslash \widetilde{F}| < \delta |\widetilde{F}|$. 于是

$$\frac{d_\varepsilon(\widetilde{F}^{-1} A)}{|\widetilde{F}|} \geq \mathrm{vdim}(A, \varepsilon) - \theta.$$

论断 II

$$d_\varepsilon(\{\delta_i a + X^\dagger(F,B,\sigma) : i \in [d],\ a \in A\}) \geq d_\varepsilon(\widetilde{F}^{-1}A) - d\theta.$$

记 $\pi : X^d \to X^d/X^\dagger(F,B,\sigma)$ 为商映射.

设 $T : X^d \to X$ 定义为 $T(f) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{(s,c)\in F_k\times C_k}(s\psi_k(c))^{-1}f(\sigma_s(c))$. 由于 X^d 上赋予 l_1-范数, 从而 T 是有界的且 $\|T\| \leq 1$.

设 $U \subseteq X^d/X^\dagger(F,B,\sigma)$ 是一个线性子空间且满足 $\{\delta_i a + X^\dagger(F,B,\sigma) : i \in [d],\ a \in A\} \subseteq_\varepsilon U$ 以及 $\dim_{\mathbb{C}}U = d_\varepsilon(\{\delta_i a + X^\dagger(F,B,\sigma) : i \in [d],\ a \in A\})$, 则我们可以找到一个线性子空间 $\overline{U} \subseteq X^d$, 使得 $\pi(\overline{U}) = U$ 且 $\dim_{\mathbb{C}}\overline{U} = \dim_{\mathbb{C}}U$.

我们声称

$$\widetilde{F}^{-1}A \subseteq_\varepsilon T(\overline{U} + X^\sharp(F,B,\sigma)).$$

对任意的 $n \in \{1,\ldots,l\}$, $(t,c) \in F_n \times C_n$ 以及 $a \in A$, 存在某个 $u \in \overline{U}$, 使得

$$\|(\delta_{\sigma_t(c)}a - u) + X^\dagger(F,B,\sigma)\| < \varepsilon.$$

从而存在某个 $v \in X^\dagger(F,B,\sigma)$, 使得

$$\|\delta_{\sigma_t(c)}a - u - v\| < \varepsilon.$$

记 $v = \sum_{s\in F}\sum_{j\in\bigcup_{k=1}^{l}\sigma(F_k)C_k}\sum_{b\in B}c_{sjb}(\delta_j b - \delta_{sj}sb)$. 于是

$$\begin{aligned}&\left\|(t\psi_n(c))^{-1}a - T\left(u + \sum_{(s,j)\in(F\times\bigcup_{k=1}^{l}\sigma(F_k)C_k)\setminus M}\ \sum_{b\in B}c_{sjb}(\delta_j b - \delta_{sj}sb)\right)\right\|\\ &\quad= \|(t\psi_n(c))^{-1}a - T(u+v)\| = \|T(\delta_{\sigma_t(c)}a - u - v)\|\\ &\quad\leq \|\delta_{\sigma_t(c)}a - u - v\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

注意到

$$u + \sum_{(s,j)\in(F\times\bigcup_{k=1}^{l}\sigma(F_k)C_k)\setminus M}\ \sum_{b\in B}c_{sjb}(\delta_j b - \delta_{sj}sb) \in \overline{U} + X^\sharp(F,B,\sigma).$$

这就证明了

$$\widetilde{F}^{-1}A \subseteq_\varepsilon T(\overline{U} + X^\sharp(F,B,\sigma)).$$

于是

$$\begin{aligned}d_\varepsilon(\widetilde{F}^{-1}A) &\leq \dim_{\mathbb{C}}\overline{U} + \dim_{\mathbb{C}}(X^\sharp(F,B,\sigma))\\ &= d_\varepsilon(\{\delta_i a + X^\dagger(F,B,\sigma) : i \in [d],\ a \in A\}) + \dim_{\mathbb{C}}(X^\sharp(F,B,\sigma)).\end{aligned}$$

对每个 $s \in F$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{k=1}^{l}\sigma(F_k)C_k\right| - \left|\bigcup_{k=1}^{l}\sigma(F_k\cap s^{-1}F_k)C_k\right| &= \left|\bigcup_{k=1}^{l}\sigma(F_k\backslash s^{-1}F_k)C_k\right|\\ &\leq \tau\left|\bigcup_{k=1}^{l}\sigma(F_k)C_k\right| \leq \tau d.\end{aligned}$$

从而

$$\dim_{\mathbb{C}}(X^\sharp(F,B,\sigma)) \leq \tau\cdot|F|\cdot|B|\cdot d \leq d\theta,$$

且

$$d_\varepsilon(\{\delta_i a + X^\dagger(F,B,\sigma) : i \in [d],\, a \in A\}) \geq d_\varepsilon(\widetilde{F}^{-1}A) - d\theta.$$

这就证明了论断 II.

