文章编号: 0583-1431(2020)04-0403-06 **文献标识码: A**

李代数 $W(2,2)$ 上的 Hom- 李代数结构

陈海波

上海立信会计金融学院统计与数学学院 上海 201620
E-mail: rebel1025@126.com

赖丹丹 刘 东

湖州师范学院理学院 湖州 313000
E-mail: 2328140942@qq.com; liudong@zjhu.edu.cn

摘 要 李代数 $W(2,2)$ 是一类重要的无限维李代数, 它是在研究权为 2 的向量生成的顶点算子代数的过程当中提出来的. Hom- 李代数是指同时具备代数结构和李代数结构的一类代数, 并且乘法与李代数乘法运算满足 Leibniz 法则. 本文确定了李代数 $W(2,2)$ 上的 Hom- 李代数结构. 主要结论是李代数 $W(2,2)$ 上没有非平凡的 Hom- 李代数结构. 本文的研究结果对于 $W(2,2)$ 代数的进一步研究有一定的帮助作用.

关键词 李代数 $W(2,2)$; Hom- 李代数; 自同态
MR(2010) 主题分类 17B60, 17B63, 17B65
中图分类 O152.5

The Hom-Lie Structure on the Lie Algebra $W(2,2)$

Hai Bo CHEN

School of Statistics and Mathematics,
Shanghai Lixin University of Accounting and Finance, Shanghai 201620*, P. R. China*
E-mail: *rebel*1025*@126.com*

Dan Dan LAI Dong LIU

School of Science, Huzhou University, Huzhou 313000*, P. R. China*
E-mail: 2328140942*@qq.com*; *liudong@zjhu.edu.cn*

Abstract The Lie algebra $W(2,2)$ is one kind of infinite-dimensional Lie algebras, which plays a key role in classification of vertex operator algebras generated by weight 2 vectors. Hom-Lie algebras are algebras with an algebra structure and a Lie algebra structure, both of which satisfy the Leibniz rule. This paper mainly determine all

收稿日期: 2019-09-10; 接受日期: 2019-12-03
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11971315, 11871249)
通讯作者: 刘东

Hom-Lie structures on the Lie algebra $W(2,2)$. It is the main result that all Hom-Lie algebra structures are trivial on the Lie algebra $W(2,2)$, which will be helpful to the further researches on the Lie algebra $W(2,2)$.

Keywords Lie algebra $W(2,2)$; Hom-Lie algebra; endomorphism
MR(2010) Subject Classification 17B60, 17B63, 17B65
Chinese Library Classification O152.5

1 引言

Virasoro 代数是一类重要的无限维李代数, 在数学、物理中有许多重要应用. 文献 [9] 研究了 Virasoro 代数自同构与自同态, 文献 [4] 在此基础上研究证明了 Virasoro 代数上的 Hom-李代数结构是平凡的. 无限维李代数被广泛应用于物理及其他数学分支, 特别是 Heisenberg 代数、Virasoro 代数、Poisson 代数、Weyl 代数等李代数被大量数学家及物理学家所关注. 李代数 $W(2,2)$ 是在研究权为 2 的向量生成的顶点算子代数的过程中提出来的, 这个代数与 Virasoro 代数和它的模关系十分密切. 它们在数学和物理学的许多分支中都有着广泛的应用.

Hom- 李代数是一类满足反对称和 Hom-Jacobi 等式的非结合代数, 起源于对 Witt 代数和 Virasoro 代数形变理论的研究 [2]. 作为文 [2] 中首次引进的 q- 李代数概念的推广, Hartwig 和 Silvestrov 等在文 [1] 中正式提出 Hom- 李代数的概念. 近来, Hom- 李代数正在引起越来越多的关注 (见文 [3, 7] 等). 确定一个李代数上的 Hom- 李代数结构, 对于 Hom- 李代数的分类是一件有意义的工作. 本文主要确定了李代数 $W(2,2)$ 上的 Hom- 李代数结构是平凡的.

在本文中, $\mathbb{Z},\mathbb{Z}^*$ 和 $\mathbb{C},\mathbb{C}^*$ 分别表示整数集、非零整数集、复数集和非零复数集, 所有的代数 (向量空间) 都定义在 $\mathbb{C}$ 上.