所以

$$\begin{aligned}\frac{d_\varepsilon(\{\delta_i a + X^\dagger(F,B,\sigma) : i \in [d],\, a \in A\})}{d} &\geq \frac{d_\varepsilon(\widetilde{F}^{-1}A)}{d} - \theta = \frac{d_\varepsilon(\widetilde{F}^{-1}A)}{|\widetilde{F}|} \cdot \frac{|\widetilde{F}|}{d} - \theta \\ &\geq (\mathrm{vdim}(A,\varepsilon) - \theta)(1-\tau) - \theta \\ &\geq \mathrm{vdim}(A,\varepsilon) - 2\theta - \theta = \mathrm{vdim}(A,\varepsilon) - 3\theta.\end{aligned}$$

证毕.

命题 4.9 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个可数无限顺从群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^\infty$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) = \mathrm{vdim}(X).$$

证明 这由引理 4.7 和 4.8 得到. 证毕.

接下来对有限群 G 证明 $\dim_{\Sigma,\omega}(X) = \mathrm{vdim}(X)$.

引理 4.10[14] 设 H 是一个复 Hilbert 空间, $W = \{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 H 的一个正交规范子集且 $\varepsilon > 0$, 则 $d_\varepsilon(W) \geq n(1-\varepsilon^2)$.

引理 4.11 设 X 是一个复 Banach 空间, $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 是 X 的一个线性无关子集, 则

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} d_\varepsilon(W) = n.$$

证明 由于 $\lim_{\varepsilon\to 0+} d_\varepsilon(W) = \sup_{\varepsilon>0} d_\varepsilon(W)$, 我们只需证明 $\sup_{\varepsilon>0} d_\varepsilon(W) = n$.

用反证法, 假设 $\sup_{\varepsilon>0} d_\varepsilon(W) < n$. 由于 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(W)$ 在 X 中可补, 存在 X 的一个闭线性子空间 Z, 使得 $X = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(W) + Z$ 且 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(W) \cap Z = \{0\}$. 设 $P : X \to \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(W)$ 为沿着 Z 由 X 到 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(W)$ 上的投影算子. 注意到 P 是有界的.

容易知道存在一个常数 $C > 0$, 使得对任意的复数 $\beta_1, \ldots, \beta_n$, 有

$$|\beta_1| + \cdots + |\beta_n| \leq C\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\|.$$

设 $0 < \delta < \frac{1}{C\|P\|}$. 由于 $\sup_{\varepsilon>0} d_\varepsilon(W) < n$, 我们有 $d_\delta(W) < n$.

设 $V \subseteq X$ 是一个线性子空间且满足 $W \subseteq_\delta V$ 以及 $\dim_{\mathbb{C}}(V) = d_\delta(W)$, 则 $P(V)$ 是 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(W)$ 的一个闭的真线性子空间. 由 Riesz 引理, 存在某个 $x_\delta \in \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(W)$ 且 $\|x_\delta\| = 1$, 使得对任意的 $x \in V$, 有 $\|x_\delta - P(x)\| \geq C\|P\|\delta$.

由于 $x_\delta \in \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(W)$, 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, 使得 $x_\delta = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. 对每个 $x_i \in W$ $(1 \leq i \leq n)$, 存在某个 $y_i \in V$, 使得 $\|x_i - y_i\| < \delta$. 从而

$$\begin{aligned}\|x_\delta - P(\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)\| &= \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n - P(\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)\| \\ &= \|\alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n) - P(\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)\| \\ &< (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)\|P\|\delta \leq C\|P\|\delta.\end{aligned}$$

这和 $\|x_\delta - P(\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)\| \geq C\|P\|\delta$ 相矛盾. 所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} d_\varepsilon(W) = n.$$

证毕.

引理 4.12 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个有限群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$, 则

$$\mathrm{vdim}(X) = \begin{cases} \dfrac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}, & \text{如果 } \dim_{\mathbb{C}} X < +\infty, \\ +\infty, & \text{如果 } \dim_{\mathbb{C}} X = +\infty. \end{cases}$$

证明 我们分两种情形.

情形 1 假设 X 是有限维的.

我们先证明 $\mathrm{vdim}(X) \leq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}$. 事实上有

$$\mathrm{vdim}(X) = \sup_{A \in F(X)} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{d_\varepsilon(G^{-1}A)}{|G|} \leq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}.$$

接下来证明 $\mathrm{vdim}(X) \geq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}$. 设 H 是 X 的一个基, 则

$$\mathrm{vdim}(X) = \sup_{A \in F(X)} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{d_\varepsilon(G^{-1}A)}{|G|} \geq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{d_\varepsilon(G^{-1}H)}{|G|} \geq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{d_\varepsilon(H)}{|G|}.$$

由引理 4.11 有

$$\sup_{\varepsilon > 0} \frac{d_\varepsilon(H)}{|G|} = \frac{|H|}{|G|} = \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}.$$

所以 $\mathrm{vdim}(X) \geq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}$.

情形 2 假设 X 是无限维的.

设 $n \in \mathbb{N}^*$. 我们可以找到 X 的一个线性无关的子集 $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$. 于是

$$\mathrm{vdim}(X) = \sup_{A \in F(X)} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{d_\varepsilon(G^{-1}A)}{|G|} \geq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{d_\varepsilon(G^{-1}W)}{|G|} \geq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{d_\varepsilon(W)}{|G|}.$$

由引理 4.11 有

$$\sup_{\varepsilon > 0} \frac{d_\varepsilon(W)}{|G|} = \frac{|W|}{|G|} = \frac{n}{|G|}.$$

从而 $\mathrm{vdim}(X) = +\infty$. 证毕.

引理 4.13 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个有限群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列. 设 $Y \subseteq X$ 是一个有限维 G- 不变的线性子空间, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(Y \,|\, X) = \dim_{\Sigma,\omega}(Y).$$

证明 由命题 3.4 (3), 有 $\dim_{\Sigma,\omega}(Y \,|\, X) \leq \dim_{\Sigma,\omega}(Y)$.

我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(Y \,|\, X) \geq \dim_{\Sigma,\omega}(Y).$$

由于 Y 是有限维, 存在 X 的一个闭线性子空间 Z, 使得 $X = Y + Z$ 且 $Y \cap Z = \{0\}$.

设 $P : X \to Y$ 为沿着 Z 由 X 到 Y 上的投影算子. 注意到 P 是一个有界的线性满射.

设 $\overline{P} : X \to Y$ 定义为

$$\overline{P}(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} (s^{-1} \circ P \circ s)(x),$$

则 $\overline{P}$ 是一个 G- 同变的有界线性满射且 $\|\overline{P}\| \leq \|P\|$.

设 $A \in F(Y)$ 且 $\varepsilon > 0$. 设 $F \in F(G)$, $B \in F(X)$, $c > 0$. 设 $d \in \mathbb{N}^*$ 且 σ 是一个从 G 到 $\mathrm{Sym}(d)$ 的映射.

我们只需证明

$$\dim_\varepsilon(A, F, B, c, \sigma) \geq \dim_{(\|P\|+1)\varepsilon}(A, F, \overline{P}(B), c, \sigma).$$

设 $\widetilde{P} : X^d \to Y^d$ 定义为

$$\widetilde{P}(x_1, \dots, x_d) = (\overline{P}(x_1), \dots, \overline{P}(x_d)).$$

注意到 $\widetilde{P}$ 是有界的且 $\|\widetilde{P}\| \leq \|P\|$.

设 $U \subseteq X^d$ 是一个线性子空间且满足 $\{\delta_i a : i \in [d], a \in A\} \subseteq_\varepsilon U + X(F, B, c, \sigma)$ 以及 $\dim_{\mathbb{C}}(U) = \dim_\varepsilon(A, F, B, c, \sigma)$. 从而

$$\{\delta_i a : i \in [d], a \in A\} \subseteq_{(\|P\|+1)\varepsilon} \widetilde{P}(U) + Y(F, \overline{P}(B), c, \sigma).$$

所以

$$\dim_\varepsilon(A, F, B, c, \sigma) \geq \dim_{(\|P\|+1)\varepsilon}(A, F, \overline{P}(B), c, \sigma).$$

证毕.

引理 4.14 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个有限群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^\infty$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) = \begin{cases} \dfrac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}, & \text{如果 } \dim_{\mathbb{C}} X < +\infty, \\ +\infty, & \text{如果 } \dim_{\mathbb{C}} X = +\infty. \end{cases}$$

证明 我们分两种情形.

情形 1 假设 X 是有限维的.

我们可以假设 X 是一个复 Hilbert 空间.

先证明 $\dim_{\Sigma,\omega}(X) \leq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}$. 由引理 4.7, 有 $\dim_{\Sigma,\omega}(X) \leq \mathrm{vdim}(X)$; 由引理 4.12, 有 $\mathrm{vdim}(X) = \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}$, 从而

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) \leq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}.$$

接下来证明 $\dim_{\Sigma,\omega}(X) \geq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}$. 由命题 3.7 有

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) \geq \sup_{A \in F(X)} \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{F \in F(G)} \inf_{B \in F(X)} \lim_{i \to \omega} \frac{d_\varepsilon(\{\delta_j a + X(F, B, \sigma_i) : j \in [d_i], a \in A\})}{d_i}.$$

我们只需证明

$$\sup_{A \in F(X)} \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{F \in F(G)} \inf_{B \in F(X)} \lim_{i \to \omega} \frac{d_\varepsilon(\{\delta_j a + X(F, B, \sigma_i) : j \in [d_i], a \in A\})}{d_i} \geq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}.$$

设 Y 是 X 的一个正交规范基. 设 $\varepsilon > 0$. 设 $F \in F(G)$ 且 $B \in F(X)$. 我们只需证明

$$\lim_{i \to \omega} \frac{d_\varepsilon(\{\delta_j a + X(F, B, \sigma_i) : j \in [d_i], a \in Y\})}{d_i} \geq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}[1 - (2|G|\varepsilon)^2].$$

设 $0<\tau<1$. 由注 4.6 知对 G 的任意足够好的 sofic 逼近 $\sigma: G \to \mathrm{Sym}(d)$ 以及每个集合 $W \subseteq [d]$, 且 $|W| \geq (1-\frac{\tau}{2})d$ 存在 $C \subseteq W$, 使得映射

$$(s,c) \mapsto \sigma_s(c)$$

从 $G \times C$ 到 $\sigma(G)C$ 是双射且 $|\sigma(G)C| \geq (1-\tau)d$.