2 预备知识

定义 2.1 [9] 一个 Hom- 李代数 (L,φ) 是由一个非结合代数 L 和代数同态 $\sigma: L\to L$ 所确定的代数, 且对任意的 $x,y,z\in L$, σ 满足:

(1) $[x,y]=-[y,x]$;

(2) $[\sigma(x),[y,z]]+[\sigma(y),[z,x]]+[\sigma(z),[x,y]]=0$, 其中 $[-,-]$ 为 L 中的乘积. (2) 称为 σ- 扭 Jacobi 等式.

定义 2.2 [9] 李代数 $W(2,2)$ 记为 $\mathscr{L}$, 是域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间, 它有一组基 $\{L_m,I_m,C,C'\}$ 且满足如下关系式:

$$[L_m,L_n]=(n-m)L_{m+n}+\delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}C,$$
$$[L_m,I_n]=(n-m)I_{m+n}+\delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}C',$$
$$[I_m,I_n]=0,\quad [\mathscr{L},C]=[\mathscr{L},C']=0,\quad \forall\, m,n\in\mathbb{Z}.$$

显然

$$\mathscr{L}=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\mathscr{L}_m,$$

其中 $\mathscr{L}$ 是一个 $\mathbb{C}$ 上的 $\mathbb{Z}$- 分次李代数.

$$\mathscr{L}_m=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L_m, I_m \mid m\in\mathbb{Z},\, m\neq 0\},\quad \mathscr{L}_0=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L_0, I_0, C, C'\},$$

并记

$$\mathscr{L}_+=\sum_{m\geq 1}\mathscr{L}_m,\quad \mathscr{L}_-=\sum_{m\leq -1}\mathscr{L}_m.$$

李代数 $W(2,2)$ 可看作 Virasoro 代数 Vir=$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L_n, C\mid n\in\mathbb{Z}\}$ 与其的一个中间序列模的半直积 [10]. 事实上, $W=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L_m\mid m\in\mathbb{Z}\}$ 是 Witt 代数 (无中心的 Virasoro 代数), $V=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{I_n\mid n\in\mathbb{Z}\}$ 是 W- 模, 满足关系式 $[L_m, I_n]=(n-m)I_{m+n}$, 则 W 与 V 半直积构成一李代数, 记为 $W(1)$ (也称为无中心的 $W(2,2)$). 而李代数 $W(2,2)$ 是李代数 $W(1)$ 的普遍中心扩张. 许多论文研究了 $W(2,2)$ 的结构与表示理论 (见文 [5, 6, 8] 等).

定理 2.1 [9] Virasoro 代数 Vir 上的任一自同态 $\sigma:\mathrm{Vir}\to\mathrm{Vir}$ 都有如下形式:

$$\sigma(L_n)=\frac{1}{k}a^nL_{kn}+\delta_{n,0}\frac{1-k^2}{24k}C,\quad \sigma(C)=kC,$$

其中 $k\in\mathbb{Z}^*$, $a\in\mathbb{C}$.

定理 2.2 [4] Virasoro 代数 Vir 上的任一 Hom- 李代数结构 (Vir,σ) 都是平凡的, 即 $\sigma=\mathrm{id}$.

本文通过确定李代数 $W(2,2)$ 上的自同态环, 进而给出李代数 $W(2,2)$ 上的所有 Hom- 李代数结构.

3 李代数 $W(2,2)$ 上的自同态环

定理 3.1 李代数 $W(1)$ (即无中心的 $W(2,2)$) 上的任一非零自同态 φ 都具有如下形式:

$$\varphi(L_n)=\frac{1}{k}a^nL_{kn}+cna^nI_{kn},\quad \varphi(I_n)=a^nbI_{kn},$$

其中 $k\in\mathbb{Z}^*$, $a\in\mathbb{C}^*$, $b,c\in\mathbb{C}$.