设 $\sigma: G \to \mathrm{Sym}(d)$ 是 G 的一个足够好的 sofic 逼近, 使得 $|W| \geq (1-\frac{\tau}{2})d$, 这里

$$W = \{i \in [d]: \text{ 对任意的 } s,t \in G \text{ 有 } \sigma_s\sigma_t(i) = \sigma_{st}(i)\},$$

则我们可以找到上述的 $C \subseteq W$.

我们只需证明

$$\frac{d_\varepsilon(\{\delta_i a + X(F,B,\sigma) : i \in [d],\, a \in Y\})}{d} \geq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}[1-(2|G|\varepsilon)^2].$$

注意到

$$\begin{aligned}
&d_\varepsilon(\{\delta_i a + X(F,B,\sigma) : i \in [d],\, a \in Y\}) \\
&\quad \geq d_\varepsilon(\{\delta_i a + X(F,B,\sigma) : i \in \sigma(G)C,\, a \in Y\}) \\
&\quad \geq d_\varepsilon(\{\delta_i a + X(G,B \cup GY,\sigma) : i \in \sigma(G)C,\, a \in Y\}) \\
&\quad = d_\varepsilon(\{\delta_c t^{-1} a + X(G,B \cup GY,\sigma) : t \in G,\, c \in C,\, a \in Y\}).
\end{aligned}$$

记 $X^\dagger(G,B\cup GY,\sigma)$ 为由 $\delta_j b - \delta_{sj} sb$ $(s \in G,\, j \in \sigma(G)C,\, b \in B \cup GY)$ 所张成的线性子空间. 设 $T: X^d/X(G,B\cup GY,\sigma) \to X^d/X^\dagger(G,B\cup GY,\sigma)$ 定义为

$$T(f + X(G,B\cup GY,\sigma)) = \chi_{\sigma(G)C} \cdot f + X^\dagger(G,B\cup GY,\sigma).$$

注意到 T 的定义是明确的, 此外 T 是有界的且 $\|T\| \leq 1$. 于是

$$\begin{aligned}
&d_\varepsilon(\{\delta_c t^{-1} a + X(G,B\cup GY,\sigma) : t \in G,\, c \in C,\, a \in Y\}) \\
&\quad \geq d_\varepsilon(\{\delta_c t^{-1} a + X^\dagger(G,B\cup GY,\sigma) : t \in G,\, c \in C,\, a \in Y\}).
\end{aligned}$$

设 $S: X^d/X^\dagger(G,B\cup GY,\sigma) \to X^C$ 定义为

$$S(f + X^\dagger(G,B\cup GY,\sigma)) = \frac{\sum_{s\in G}(s \circ f \circ s^{-1})|_C}{|G|}.$$

注意到 S 的定义是明确的, 此外 S 是有界的且 $\|S\| \leq 2$. 从而

$$\begin{aligned}
&d_\varepsilon(\{\delta_c t^{-1} a + X^\dagger(G,B\cup GY,\sigma) : t \in G,\, c \in C,\, a \in Y\}) \\
&\quad \geq d_{2\varepsilon}\left(\left\{\frac{\sum_{g\in G}(\delta_{gc} g t^{-1} a)|_C}{|G|} : t \in G,\, c \in C,\, a \in Y\right\}\right) \\
&\quad = d_{2\varepsilon}\left(\left\{\frac{(\delta_c t^{-1} a)|_C}{|G|} : t \in G,\, c \in C,\, a \in Y\right\}\right) \\
&\quad = d_{2|G|\varepsilon}(\{(\delta_c t^{-1} a)|_C : t \in G,\, c \in C,\, a \in Y\}) \\
&\quad \geq d_{2|G|\varepsilon}(\{(\delta_c a)|_C : c \in C,\, a \in Y\}).
\end{aligned}$$

由引理 4.10 有

$$d_{2|G|\varepsilon}(\{(\delta_c a)|_C : c \in C,\, a \in Y\}) \geq |C| \cdot \dim_{\mathbb{C}} X \cdot [1-(2|G|\varepsilon)^2].$$

所以

$$\frac{d_\varepsilon(\{\delta_i a + X(F,B,\sigma) : i \in [d],\, a \in Y\})}{d} \geq \frac{|C| \cdot \dim_{\mathbb{C}} X \cdot [1-(2|G|\varepsilon)^2]}{d}$$
$$\geq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|} \cdot [1-(2|G|\varepsilon)^2] \cdot (1-\tau).$$

从而

$$\frac{d_\varepsilon(\{\delta_i a + X(F,B,\sigma) : i \in [d],\, a \in Y\})}{d} \geq \frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{|G|}[1-(2|G|\varepsilon)^2].$$

情形 2 假设 X 是无限维的. 我们可以找到一个由 X 的线性子空间构成的单调增加的网 $\{X_j\}_{j\in J}$ 满足:

(1) 每个 X_j 是有限维的且是 G- 不变的;

(2) $\sup_{j\in J} \dim_{\mathbb{C}} X_j = +\infty$.

由命题 3.4 (1) 和 (4), 我们有 $\dim_{\Sigma,\omega}(X) \geq \sup_{j\in J} \dim_{\Sigma,\omega}(X_j \,|\, X)$; 再由引理 4.13, 我们有 $\dim_{\Sigma,\omega}(X_j \,|\, X) = \dim_{\Sigma,\omega}(X_j)$; 又由情形 1, 我们有 $\dim_{\Sigma,\omega}(X_j) = \frac{\dim_{\mathbb{C}} X_j}{|G|}$. 从而

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) = +\infty.$$

证毕.