证明 直接验证上面定义的 φ 是 $W(1)$ 上的自同态. 反之, 设 φ 是 $W(1)$ 上的任一自同态. 根据定理 2.2, 限制在 Witt 代数 W 上 $\varphi(L_n)=\frac{1}{k}a^nL_{kn}$, 其中 $a\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{Z}^*$. 因此可设

$$\varphi(L_n)=\frac{1}{k}a^nL_{kn}+f_nI_{kn},\quad \varphi(I_n)=g_nI_{kn},$$

其中 $f_n, g_n\in\mathbb{C}$. 根据定义有

$$\varphi[L_m, L_n]=[\varphi(L_m),\varphi(L_n)],\quad \varphi[L_m, I_n]=[\varphi(L_m),\varphi(I_n)].$$

下面分两个步骤进行讨论:

步骤 1 $\varphi[L_m,L_n]=(n-m)\varphi(L_{m+n})=(n-m)(\frac{1}{k}a^{m+n}L_{k(m+n)}+f_{m+n}I_{k(m+n)})$.

$$\begin{aligned}[\varphi(L_m),\varphi(L_n)]&=\left[\frac{1}{k}a^mL_{km}+f_mI_{km},\frac{1}{k}a^nL_{kn}+f_nI_{kn}\right]\\&=\frac{1}{k^2}a^{m+n}[L_{km},L_{kn}]+\frac{1}{k}a^mf_n[L_{km},I_{kn}]+\frac{1}{k}a^nf_m[I_{km},L_{kn}]\\&=(n-m)\frac{1}{k}a^{m+n}L_{k(m+n)}+(n-m)(a^mf_n+a^nf_m)I_{k(m+n)}.\end{aligned}$$

由于 $\varphi[L_m,L_n]=[\varphi(L_m),\varphi(L_n)]$, 所以可以得到

$$f_{m+n}=a^mf_n+a^nf_m.$$

令 $m=1$, 故式子化为 $f_{n+1}=af_n+a^nf_1$, 两边同时除以 a^{n+1}, 有

$$\frac{f_{n+1}}{a^{n+1}}=\frac{f_n}{a^n}+\frac{f_1}{a}.$$

再令 $h_n=\frac{f_n}{a^n}$, 显然有 $h_n=nh_1$, 令 $h_1=c$, 故 $h_n=cn$, 即 $f_n=cna^n$. 所以我们可以得到

$$\varphi(L_n)=\frac{1}{k}a^nL_{kn}+cna^nI_{kn}.$$

步骤 2 $\varphi[L_m,I_n]=(n-m)\varphi I_{m+n}=(n-m)g_{m+n}I_{k(m+n)}$.

$$\begin{aligned}[\varphi(L_m),\varphi(I_n)]&=\left[\frac{1}{k}a^mL_{km}+cma^mI_{km},\ g_nI_{kn}\right]\\&=\frac{1}{k}a^mg_n[L_{km},I_{kn}]\\&=(n-m)a^mg_nI_{k(m+n)}.\end{aligned}$$

由于 $\varphi[L_m,I_n]=[\varphi(L_m),\varphi(I_n)]$, 所以我们可以得到 $g_{m+n}=a^mg_n$. 令 $n=0$, 故式子化为 $g_m=a^mg_0$, 再令 $g_0=b$, 故 $g_n=a^nb$. 所以我们可以得到:

$$\varphi(I_n)=a^nbI_{kn}.$$

定理得证.

推论 3.1 李代数 $W(2,2)$ 上的任一非零自同态 φ 都具有如下形式:

$$\begin{aligned}&\varphi(L_n)=\frac{1}{k}a^nL_{kn}+cna^nI_{kn}+\delta_{n,0}\frac{1-k^2}{24k}C,\\&\varphi(I_n)=a^nbI_{kn}+\delta_{n,0}\frac{b(1-k^2)}{24}C',\\&\varphi(C)=kC,\quad\varphi(C')=k^2bC',\end{aligned}$$

其中 $k\in\mathbb{Z}^*$, $a\in\mathbb{C}^*$, $b,c\in\mathbb{C}$.