命题 4.15 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个有限群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G \curvearrowright X$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^\infty$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) = \mathrm{vdim}(X).$$

证明 可以由引理 4.12 以及 4.14 直接得到. 证毕.

5 紧的等距线性作用

设 G 是一个可数群且 X 是一个复 Banach 空间. 一个等距线性作用 $G \curvearrowright X$ 称为是紧的, 如果对任意的 $x \in X$, 有 $\overline{\{sx : s \in G\}}$ 是紧的.

本节, 我们证明如下的结果.

命题 5.1 设 X 是一个复 Banach 空间. 设 G 是一个可数无限 sofic 群且在 X 上有一个紧的等距线性作用 $G \curvearrowright X$. 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^\infty$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X) = 0.$$

证明 设 $A \in F(X)$ 且 $\varepsilon > 0$. 我们只需证明 $\dim_{\Sigma,\omega}(A,\varepsilon) = 0$.

设 $0 < \theta < 1$. 我们只需证明 $\dim_{\Sigma,\omega}(A,\varepsilon) \leq \theta$.

由于 $G \curvearrowright X$ 是紧的, 从而 $\overline{\{sx : s \in G,\, x \in A\}}$ 是紧的. 于是存在 X 的一个有限子集 $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$, 使得 $\overline{\{sx : s \in G,\, x \in A\}} \subseteq_{\frac{\varepsilon}{5}} B$.

由于 G 是无限集, 我们可以找到某个 $F \in F(G)$, 使得 $\frac{1}{|F|} \leq \frac{\theta}{2n}$.

设 $\sigma : G \to \mathrm{Sym}(d)$ 是 G 的一个足够好的 sofic 逼近, 使得 $|D| \geq d(1-\frac{\theta}{2n})$, 这里

$$D = \{i \in [d] :\ \text{对任意不同的 } s,t \in F \text{ 有 } \sigma_s(i) \neq \sigma_t(i)\}.$$

我们只需证明

$$\frac{\dim_\varepsilon(A,F,B,2,\sigma)}{d} \leq \theta.$$

选取 $[d]$ 的一个最大子集 W, 使得 $\sigma(F)j$ $(j\in W)$ 是两两互不相交的, 则

$$|W|=|D\cap W|+|([d]\backslash D)\cap W|\leq\frac{d}{|F|}+\frac{d\theta}{2n}\leq\frac{d\theta}{n}.$$

对每个 $m\in\{1,\dots,d\}$, 设 $l_m:X\to X^d$ 定义为 $l_m(x)=\delta_m x$. 我们声称

$$\{\delta_i a:i\in[d],\,a\in A\}\subseteq_\varepsilon\sum_{m\in W}l_m(\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x_1,\dots,x_n\})+X(F,B,2,\sigma).$$

对任意的 $i\in[d]$ 以及 $a\in A$, 我们可以找到某个 $p\in W$, 使得 $\sigma(F)i\cap\sigma(F)p\neq\emptyset$. 于是存在 $s,t\in F$, 使得 $\sigma_s(i)=\sigma_t(p)$. 注意到

$$\begin{aligned}\delta_i a&=(\delta_i a-\delta_{\sigma_s(i)}sa)+\delta_{\sigma_s(i)}sa\\&=(\delta_i a-\delta_{\sigma_s(i)}sa)+\delta_{\sigma_t(p)}sa\\&=(\delta_i a-\delta_{\sigma_s(i)}sa)+(\delta_{\sigma_t(p)}tt^{-1}sa-\delta_p t^{-1}sa)+\delta_p t^{-1}sa.\end{aligned}$$

由于 $\overline{\{sx:s\in G,\,x\in A\}}\subseteq_{\frac{\varepsilon}{5}}\{x_1,\dots,x_n\}$, 从而存在 $1\leq j,k\leq n$, 使得 $\|a-x_j\|<\frac{\varepsilon}{5}$ 以及 $\|t^{-1}sa-x_k\|<\frac{\varepsilon}{5}$. 故

$$\|\delta_i a-[(\delta_i x_j-\delta_{\sigma_s(i)}sx_j)+(\delta_{\sigma_t(p)}tx_k-\delta_p x_k)+\delta_p x_k]\|<\varepsilon.$$

注意到

$$(\delta_i x_j-\delta_{\sigma_s(i)}sx_j)+(\delta_{\sigma_t(p)}tx_k-\delta_p x_k)\in X(F,B,2,\sigma)$$

且

$$\delta_p x_k\in\sum_{m\in W}l_m(\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x_1,\dots,x_n\}).$$

这就证明了

$$\{\delta_i a:i\in[d],\,a\in A\}\subseteq_\varepsilon\sum_{m\in W}l_m(\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x_1,\dots,x_n\})+X(F,B,2,\sigma).$$

所以

$$\dim_\varepsilon(A,F,B,2,\sigma)\leq\dim_{\mathbb{C}}\left(\sum_{m\in W}l_m(\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x_1,\dots,x_n\})\right)\leq d\theta.$$

证毕.

推论 5.2 设 X 是一个有限维的复 Banach 空间. 设 G 是一个可数无限 sofic 群且在 X 上有一个等距的线性作用 $G\curvearrowright X$. 设

$$\Sigma=\{\sigma_i:G\to\mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^\infty$$

是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X)=0.$$

证明 由于 X 是有限维的, 从而对任意的 $x\in X$ 有 $\overline{\{sx:s\in G\}}$ 是紧的, 这表明等距线性作用 $G\curvearrowright X$ 是紧的. 由命题 5.1 知

$$\dim_{\Sigma,\omega}(X)=0.$$

证毕.

6 $\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(G \curvearrowright l^p(G,V))$ 的计算

本节设 G 是一个可数 sofic 群, V 是一个有限维的复 Banach 空间. G 在 $l^p(G,V)$ 上有一个自然的左平移作用: 对 $s\in G$ 以及 $f\in l^p(G,X)$, 定义 $sf\in l^p(G,X)$ 为 $(sf)(t)=f(s^{-1}t)$ $(t\in G)$.

下面将对所有的 $1\le p\le 2$ 计算 $\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^p(G,V))$.

设 $n=\mathrm{dim}_{\mathbb{C}}(V)$. 由于 $l^p(G,V)$ 和 $l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n}$ 是 G- 同构的, 所以我们只需计算 $\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n})$.

对 $s\in G$, 设 $\gamma_s\in\mathbb{C}^G$ 定义为

$$\gamma_s(t)=\begin{cases}1, & t=s,\\ 0, & t\neq s.\end{cases}$$

引理 6.1 设 G 是一个可数 sofic 群且 $\Sigma=\{\sigma_i:G\to\mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则对任意的 $1\le p<+\infty$, 有

$$\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n})\le n.$$

证明 由于 $\{\delta_i\gamma_{e_G}:i\in[n]\}$ 动力生成了 $l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n}$, 由命题 3.8 有

$$\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n})\le n.$$

证毕.

命题 6.2 设 G 是一个可数 sofic 群且 $\Sigma=\{\sigma_i:G\to\mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列, 则对任意的 $1\le p\le 2$, 有

$$\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n})=n.$$

证明 由引理 6.1 有 $\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n})\le n$. 我们只需证明

$$\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n})\ge n.$$

设 $I:l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n}\to l^2(G,\mathbb{C})^{\oplus n}$ 定义为 $I(f_1,\dots,f_n)=(f_1,\dots,f_n)$. 注意到 I 是 G- 同变的, 线性有界且有稠密的值域.

由命题 3.1 有

$$\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^p(G,\mathbb{C})^{\oplus n})\ge\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^2(G,\mathbb{C})^{\oplus n}).$$

我们只需证明 $\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(G\curvearrowright l^2(G,\mathbb{C})^{\oplus n})\ge n$.

设 $\varepsilon>0$. 我们只需证明

$$\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(\{\delta_a\gamma_{e_G}:a\in[n]\},\varepsilon)\ge n(1-4\varepsilon^2).$$

设 $F\in F(G)$ 且 $e_G\in F$, $B\in F(l^2(G,\mathbb{C})^{\oplus n})$ 以及 $c>0$. 我们只需证明

$$\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(\{\delta_a\gamma_{e_G}:a\in[n]\},\varepsilon\,|\,F,B,c)\ge n(1-4\varepsilon^2).$$

对每个 $b\in B$, 我们可以找到一个有限支撑的函数 $g_b\in l^2(G,\mathbb{C})^{\oplus n}$, 使得 $\|b-g_b\|<\frac{\varepsilon}{2c}$.于是

$$\begin{aligned}&\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(\{\delta_a\gamma_{e_G}:a\in[n]\},\,\varepsilon\,|\,F,B,c)\\ &\quad\ge\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(\{\delta_a\gamma_{e_G}:a\in[n]\},\,2\varepsilon\,|\,F,\{g_b:b\in B\},c).\end{aligned}$$

我们只需证明

$$\mathrm{dim}_{\Sigma,\omega}(\{\delta_a\gamma_{e_G}:a\in[n]\},\,2\varepsilon\,|\,F,\{g_b:b\in B\},c)\ge n(1-4\varepsilon^2).$$

设 $\theta>0$. 我们只需证明

$$\dim_{\Sigma,\omega}(\{\delta_a\gamma_{e_G}:a\in[n]\},\,2\varepsilon\,|\,F,\{g_b:b\in B\},c)\geq n(1-4\varepsilon^2)-\theta.$$

我们可以找到 $K\in F(G)$ 且 $e_G\in K$, 使得

$$\{g_b:b\in B\}\subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_q\gamma_u:q\in[n],\,u\in K\}.$$

记 $F'=FK\in F(G)$. 注意到 $F'\supseteq K$ 且 $F'\supseteq F$. 选取 $0<\tau<1$, 使得 $\tau\cdot|F|\cdot n\leq\theta$.