证明 根据定理 3.1, 当 $n\neq 0$ 时, 我们有

$$\varphi[L_{-n},L_n]=2n\varphi(L_0)+\frac{n-n^3}{12}\varphi(C)$$

和

$$\begin{aligned}[\varphi(L_{-n}),\varphi(L_n)]&=\left[\frac{1}{k}a^{-n}L_{-kn}-cna^{-n}I_{-kn},\frac{1}{k}a^nL_{kn}+cna^nI_{kn}\right]\\&=\frac{1}{k^2}[L_{-kn},L_{kn}]+\frac{cn}{k}[L_{-kn},I_{kn}]-\frac{cn}{k}[I_{-kn},L_{kn}]\\&=\frac{1}{k^2}\left(2knL_0+\frac{kn-k^3m^3}{12}C\right)\\&=\frac{2n}{k}L_0+\frac{n-k^2n^3}{12k}C.\end{aligned}$$

当 $n=1$ 时, $2\varphi(L_0)=\frac{2}{k}L_0+\frac{1-k^2}{12k}C$, 故可得

$$\varphi(L_0)=\frac{1}{k}L_0+\frac{1-k^2}{24k}C.$$

由 $\varphi[L_{-n},L_n]=[\varphi(L_{-n}),\varphi(L_n)]$, 有

$$2n\varphi(L_0)+\frac{n-n^3}{12}\varphi(C)=\frac{2n}{k}L_0+\frac{n-k^2n^3}{12k}C,$$

可得到 $\varphi(C)=kC$.

根据

$$\varphi[L_{-n},I_n]=2n\varphi(I_0)+\frac{n-n^3}{12}\varphi(C')$$

和

$$[\varphi(L_{-n}),\varphi(I_n)]=\left[\frac{1}{k}a^{-n}L_{-kn}-cna^{-n}I_{-kn},a^nBI_{kn}\right]=2bnI_0+\frac{b(n-k^2n^3)}{12k}C',$$

当 $n=1$ 时, $2\varphi(I_0)=2bI_0+\frac{b(1-k^2)}{12k}C'$, 故可得

$$\varphi(I_0)=bI_0+\frac{b(1-k^2)}{24}C'.$$

由 $\varphi[L_{-n},I_n]=[\varphi(L_{-n}),\varphi(I_n)]$, 有

$$2n\varphi(I_0)+\frac{n-n^3}{12}\varphi(C')=2bnI_0+\frac{b(n-k^2n^3)}{12}C',$$

可得到 $\varphi(C')=bk^2C'$.

综上所述, 推论得证.

4　李代数 $W(2,2)$ 上的 Hom- 李代数结构

定理 4.1　如果 σ 是 $W(2,2)$ 上的一个非零自同态, $(W(2,2),\sigma)$ 是一个 Hom- 李代数, 则 $\sigma=\mathrm{id}$. 也就是说, $W(2,2)$ 代数上的 Hom- 李代数结构是平凡的.

证明　由第 3 节可知, 非零自同态只有 σ 具有推论 3.1 的形式. 对任意的 $m,n,p\in\mathbb{Z}$, σ- 扭 Jacobi 等式变为

$$[\sigma(L_m),[L_n,L_p]]+[\sigma(L_n),[L_p,L_m]]+[\sigma(L_p),[L_m,L_n]]=0.$$

也就是

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{k}a^mL_{km}+cma^mI_{km},(p-n)L_{n+p}\right]+\left[\frac{1}{k}a^nL_{kn}+cna^nI_{kn},(m-p)L_{m+p}\right]\\&\quad+\left[\frac{1}{k}a^pL_{ku}+cua^pI_{ku},(n-m)L_{m+n}\right]=0,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&(p-n)\frac{1}{k}a^m(p+n-km)L_{km+n+p}+cm(p-n)a^m(p+n-km)I_{km+p+n}\\&\quad+(m-p)\frac{1}{k}a^n(p+m-kn)L_{kn+m+p}+cn(m-p)a^n(p+m-kn)I_{kn+p+m}\\&\quad+(n-m)\frac{1}{k}a^p(m+n-ku)L_{ku+n+m}+cu(n-m)a^p(m+n-ku)I_{ku+m+n}=0.\end{aligned}$$

由于 $m,n,p\in\mathbb{Z}$ 是任意的, 特别地, 分别取 $m=3$, $n=2$, $p=1$, 我们有

$$\begin{aligned}&-\frac{a^3}{k}(3-3k)L_{3k+3}+3c(-1)a^3(3-3k)I_{3k+3}+\frac{2a^2}{k}(4-2k)L_{2k+4}\\&\quad+2ca^22(4-2k)I_{2k+4}-\frac{a}{k}(5-k)L_{k+5}+ca(-1)(5-k)I_{k+5}=0.\end{aligned}$$

由于 $k \in \mathbb{Z}$, 则必有 $k=1$. 同时我们有 $(4a^2-4a)L_6+(8a^2c-4ac)I_6=0$, 也就是 $4a^2-4a=0$ 且 $8a^2c-4ac=0$. 由于 $a\neq 0$, 我们得到 $a=1$ 且 $c=0$. 故

$$\sigma(L_n)=L_n.$$

又由

$$[\sigma(L_m),[L_n,I_p]]+[\sigma(L_n),[I_p,L_m]]+[\sigma(I_p),[L_m,L_n]]=0,$$

也就是

$$\left[\frac{1}{k}a^mL_{km}+cma^mI_{km},(p-n)I_{n+p}\right]+\left[\frac{1}{k}a^nL_{kn}+cna^nI_{kn},(m-p)I_{m+p}\right] + \left[\frac{1}{k}a^pL_{ku}+cua^pI_{ku},(n-m)I_{m+n}\right]=0,$$

即

$$(p-n)\frac{1}{k}a^m(p+n-km)I_{km+p+n}+(m-p)\frac{1}{k}a^n(p+m-kn)I_{kn+p+m} + (n-m)a^pb(m+n-ku)I_{ku+m+n}=0.$$

由于 $m,n,p\in\mathbb{Z}$ 是任意的, 特别地, 取 $m=3$, $n=2$, $p=1$, 我们有

$$-\frac{a^3}{k}(3-3k)I_{3k+3}+\frac{2a^2}{k}(4-2k)I_{2k+4}+ba(-1)(5-k)I_{k+5}=0.$$

由于 $k\in\mathbb{Z}$, 则必有 $k=1$. 同时, 我们有 $(4a^2-4ab)I_6=0$, 也就是 $4a^2-4a=0$. 由于 $a\neq 0$, 我们得到 $a=b=1$. 故

$$\sigma(L_n)=L_n,\quad \sigma(I_n)=I_n,\quad \sigma(C)=C,\quad \sigma(C')=C',\quad \forall\, n\in\mathbb{Z}.$$

参 考 文 献

[1] Hartwig J. T., Larsson D., Silvestrov S. D., Deformations of Lie algebras using σ-derivations, *Journal of Algebra*, 2006, **295**: 314–361.

[2] Hu N. H., q-Witt algebras, q-Lie algebras, q-holomorph structure and representations, *Algebra Colloq.*, 1999, **6**(1): 51–70.

[3] Jin Q. Q., Li X. C., Hom-structures on semi-simple Lie algebras, *Journal of Algebra*, 2008, **319**(4): 1398–1408.

[4] Li X. C., Hom-Lie algebra structure on the Virasoro algebra, *Journal of Zhoukou Normal University*, 2009, **26**(5): 3–4.

[5] Li Y. N., Gao S. L., Liu D., Poisson structure on the Lie algebra $W(2,2)$ (in Chinese), *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 2016, **37**(3): 267–272

[6] Liu D., Gao S. L., Zhu L. S., Classification of irreducible weight modules over the W-algebra $W(2,2)$, *Journal of Mathematical Physics*, 2008, **49**, 113503, 6 pp.

[7] Makhlouf A., Zusmanovich P., Hom-Lie structures on Kac–Moody algebras, *Journal of Algebra*, 2018, **515**: 278–297.

[8] Zhang W., Dong C. Y., W-algebra $W(2,2)$ and the vertex operator algebra $L(1/2,0)\otimes L(1/2,0)$, *Commun. Math. Phys.*, 2009, **285**(3): 991–1004.

[9] Zhao K. M., Automorphisms and homomorphisms of the Virasoro algebra (in Chinese), *J. Systems Sci. Math. Sci.*, 1992, **12**(1): 1–4.

[10] Zhao X. X., Gao S. L., Liu D., Poisson structure on the twisted Heisenberg–Virasoro algebra, *Acta Math. Sinica Chin. Ser.*, 2016, **59**(6): 775–782.