设 $\sigma:G\to \mathrm{Sym}(d)$ 是 G 的一个足够好的 sofic 逼近, 使得 $|W|\geq(1-\frac{\tau}{|K|^2})d$, 这里

$$\begin{aligned}W=\{i\in[d]:\ &\text{对任意的 } s\in F,\,t\in K,\ \text{有 } \sigma_s\sigma_t(i)=\sigma_{st}(i)\}\cap\{i\in[d]:\\ &\text{对任意不同的 } s,t\in F',\ \text{有 } \sigma_s(i)\neq\sigma_t(i)\}.\end{aligned}$$

现在我们只需证明

$$\frac{\dim_{2\varepsilon}(\{\delta_a\gamma_{e_G}:a\in[n]\},\,F,\{g_b:b\in B\},\,c,\sigma)}{d}\geq n(1-4\varepsilon^2)-\theta.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\dim_{2\varepsilon}(\{\delta_a\gamma_{e_G}:a\in[n]\},\,F,\{g_b:b\in B\},\,c,\sigma)\\ &\quad\geq d_{2\varepsilon}(\{\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_jg_b-\delta_{sj}sg_b:s\in F,\,j\in[d],\,b\in B\}:i\in[d],\,a\in[n]\}).\end{aligned}$$

由于 $\{g_b:b\in B\}\subseteq\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_q\gamma_u:\,q\in[n],\,u\in K\}$, 从而

$$\begin{aligned}&d_{2\varepsilon}(\{\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_jg_b-\delta_{sj}sg_b:s\in F,\,j\in[d],\,b\in B\}:i\in[d],\,a\in[n]\})\\ &\quad\geq d_{2\varepsilon}(\{\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_u)-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_{su}):s\in F,\,j\in[d],\,q\in[n],\,u\in K\}:\\ &\qquad i\in[d],\,a\in[n]\}).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&d_{2\varepsilon}(\{\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_u)-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_{su}):s\in F,\,j\in[d],q\in[n],u\in K\}:i\in[d],\,a\in[n]\})\\ &\quad\geq d_{2\varepsilon}\Bigg(\Bigg\{\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\Bigg\{\delta_j(\delta_q\gamma_u)-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_{su}):s\in F,\,j\in\bigcap_{t\in K}tW,\,q\in[n],\,u\in K\Bigg\}:\\ &\qquad i\in[d],\,a\in[n]\Bigg\}\Bigg)-d\theta.\end{aligned}$$

我们声称

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\Bigg\{\delta_j(\delta_q\gamma_u)-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_{su}):s\in F,\,j\in\bigcap_{t\in K}tW,\,q\in[n],\,u\in K\Bigg\}\\ &\quad\subseteq\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F',\,j\in W,\,q\in[n]\}.\end{aligned}$$

对任意的 $s\in F$, $j\in\bigcap_{t\in K}tW$, $q\in[n]$, $u\in K$, 存在某个 $i\in W$, 使得 $j=\sigma_u(i)$, 我们有

$$\begin{aligned}\delta_j(\delta_q\gamma_u)-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_{su})&=(\delta_i(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{\sigma_s\sigma_u(i)}(\delta_q\gamma_{su}))-(\delta_i(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{\sigma_u(i)}(\delta_q\gamma_u))\\ &=(\delta_i(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{\sigma_{su}(i)}(\delta_q\gamma_{su}))-(\delta_i(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{\sigma_u(i)}(\delta_q\gamma_u)).\end{aligned}$$

这就证明了

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\Bigg\{\delta_j(\delta_q\gamma_u)-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_{su}):s\in F,\,j\in\bigcap_{t\in K}tW,\,q\in[n],\,u\in K\Bigg\}\\ &\quad\subseteq\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F',\,j\in W,\,q\in[n]\}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&d_{2\varepsilon}\Bigg(\Bigg\{\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_u)-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_{su}):s\in F,\,j\in\bigcap_{t\in K}tW,\,q\in[n],\,u\in K\Bigg\}:\\&\qquad i\in[d],\,a\in[n]\}\Bigg)\\&\quad\geq d_{2\varepsilon}(\{\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F',\,j\in W,\,q\in[n]\}:\\&\qquad i\in[d],\,a\in[n]\})\\&\quad=d_{2\varepsilon}(\{\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F'\backslash\{e_G\},\,j\in W,\,q\in[n]\}:\\&\qquad i\in[d],\,a\in[n]\}).\end{aligned}$$

注意到

$$\{\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F'\backslash\{e_G\},\,j\in W,\,q\in[n]\}:i\in[d],\,a\in[n]\}$$

是线性无关的. 设 $T:\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F'\backslash\{e_G\},\,j\in W,\,q\in[n]\}:i\in[d],\,a\in[n]\}\to\mathbb{C}^{dn}$ 定义为

$$\begin{aligned}&T\Bigg(\sum_{i=1}^d\sum_{a=1}^n c_{ia}\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F'\backslash\{e_G\},\,j\in W,\,q\in[n]\}\Bigg)\\&\quad=(c_{11},\dots,c_{1n},\dots,c_{d1},\dots,c_{dn}).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\Bigg\|\sum_{i=1}^d\sum_{a=1}^n c_{ia}\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F'\backslash\{e_G\},\,j\in W,\,q\in[n]\}\Bigg\|\\&\quad\geq\Bigg(\sum_{i=1}^d\sum_{a=1}^n|c_{ia}|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

我们有 T 是线性有界的且 $\|T\|\leq 1$.

由 Hahn–Banach 定理, 存在一个连续的线性算子

$$\widetilde{T}:(l^2(G,\mathbb{C})^{\oplus n})^d/\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F'\backslash\{e_G\},\,j\in W,\,q\in[n]\}\to\mathbb{C}^{dn},$$

使得 $\|\widetilde{T}\|=\|T\|$ 且 $\widetilde{T}$ 是 T 的一个延拓.

对 $i\in[dn]$, 记 $e_i\in\mathbb{C}^{dn}$ 为在第 i 个位置取值为 1, 在其余位置取值为 0. 于是

$$\begin{aligned}&d_{2\varepsilon}\Bigg(\Bigg\{\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F'\backslash\{e_G\},\,j\in W,\,q\in[n]\Bigg\}:i\in[d],\,a\in[n]\}\Bigg)\\&\quad\geq d_{2\varepsilon}(\{\widetilde{T}(\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F'\backslash\{e_G\},\,j\in W,\,q\in[n]\}):\\&\qquad i\in[d],\,a\in[n]\})\\&\quad=d_{2\varepsilon}(\{T(\delta_i(\delta_a\gamma_{e_G})+\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_j(\delta_q\gamma_{e_G})-\delta_{sj}(\delta_q\gamma_s):s\in F'\backslash\{e_G\},\,j\in W,\,q\in[n]\}):\\&\qquad i\in[d],\,a\in[n]\})\\&\quad=d_{2\varepsilon}(\{e_1,\dots,e_{dn}\})\geq dn(1-4\varepsilon^2).\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\dim_{2\varepsilon}(\{\delta_a\gamma_{e_G}:a\in[n]\},F,\{g_b:b\in B\},c,\sigma)}{d}\geq n(1-4\varepsilon^2)-\theta.$$

证毕.

7 对 Gromov 一个问题的应用

本节将对 Gromov 的一个问题给出命题 6.2 的一个应用.

Gromov 在文 [4] 中提出了如下的问题:

问题 7.1 设 G 是一个可数群, $1 \le p < +\infty$, V 和 W 是两个有限维的复 Banach 空间. 是否有 $l^p(G,V)$ 和 $l^p(G,W)$ 是 G- 同构当且仅当 $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(W)$?

命题 7.2 设 G 是一个可数 sofic 群, $1 \le p < +\infty$, V 和 W 是两个有限维的复 Banach 空间, 则 $l^p(G,V)$ 和 $l^p(G,W)$ 是 G- 同构当且仅当 $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(W)$.

证明 设 $\Sigma = \{\sigma_i : G \to \mathrm{Sym}(d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 G 的一个 sofic 逼近序列. 我们分两种情形.

情形 1 如果 $1 \le p \le 2$. 由推论 3.2 和命题 6.2, 我们有 $l^p(G,V)$ 和 $l^p(G,W)$ 是 G- 同构当且仅当 $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(W)$.

情形 2 如果 $2 < p < +\infty$. 记 p' 为 p 的共轭指标, 亦即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. 注意到 $1 < p' < 2$. 我们只需证明如果 $l^p(G,V)$ 和 $l^p(G,W)$ 是 G- 同构, 那么我们有 $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(W)$.

如果 $l^p(G,V)$ 和 $l^p(G,W)$ 是 G- 同构, 那么 $l^{p'}(G,V)$ 和 $l^{p'}(G,W)$ 也是 G- 同构. 由情形 1, 我们有 $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(W)$. 证毕.

参 考 文 献

[1] Bowen L., Measure conjugacy invariants for actions of countable sofic groups, *J. Amer. Math. Soc.*, 2010, **23**: 217–245.

[2] Ceccherini-Silberstein T., Coornaert M., Cellular Automata and Groups, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[3] Gottschalk W. H., Some general dynamical systems, In: Recent Advances in Topological Dynamics, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 1973, 120–125.

[4] Gromov M., Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps, I, *Math. Phys. Anal. Geom.*, 1999, **2**: 323–415.

[5] Gromov M., Endomorphisms of symbolic algebraic varieties, *J. Eur. Math. Soc.*, 1999, **1**: 109–197.

[6] Kerr D., Sofic measure entropy via finite partitions, *Groups Geom. Dyn.*, 2013, **7**: 617–632.

[7] Kerr D., Li H. F., Entropy and the variational principle for actions of sofic groups, *Invent. Math.*, 2011, **186**: 501–558.

[8] Kerr D., Li H. F., Soficity, amenability, and dynamical entropy, *Amer. J. Math.*, 2013, **135**: 721–761.

[9] Kerr D., Li H. F., Ergodic Theory—Independence and Dichotomies, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2016.

[10] Li H. F., Sofic mean dimension, *Adv. Math.*, 2013, **244**: 570–604.

[11] Lindenstrauss E., Weiss B., Mean topological dimension, *Israel J. Math.*, 2000, **115**: 1–24.

[12] Pestov V. G., Hyperlinear and sofic groups: a brief guide, *Bull. Symbolic Logic.*, 2008, **14**: 449–480.

[13] Pestov V. G., Kwiatkowska A., An introduction to hyperlinear and sofic groups, arXiv: 0911.4266v4.

[14] Voiculescu D., Dynamical approximation entropies and topological entropy in operator algebras, *Comm. Math. Phys.*, 1995, **170**: 249–281.